частиц m_1 и m_2 с m_3, $\mathbf{q}_4$ — вектор, соединяющий центр масс частиц m_1, m_2, m_3 с частицей m_4 и т.д. Радиус-вектор центра масс системы $\mathbf{q}_1 = \mathbf{R}$.

Лекция 10. Задача двух тел

Наиболее простая система состоит из двух частиц. Однако ее исследование важно по двум причинам. Во-первых, как правило, задача двух тел может быть решена в терминах известных функций. Это делает ее «пробным камнем» для утверждений новых теорий. Во-вторых, такое решение можно принять как нулевое приближение при изучении N-частичных систем.

10.1. Лагранжиан и уравнения движения. Обобщенные координаты $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, в которых записан лагранжиан (7.4) задачи двух тел, обладают тем недостатком, что переменные $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ не разделяются. Удобно перейти к новым переменным:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \mathbf{R} = \frac{1}{m}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2), \quad m = m_1 + m_2\,. \tag{10.1}$$

По рис. 10.1 находим замену:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} - \frac{m_2}{m}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \frac{m_1}{m}\mathbf{r}\,. \tag{10.2}$$

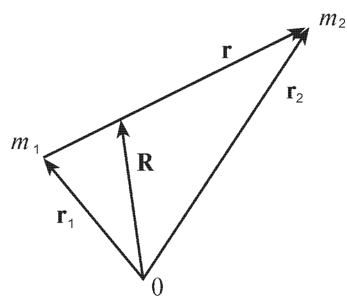

Рис. 10.1

В новых переменных кинетическая энергия

$$T = \frac{m_1}{2}\dot{\mathbf{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2}\dot{\mathbf{r}}_2^2 = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2, \tag{10.3}$$

где $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$ — приведенная масса системы. Очевидно, что $\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1$ — относительная скорость. Первое слагаемое в (10.3) — кинетическая энергия системы как целого, второе — кинетическая энергия относительного движения. Учитывая (10.2), найдем момент импульса системы:

$$\mathbf{M} = [\,\mathbf{r}_1 \cdot m_1\dot{\mathbf{r}}_1\,] + [\,\mathbf{r}_2 \cdot m_2\dot{\mathbf{r}}_2] = m[\,\mathbf{R}\cdot\dot{\mathbf{R}}\,] + \mu[\,\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}\,]\,. \tag{10.4}$$

Поскольку потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r})$, то в новых переменных лагранжиан

$$L(\,\mathbf{r}, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{\mathbf{R}}) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - U(\mathbf{r}). \tag{10.5}$$

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{R}}, \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}$$

приобретают вид

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \tag{10.6}$$

$m\ddot{\mathbf{R}} = 0$. Интегрируя, находим $\mathbf{R} = \mathbf{C} + \mathbf{V}t$.

П р и м е р 10.1. Пусть $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -\frac{k}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2$. Из (10.6) следует уравнение $\mu\ddot{\mathbf{r}} = -k\mathbf{r}$, решение которого

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{A}\cos\omega t + \mathbf{B}\sin\omega t, \quad \omega = \sqrt{k/\mu}.$$

Общее решение

$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{C} + \mathbf{V}t - \frac{m_2}{m}(\mathbf{A}\cos\omega t + \mathbf{B}\sin\omega t),$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{C} + \mathbf{V}t + \frac{m_1}{m}(\mathbf{A}\cos\omega t + \mathbf{B}\sin\omega t)$$

зависит от двенадцати постоянных. Выберем начальные условия так, чтобы частицы двигались по окружностям радиусов $(m_2/m)a$ и $(m_1/m)a$:

$$\mathbf{r}_1(0) = -\frac{m_2}{m}\mathbf{a}, \quad \mathbf{r}_2(0) = \frac{m_1}{m}\mathbf{a}, \quad \dot{\mathbf{r}}_1(0) = -\frac{m_2}{m}\mathbf{v}_0, \quad \dot{\mathbf{r}}_2(0) = \frac{m_1}{m}\mathbf{v}_0,$$

причем $\mathbf{v}_0\mathbf{a} = 0$, $v_0 = \omega a$. В этом случае $\mathbf{C} = 0$, $\mathbf{V} = 0$, $\mathbf{A} = \mathbf{a}$, $\mathbf{B} = \mathbf{v}_0/\omega$,

$$\mathbf{r}_1(t) = -\frac{m_2}{m}\left(\mathbf{a}\cos\omega t + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}\sin\omega t\right),$$

$$\mathbf{r}_2(t) = -\frac{m_1}{m}\left(\mathbf{a}\cos\omega t + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}\sin\omega t\right).$$

10.2. Движение в системе центра масс (СЦМ). Перейдем в СЦМ, движущуюся со скоростью $\mathbf{V}$. Учитывая (10.6), находим, что здесь сохраняются момент импульса и полная энергия:

$$\mu[\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}] = \mathbf{M}_0, \quad \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + U(\mathbf{r}) = E. \tag{10.7}$$

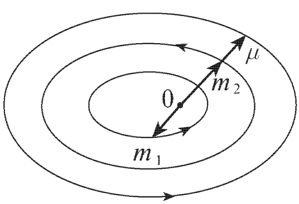

Рис. 10.2

Эти уравнения описывают движение фиктивной частицы массой μ с радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$. Ее называют μ-точкой. Положение реальных частиц связано с $\mathbf{r}(t)$ соотношениями $\mathbf{r}_1' = -(m_2/m)\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_2' = (m_1/m)\mathbf{r}$.

П р и м е р 10.2. Пусть $U(\mathbf{r}) = -\alpha/r$. Проведя в (6.7), (6.8) замену $m \to \mu$, получим решение уравнений (10.7) как решение задачи Кеплера. На рис. 10.2 изображены траектории частиц m_1 и m_2 и μ-точки в случае $E < 0, m_2 < m_1$.

Первая космическая скорость. Предположим, что частица m_1— однородный шар радиусом a. Начальные условия выбраны так, что центр шара C и частица m_2 описывают окружности радиусов $\dfrac{m_2}{m}\,a$, $\dfrac{m_1}{m}\,a$, находясь на расстоянии a друг от друга. Величину скорости их относительного движения найдем из уравнения (10.6):

$$\mu\frac{v_{\rm I}^2}{a} = \frac{\alpha}{a^2} \to v_{\rm I} = \sqrt{\frac{\alpha}{\mu a}} = \sqrt{\frac{\alpha}{m_2 a}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}\,.$$

Для Земли $a = 6371$ км, $\alpha = m_2 g a^2$, $m_1 \gg m_2$, $v_{\rm I} \simeq \sqrt{ga} = 7,91$ км/с.

Вторая космическая скорость $v_{\rm II}$ — наименьшее значение скорости, которую нужно сообщить частице m_1 (находящейся на поверхности шара) относительно шара для того, чтобы они разошлись на бесконечно большое расстояние. Используя закон сохранения полной энергии (10.7), находим

$$\frac{\mu}{2}v_{\rm II}^2 - \frac{\alpha}{a} = 0 \to v_{\rm II} = \sqrt{\frac{2\alpha}{m_2 a}\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)}\,.$$

10.3. Приближение внешнего поля. Это переход к представлению о движении частицы m_2 в поле тяжести, создаваемом частицей m_1 — однородным шаром массой m_1. Пусть $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, T_1, T_2, U — импульсы, кинетические энергии и потенциальная энергия взаимодействия шара и частицы в момент времени t. Из законов сохранения импульса и полной энергии системы находим

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2'\,, \tag{10.8}$$

$$T_1 + T_2 + U = T_1' + T_2' + U'\,. \tag{10.9}$$

Штрихом отмечены указанные величины в момент времени t'. Обозначая через $\mathbf{q} = \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_1'$ импульс, переданный частице m_2, представим (10.9) в виде

$$E_2' - E_2 = -\Delta T_1, \quad \Delta T_1 = \frac{1}{m_1}\mathbf{p}_1\mathbf{q} + \frac{q^2}{2m}\,,$$

где $E_2 = T_2 + U$. Если в процессе взаимодействия выполняются условия $|\,\Delta T_1| \ll |E_2|, |E_2'|$, то изменением состояния частицы m_1 можно пренебречь. В этом случае говорят, что частица m_1 играет роль источника внешнего поля, в котором движется частица m_2. Вместо (10.8), (10.9) имеем

$$\mathbf{p}_2' = \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}, \quad E_2' = E_2\,. \tag{10.10}$$

Следует помнить, что законы сохранения (10.10) выполняются приближенно. Если не учитывать это обстоятельство, то можно прийти к множеству парадоксов. Рассмотрим один из них.

Пусть частица m_2 движется по вертикали вблизи поверхности Земли. В начальный момент времени $\mathbf{v}_2(0) = 0$. Из закона сохранения энергии находим

$$0 + m_2 gh = \frac{m_2}{2} v_2'^2 + m_2 gh' \to v_2' = \sqrt{2g\Delta h}\,, \quad \Delta h = h - h'\,.$$

Перейдем теперь в систему отсчета, движущуюся со скоростью $u = \sqrt{2g\Delta h}$ по направлению к поверхности Земли. Из законов сохранения энергии получим

$$\frac{m_2}{2}(\sqrt{2g\Delta h})^2 + m_2 gh = 0 + m_2 gh' \to \Delta h = 0\,.$$

Абсурдность этого результата — следствие нарушения условий применимости законов сохранения (10.10).

10.4. Система Земля–Луна в поле тяготения Солнца. Рассмотрим систему трех тел массами m_1, m_2, m_0, причем $m_0 \gg \gg m_1,\, m_2$.

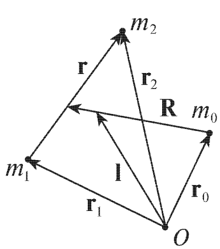

Рис. 10.3

В инерциальной системе отсчета с началом в точке O радиусы-векторы частиц равны $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_0$ (рис. 10.3). Построим лагранжиан системы в переменных Якоби, производя замену $\mathbf{r}_1,\, \mathbf{r}_2,\ \ \mathbf{r}_0 \to \mathbf{r}$, $\mathbf{R}, \mathbf{l}$, где $\mathbf{R}$ — вектор, идущий от частицы m_0 к центру масс системы частиц m_1 и m_2, $\mathbf{l}$ — радиус-вектор центра масс всей системы. По рис. 10.3 находим

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{l} + \frac{m_0}{M}\,\mathbf{R} - \frac{m_2}{m}\,\mathbf{r}\,, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{l} + \frac{m_0}{M}\,\mathbf{R} + \frac{m_1}{m}\,\mathbf{r}\,,$$

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{l} - \frac{m}{M}\,\mathbf{R}\,, \quad M = m_1 + m_2 + m_0\,, \quad m = m_1 + m_2.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{M}{2}\,\dot{\mathbf{l}}^2 + \frac{\mu_0}{2}\,\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\,\dot{\mathbf{r}}^2, \quad \mu_0^{-1} = m_0^{-1} + m^{-1}.$$

Потенциальная энергия

$$U(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = -\frac{Gm_1m_2}{r} - \frac{Gm_1m_0}{|\,\mathbf{R} - (m_2/m)\,\mathbf{r}\,|} - \frac{Gm_2m_0}{|\,\mathbf{R} + (m_1/m)\,\mathbf{r}\,|}. \qquad (10.11)$$

Поскольку $R \gg r$, то, учитывая разложение в ряд Тейлора функции $|\,\mathbf{R} + \mathbf{x}\,|^{-1}$ (см. (1.15)), получим

$$U(\mathbf{R},\, \mathbf{r}) \simeq -\frac{Gm_1m_2}{r} - \frac{Gmm_0}{R} - \frac{G\mu m_0}{2}\left[\frac{3(\mathbf{rR})^2}{R^5} - \frac{r^2}{R^3}\right] + \ldots$$

Лагранжиан системы $L = T - U$. Уравнения Лагранжа: $\ddot{\mathbf{l}} = 0$,

$$\mu_0 \ddot{\mathbf{R}} = -Gmm_0 \frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{G\mu m_0}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \left[\frac{3(\mathbf{rR})^2}{R^5} - \frac{r^2}{R^3} \right] + \ldots , \tag{10.12}$$

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -Gm_1 m_2 \frac{\mathbf{r}}{r^3} + G\mu m_0 \left[\frac{3(\mathbf{rR})\mathbf{R}}{R^5} - \frac{\mathbf{r}}{R^3} \right] + \ldots \tag{10.13}$$

Пренебрегая в (10.12) вторым членом, заключаем, что радиус-вектор системы Земля–Луна описывает кеплерову траекторию. В этом приближении уравнение (10.13) порождается лагранжианом

$$L_{\text{ЗЛ}}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{\mu}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{Gm_1 m_2}{r} + \frac{G\mu m_0}{2} \left[\frac{3(\mathbf{rR})^2}{R^5} - \frac{r^2}{R^3} \right], \tag{10.14}$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{R}(t)$ — известная функция времени. Обращаясь к уравнению (10.13), заметим, что $m_0/m \sim 3,33 \cdot 10^5$, $\dfrac{r}{R} \sim 2,56 \cdot 10^{-3}$; отношение второго члена к первому в правой части $\sim (2m_0/m)(r/R)^3 = 0,011$. Эта величина является наибольшей по сравнению с аналогичным отношением для других планет и их спутников.

Основные особенности движения Луны вызваны возмущающим влиянием Солнца. Анализ решения уравнения (10.13) показал, что если орбиту Луны расположить перпендикулярно плоскости эклиптики, то за 55 оборотов (за 4,5 года) перигей орбиты достигнет поверхности Земли [33]. Следует, однако, учесть, что Луна является телом конечных размеров и может быть ранее разорвана гравитационными силами при достижении *предела Роша*, равного трем радиусам Земли. Предел Роша — расстояние, на котором сила, действующая на «половинку» Луны со стороны Земли, начинает превосходить силу притяжения другой «половинкой» Луны [16, 45].

Пример 10.3. Один из методов обнаружения иных планетных систем основан на исследовании периодического смещения линий поглощения в спектре звезды. Если ν_0 — частота излучения неподвижным источником, то источник, движущийся со скоростью $\mathbf{v}_0 = d\mathbf{r}_0/dt$ излучает в направлении $\mathbf{n}$ электромагнитную волну частотой

$$\nu' = \nu_0/(1 - \mathbf{nv}_0/c) \approx \nu_0 + \Delta\nu, \quad \Delta\nu = \nu_0(m/cM)(\mathbf{n}d\mathbf{R}/dt).$$

Амплитуда вариаций частоты составляет $2\nu_0(m/cM)(Gm_0/R)^{1/2}$.

10.5. Гравитационная рогатка. Двойная звезда, массы компонент которой m_1 и m_2, налетает на черную дыру массой m_0. В результате захвата «дырой» звезды массой m_1 вторая звезда приобретает скорость $\mathbf{v}_2$. Покажем, что величина $\mathbf{v}_2$ намного больше скорости двойной звезды.

Происходит «реакция» $m_{12} + m_0 \to m_{01} + m_2$. Обычно $m_1, m_2 \ll m_0$. Рассмотрим процесс столкновения в системе покоя черной дыры. Скорость двойной звезды — $\mathbf{u}$. До столкновения двойная звезда находилась на бесконечно большом расстоянии от черной дыры. Поэтому полная энергия системы равна сумме $m_{12}u^2/2 - A_{12}$ кинетической энергии двойной звезды и полной энергии относительного движения $E_{12} = -A_{12}$, где A_{12} — энергия связи. После столкновения полная энергия системы при достаточно большом расстоянии между новыми объектами равна $m_2v_2^2/2 + E_{01}$, где $E_{01} = -A_{01}$ — полная энергия связанной системы черная дыра–звезда массой m_1. Из закона сохранения полной энергии получим уравнение

$$\frac{m_{12}u^2}{2} - A_{12} = \frac{m_2v_2^2}{2} - A_{01},$$

из которого следует, что кинетическая энергия звезды массой m_2 равна

$$\frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_{12}u^2}{2} + (A_{01} - A_{12}).$$

Энергия связи звезды и черной дыры $A_{01} \gg A_{12}$. Поэтому $v_2 \gg u$.

10.6. Движение двух зарядов во внешнем поле. В качестве системы рассмотрим атом водорода. Пусть m_1, e — масса и заряд протона, m_2, $-e$ — масса и заряд электрона.

1. *Атом водорода в однородном электрическом поле.* Потенциальная энергия атома $\Pi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -e\mathbf{E}\mathbf{r}_1 + e\mathbf{E}\mathbf{r}_2 - e^2/|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля. После замены переменных (10.2) получим лагранжиан

$$L(\mathbf{r}, \mathbf{R}, \dot{\mathbf{r}}, \dot{R}) = \frac{m}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e^2}{r} - e\mathbf{E}\mathbf{r}.$$

Поскольку $m\ddot{\mathbf{R}} = 0$, то наличие однородного поля не влияет на движение центра масс атома. Уравнения Лагранжа

$$\mu\ddot{\mathbf{r}} = -e^2\frac{\mathbf{r}}{r^3} - e\mathbf{E}$$

могут быть решены только в параболических координатах.

2. *Атом водорода в квадрупольном конденсаторе с потенциалом* $\varphi = (V_0/2a^2)(x^2 - y^2)$. Потенциальная энергия атома

$$\Pi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{eV_0}{2a^2}[(x_1^2 - y_1^2) - (x_2^2 - y_2^2)] - \frac{e^2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}$$

после замены (10.2) приобретает вид

$$U(\mathbf{R}, \mathbf{r}) = \frac{eV_0}{2a^2}\left[-2(R_1x - R_2y) - \frac{m_1 - m_2}{m}(x^2 - y^2)\right] - \frac{e^2}{r}.$$

Из уравнений Лагранжа

$$\ddot{R}_1 - \Omega^2x = 0, \quad \ddot{R}_2 + \Omega^2y = 0, \quad \ddot{R}_3 = 0, \quad \Omega^2 = \frac{eV_0}{ma^2},$$

$$\ddot{x} + \frac{e^2}{\mu}\frac{x}{r^3} - \Omega_0^2(R_1 + kx) = 0, \quad \ddot{z} + \frac{e^2}{\mu}\frac{z}{r^3} = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{e^2}{\mu}\frac{y}{r^3} + \Omega_0^2(R_2 + ky) = 0, \quad \Omega_0^2 = \frac{eV_0}{\mu a^2}, \quad k = \frac{m_1 - m_2}{m}$$

следует, что закон движения центра масс зависит от характера относительного движения электрона и протона. Заметим, что в мазерах на аммиаке пространственное разделение атомов, находящихся в основном и возбужденном состояниях, осуществляется пропусканием пучка молекул аммиака через квадрупольный конденсатор.

Лекция 11. Упругое рассеяние частиц

Большую часть информации о природе взаимодействия элементарных частиц получают с помощью ускорителей в результате анализа процессов столкновений. Сейчас общепризнано, что изучение элементарных частиц представляет прямой, а возможно, и единственный путь к пониманию фундаментальных законов Природы. Однако не менее важны проблемы построения моделей ядер или многоэлектронных систем, в частности биомолекул. В связи с этим задачей теории является получение характеристик потенциальной энергии взаимодействия многочастичных систем по данным рассеяния.

Поскольку ядра и молекулы являются типично квантовыми объектами, то задача должна быть рассмотрена только в рамках квантовой теории. Тем не менее при определенных условиях становится возможным описание рассеяния в терминах величин, ассоциированных с движением по классическим траекториям.

11.1. Кинематика упругого рассеяния. Предположим, что при $t \to -\infty$ скорости бесструктурных частиц равны $\mathbf{v}_1^{\text{in}}$, $\mathbf{v}_2^{\text{in}}$. Это означает, что при $t = -\infty$ траектории частиц приближаются к прямым линиям. В терминах переменной $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ при $t \to -\infty$ радиус-вектор μ-точки асимптотически приближается к функции $\mathbf{r}^{\text{in}} = \mathbf{b} + \mathbf{v}^{\text{in}} t$, где $\mathbf{b}\mathbf{v}^{\text{in}} = 0$, $\mathbf{v}^{\text{in}} = \mathbf{v}_2^{\text{in}} - \mathbf{v}_1^{\text{in}}$. Постоянный вектор $\mathbf{b}$ называют прицельным параметром. Величина b равна расстоянию между прямыми линиями, по которым двигались бы частицы в отсутствии взаимодействия. После столкновения при $t \to \infty$ скорости частиц равны $\mathbf{v}_1^{\text{out}}$ и $\mathbf{v}_2^{\text{out}}$. Это означает, что радиус-вектор $\mathbf{r}(t)$ асимптотически приближается к функции $\mathbf{r}^{\text{out}} = \mathbf{c} + \mathbf{v}^{\text{out}} t$. Траектории $\mathbf{r}^{\text{in}}(t)$ и $\mathbf{r}^{\text{out}}(t)$, являющиеся прямыми линиями, называются входящими и выходящими асимптотами. В случае упругого рассеяния величина относительной скорости в in- и out-состояниях сохраняется: $|\mathbf{v}^{\text{in}}| = |\mathbf{v}^{\text{out}}| = v$. Процесс упругого рассеяния можно представить как преобразование

$$\mathbf{v}^{\text{in}} \to \mathbf{v}^{\text{out}} = \mathbf{n}\, v\,, \tag{11.1}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор, определяющий кинематику рассеяния.