

Подставляя  $A_n(t)$ , находим

$$E_{1,2} = \frac{1}{2} E_0 (1 \mp \cos \omega_6 t), \quad E_0 = \frac{m\omega_0^2}{2} a^2, \quad \omega_6 = 2\omega_m = \frac{2\Omega^2}{\omega_0},$$

где  $\omega_6 = \omega_2 - \omega_1$  — частота биений. Диполи периодически обмениваются энергией с частотой биений.

**17.8. Нормальные координаты.** Найдем преобразование к новым переменным  $x \rightarrow z$ ,  $x_n = f_n(z)$ , в терминах которых лагранжиан является суммой квадратичных форм: каждая из них соответствует определенной моде. Из (17.26) следует, что искомая замена переменных должна иметь вид

$$x_n = \Delta_{n\nu} z_\nu. \quad (17.29)$$

Здесь  $\Delta_{n\nu}$  — матрица, столбцами которой являются собственные векторы:  $\Delta_{n\nu} = u_{n(\nu)}$ . В соответствии с (17.24), (17.25)

$$g_{mn} \Delta_{m\mu} \Delta_{n\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad k_{mn} \Delta_{m\mu} \Delta_{n\nu} = \omega_\mu^2 \delta_{\mu\nu}. \quad (17.30)$$

Подставляя (17.29) в (17.13) и учитывая (17.30), получим новый лагранжиан:

$$L(z, \dot{z}) = \frac{1}{2} g_{mn} \Delta_{m\mu} \Delta_{n\nu} \dot{z}_\mu \dot{z}_\nu - \frac{1}{2} k_{mn} \Delta_{m\mu} \Delta_{n\nu} z_\mu z_\nu = \frac{1}{2} (\dot{z}_\mu^2 - \omega_\mu^2 z_\mu^2). \quad (17.31)$$

Новые переменные  $z_\mu$  называют *нормальными координатами* или *коллективными переменными*. Они описывают движение системы как движение совокупности новых невзаимодействующих «осцилляторов», представляющих собой определенные пространственные структуры. Эта интерпретация нормальных мод приобретает глубокий смысл при квантовомеханическом подходе к исследованию многочастичных систем.

## Лекция 18. Вынужденные колебания

**18.1. Одномерные колебания.** Рассмотрим систему с одной степенью свободы, на которую действуют неоднородные переменные силы. В этом случае движение системы в окрестности положения устойчивого равновесия называют *вынужденными колебаниями*.

Потенциальная энергия взаимодействия системы с внешними телами  $U = U^{\text{ext}}(q, t)$  удовлетворяет условиям

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} U^{\text{ext}}(q, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} U^{\text{ext}}(q, t) = 0.$$

Лагранжиан системы во внешнем поле

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2} G(q) \dot{q}^2 - U(q) - U^{\text{ext}}(q, t). \quad (18.1)$$

Положение равновесия невозмущенной системы определяется уравнением  $\partial U/\partial q = 0$ . Пусть  $q = c$  — положение устойчивого равновесия. Полагая  $q = c + x$ , разложим  $U^{\text{ext}}(q, t)$  в ряд Тейлора:

$$U^{\text{ext}}(c + x, t) = U^{\text{ext}}(c, t) + x \left( \frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial q} \right)_c + \frac{x^2}{2!} \left( \frac{\partial^2 U^{\text{ext}}}{\partial q^2} \right)_c + \dots$$

В приближении однородного поля

$$U^{\text{ext}}(c + x, t) = -xF(t), \quad F(t) = - \left( \frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial q} \right)_c. \quad (18.2)$$

Используя обозначения, введенные в лекции 17, запишем лагранжиан, описывающий вынужденные линейные колебания рассматриваемой системы:

$$l(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 + xF(t). \quad (18.3)$$

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$m\ddot{x} + kx = F(t). \quad (18.4)$$

Рассматриваемая система по существу является открытой, так как обычно взаимодействует со средой — другой системой с весьма большим, практически бесконечным, числом степеней свободы. Ее называют термостатом. Если термостат находится в равновесном состоянии, то взаимодействие системы и термостата приводит к необратимым процессам. Часть мощности, передаваемой от внешнего источника, расходуется на увеличение полной энергии термостата. Имеется несколько подходов к описанию подобных ситуаций. Здесь мы учтем взаимодействие системы с термостатом введением в правую часть (18.4) диссипативной силы  $F_g = -m\gamma\dot{x}$ , где  $\gamma^{-1}$  — время релаксации свободной системы. Такой подход приводит к уравнению

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t). \quad (18.5)$$

Это уравнение может быть решено несколькими различными методами. Наибольший интерес представляет построение решения в терминах *функций Грина*, которые широко используются в последующих разделах курса теоретической физики — в квантовой механике, электродинамике, статистической физике и т. д.

**18.2. Запаздывающая функция Грина.** Двухвременная функция Грина  $G(t, t')$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 G}{dt^2} + \gamma \frac{dG}{dt} + \omega_0^2 G = \delta(t - t') \quad (18.6)$$

с начальными условиями

$$G(t = t' - 0, t') = 0, \quad \dot{G}(t = t' - 0, t') = 0.$$

Здесь введено обозначение  $f(t - 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t - \varepsilon)$ ,  $\delta(t)$  — дираковская дельта-функция.

Поскольку (18.6) является уравнением с постоянными коэффициентами, то функция Грина зависит только от разности аргументов  $t - t'$ . Подставляя в (18.6) фурье-разложения

$$G(t, t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} g(\omega) e^{-i\omega(t-t')}, \quad \delta(t - t') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')},$$

получим

$$g(\omega) = (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)^{-1} = -(\omega - \omega_1)^{-1}(\omega - \omega_2)^{-1},$$

$$\omega_{1,2} = -i\frac{\gamma}{2} \pm \Omega, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}. \quad (18.7)$$

Теперь  $G(t, t')$  можно вычислить с помощью теоремы о вычетах. Траектории полюсов  $\omega_{1,2}(\gamma)$  в комплексной плоскости  $\omega = \omega' + i\omega''$  показаны на рис. 18.1. Важно отметить, что полюсы всегда лежат в нижней полуплоскости [82]. Функция  $g(\omega)$  аналитична в верхней полуплоскости, по этой причине  $G(t, t')$  обращается в нуль при  $t < t'$ . Действительно, при  $t < t'$  реальная часть  $-i\omega(t - t')$ , равная  $\omega''(t - t')$ , отрицательна в верхней полуплоскости, где согласно лемме Жордана можно замкнуть контур интегрирования. Если  $t > t'$ , контур интегрирования замыкается в нижней полуплоскости. Тогда получаем

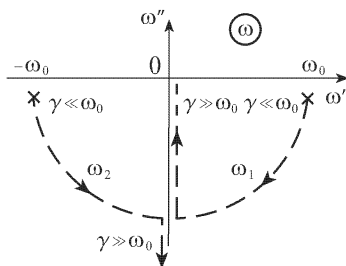


Рис. 18.1

$$\begin{aligned} G(t, t') &= -2\pi i \sum_{a=1,2} \operatorname{res} \frac{g(\omega_a)}{2\pi} e^{-i\omega_a(t-t')} = \\ &= i(\omega_1 - \omega_2)^{-1} [e^{-i\omega_1(t-t')} - e^{-i\omega_2(t-t')}]. \end{aligned}$$

Следовательно, в случае  $2\omega_0 > \gamma$

$$G(t, t') = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = \theta(t - t') D(t - t'), \quad (18.8)$$

$$D(\tau) = \frac{1}{\Omega} e^{-\gamma\tau/2} \sin \Omega\tau, \quad \theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases}$$

где  $\theta(\tau)$  — разрывная функция Хевисайда. Заметим, что функция  $D(t)$  удовлетворяет однородному уравнению с начальными условиями  $D(0) = 0$ ,  $\dot{D}(0) = 1$ .

Обратимся теперь к решению уравнения (18.5). Зададим начальные условия:  $x(t_0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$ . В момент времени  $t_e \geq t_0$  включается взаимодействие с внешним полем:  $F = 0$  при  $t < t_e$ ;  $F = F(t)$  при  $t \geq t_e$ . Общее решение (18.5) можно представить в виде

$$x(t) = \dot{D}(t - t_0)x_0 + \gamma D(t - t_0)x_0 + \\ + D(t - t_0)\dot{x}_0 + \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt'}{m} G(t - t')F(t'). \quad (18.9)$$

Результирующее движение представляет собой суперпозицию колебаний двух типов: свободных и вынужденных колебаний. При вычислении скорости  $\dot{x}$  следует учесть, что  $\dot{\theta}(t - t') = \delta(t - t')$ ,  $\dot{G}(t - t') = \theta(t - t')\dot{D}(t - t')$ .

Верхний предел интегрирования в (18.9), по существу, равен  $t$ . Это означает, что отклик системы в момент времени  $t$  зависит от значения силы  $F(t')$ , действующей в предшествующие моменты. Полученный результат согласуется с условием причинности: следствие не может предшествовать причине.

**18.3. Энергия, потребляемая системой.** Выберем начальные условия в виде  $x(t_0) = 0$ ,  $\dot{x}(t_0) = 0$ ,  $t_e = t_0$ . Мощность, потребляемая системой,

$$P(t) = F(t)\dot{x} = F(t) \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt'}{m} \dot{G}(t, t')F(t'). \quad (18.10)$$

Предположим, что взаимодействие с внешним полем «включается» в момент времени  $t_0 \rightarrow -\infty$ , и определим приращение полной энергии, обусловленное действием силы:

$$\Delta E = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} dt' \dot{G}(t, t')F(t)F(t'). \quad (18.11)$$

Если функция  $F(t)$  достаточно гладкая и интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} dt |F(t)|$  сходится,

то  $F(t)$  можно представить в виде интеграла Фурье:

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} F_{\omega} e^{-i\omega t}, \quad F_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dt F(t) e^{i\omega t}.$$

Вследствие вещественности функции  $F(t)$  очевидно, что  $F_{-\omega} = F_{\omega}^*$ .

Подставляя в (18.11) фурье-разложение функции Грина (18.8), получим

$$\Delta E = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi m} \omega g(\omega) F_{\omega}^* F_{\omega} = \frac{1}{2\pi i m} \int_0^{\infty} d\omega \omega [g(\omega) - g^*(\omega)] F_{\omega}^* F_{\omega}.$$

Учитывая (18.7), находим

$$\operatorname{Im} g(\omega) = \frac{\gamma\omega}{\Delta}, \quad \Delta = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2.$$

Таким образом, приращение энергии

$$\Delta E = \frac{1}{\pi m} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\gamma\omega^2 |F_{\omega}|^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \quad (18.12)$$

Если затухание отсутствует, то, используя соотношение [82]

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} = \pi\delta(\omega_0^2 - \omega^2),$$

получим приращение полной энергии:

$$\Delta E = \frac{|F_{\omega_0}|^2}{2m} = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt F(t) e^{i\omega_0 t} \right|^2. \quad (18.13)$$

Этот же результат справедлив и в том случае, когда ширина спектра внешней силы в (18.12) велика по сравнению с  $\gamma$ . Если ширина спектра существенно превышает величину  $\omega_0$ , т.е. время действия силы  $\tau \ll \omega_0^{-1}$ , то

$$\Delta E = \frac{I^2}{2m}, \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} dt F(t). \quad (18.14)$$

Для монохроматического поля  $F(t) = F_0 \cos \omega_e t$  приращение энергии (18.12) пропорционально времени взаимодействия  $2T$ , которое значительно превышает характерные времена  $\omega_e^{-1}$ ,  $\omega_0^{-1}$ ; поэтому можно считать,

что  $2T \rightarrow \infty$ . В этом случае следует перейти к определению среднего значения мощности, потребляемой системой [83]. Учитывая значение интеграла

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T dt \exp[-i(\omega_e - \omega)t] \right|^2 = 2\pi\delta(\omega - \omega_e),$$

получим из (18.12) среднюю мощность:

$$P_{\text{cp}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\Delta E}{2T} = \frac{F_0^2}{2m} \frac{\gamma\omega_e^2}{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + \gamma^2\omega_e^2}. \quad (18.15)$$

**Пример 18.1.** Сила, действующая на незатухающий осциллятор (рис. 18.2),

$$F(t) = F_0 [f(t + T/2) - f(t - T/2)], \quad f(t) = [1 + e^{(-t/\tau)}]^{-1}.$$

В момент времени  $t_0 \rightarrow -\infty$  осциллятор покоился в начале координат

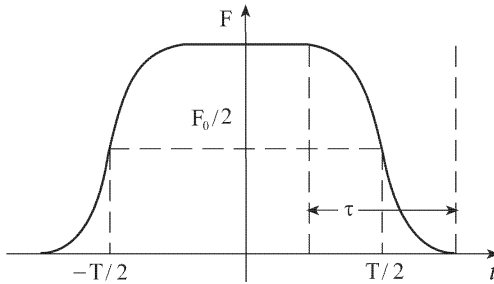


Рис. 18.2

в положении равновесия. Найдем приращение полной энергии в результате действия внешней силы. Учитывая значение интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} f(t+p) = i\pi\tau \frac{e^{-i\omega p}}{\text{sh}(\pi\omega\tau)},$$

получим

$$F_{\omega} = 2\pi\tau F_0 \frac{\sin(\omega T/2)}{\text{sh}(\pi\omega\tau)}, \quad \Delta E = \frac{2\pi^2\tau^2 F_0^2}{m} \left[ \frac{\sin(\omega_0 T/2)}{\text{sh}(\pi\omega_0\tau)} \right]^2.$$

Рассмотрим два частных случая.

1. *Плавный фронт импульса силы* ( $\omega_0 T \gg 1$ ). В этом случае передача энергии экспоненциально мала:

$$\Delta E \approx \frac{8\pi^2 \tau^2 F_0^2}{m} \sin^2 \frac{\omega_0 T}{2} e^{-2\pi\omega_0 \tau}.$$

2. *Импульс силы с крутым фронтом* ( $\omega_0 T \ll 1$ ). В этом случае  $f(t) \approx \theta(t)$ . Передача энергии

$$\Delta E \approx \frac{2}{m} \left( \frac{F_0}{\omega_0} \right)^2 \sin^2 \frac{\omega_0 T}{2}.$$

Если  $\omega_0 T \ll 1$ , то  $\Delta E \approx I_0^2/2m$ ,  $I_0 = F_0 T$ ,  $F(t) \approx I_0 \delta(t)$ .

**18.4. Резонанс. Переходный и установившийся режимы.** Выберем начальные условия в виде  $x(t_0) = 0$ ,  $\dot{x}(t_0) = 0$ ,  $t_0 < 0$ . Исследуем отклик системы (18.9) в случае внешней силы

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, t > T, \\ F_0 \cos \omega t, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

$T \gg \gamma^{-1}$ . Три первых слагаемых в (18.9) экспоненциально убывают со временем. Через промежуток времени  $|t - t_0| \gg \gamma^{-1}$  основной вклад дает последнее слагаемое. В интервале  $0 < t < T$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m\Omega} \operatorname{Re} e^{-i\omega t} \int_0^t dt' e^{-(\gamma/2)(t-t')} \sin \Omega(t-t') e^{i\omega(t-t')} = \\ &= \frac{F_0}{2m\Omega} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i(\omega-\omega_1)t} - 1}{\omega - \omega_1} - \frac{e^{i(\omega-\omega_2)t} - 1}{\omega - \omega_2} \right] e^{-i\omega t}. \end{aligned} \quad (18.16)$$

1. *Установившийся режим колебаний.* При  $\gamma^{-1} \lesssim t < T$  решение (18.16) представляет собой незатухающие колебания с частотой внешней силы:

$$x(t) = \frac{F_0}{m} \operatorname{Re} \frac{e^{-i\omega t}}{(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)} = \frac{F_0}{m} \operatorname{Re} g(\omega) e^{-i\omega t} \equiv C \cos(\omega t + \varphi), \quad (18.17)$$

$$C(\omega) = \frac{F_0}{m} |g(\omega)| = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\gamma\omega)^2}},$$

$$\cos \varphi = \operatorname{Re} \frac{g}{|g(\omega)|} = (\omega_0^2 - \omega^2) |g(\omega)|, \quad \sin \varphi = -\operatorname{Im} \frac{g}{|g(\omega)|} = -\gamma\omega |g(\omega)|.$$

Функцию  $C(\omega)$  называют *амплитудно-частотной характеристикой*, график функции  $C(\omega)$  — *резонансной кривой*. Функция  $C(\omega)$  достигает

максимума при резонансной частоте  $\omega = \omega_m$ ,

$$\omega_m = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} < \omega_0, \quad C(\omega_m) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_m}.$$

На рис. 18.3 изображены графики функций  $C(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ .

Наибольший интерес представляют колебания с малым затуханием, когда  $\gamma \ll \omega_0$ . В этом случае  $\omega_m \simeq \omega_0$ . Шириной резонансной кривой называют интервал частот  $|\omega - \omega_0|$ , в пределах которого значение амплитуды не опускается ниже величины  $(1/\sqrt{2})C(\omega_m)$ :

$$G(\omega_0 + \Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} C(\omega_0).$$

Учитывая, что  $\omega^2 - \omega_0^2 \simeq 2\omega_0 \Delta\omega$ , находим  $|\Delta\omega| = \gamma$ .

При  $\omega \ll \omega_0$   $C(\omega) \simeq (\gamma/\omega_0)C(\omega_m) \ll C(\omega_m)$ . Еще слабее отклик системы при значениях частоты  $\omega \gg \omega_m$ :  $C(\omega) \simeq (\gamma\omega_0/\omega^2)C(\omega_m) \ll C(\omega_m)$ .

При частотах  $\omega = \omega_0 + \varepsilon$ , близких к собственной частоте  $\omega_0$ , для которых  $\omega + \omega_0 \approx 2\omega_0$ , резонансную кривую можно представить в виде

$$C(\omega) = \frac{C(\omega_0)}{\sqrt{1 + (2Q\varepsilon/\omega_0)^2}}.$$

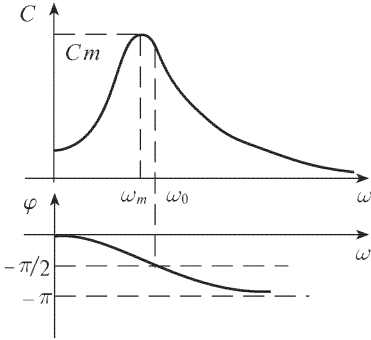


Рис. 18.3

Резонансом (от лат. *resonans* — отзываются) называется избирательный отклик колебательной системы на периодическое воздействие внешней силы с частотой, близкой к собственной частоте.

Открытые в последнее время новые резонансные явления в механических, гидродинамических, атомных и ядерных системах играют исключительную роль в современных теоретических и экспериментальных исследованиях.

Умножая (18.5) на  $m\dot{x}$ , получим закон изменения полной энергии:

$$\frac{dE}{dt} = -m\gamma\dot{x}^2 + F(t)\dot{x}, \quad E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}.$$

В установившемся режиме сумма средних значений мощности внешней силы

$$\langle P^{\text{ext}} \rangle = \langle F\dot{x} \rangle = -\frac{1}{2} F_0 \omega C \sin \varphi$$



и мощности сил трения

$$\langle P^{\text{тр}} \rangle = -m\gamma \langle \dot{x}^2 \rangle = -\frac{m}{2} \gamma \omega^2 C^2$$

равна нулю. Вследствие этого среднее значение полной энергии поддерживается на постоянном уровне:  $\langle E \rangle = (m/4) C^2 (\omega_0^2 + \omega^2)$ .

**Пример 18.2.** Изложим общий метод вычисления интеграла в решении (18.9) в случае установившегося режима колебаний. Пусть  $F(t) = f(t) \cos \omega t$ . «Амплитуда» силы удовлетворяет условию  $|df/dt| \ll \omega|f|$ .

Переходя к новой переменной  $\tau = t - t'$ , получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re} \frac{1}{m} \int_{t_0}^{\infty} dt' G(t-t') f(t') e^{-i\omega t'} = \\ &= \text{Re} \frac{e^{-i\omega t}}{m} \int_{-\infty}^{t-t_0} d\tau G(\tau) f(t-\tau) e^{i\omega\tau}. \end{aligned}$$

Поскольку в интервале  $0 < t < T$  величина  $t - t_0 \gg \gamma^{-1}$ , то верхний предел можно положить равным  $+\infty$  и учесть, что основной вклад в интеграл дают значения  $\omega\tau \ll 1$ . В результате получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \text{Re} \frac{e^{-i\omega t}}{m} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau G(\tau) e^{i\omega\tau} [f(t) - \tau \dot{f} + \dots] = \\ &= \text{Re} \frac{e^{-i\omega t}}{m} \left[ g(\omega) f + i \left( \frac{dg}{d\omega} \right) \dot{f} + \dots \right] = C(t) \cos [\omega t + \varphi(t)] + \dots \end{aligned}$$

Функции  $C(t)$  и  $\varphi(t)$  определены соотношениями (18.17), в которых следует произвести замену  $F_0 \rightarrow f(t)$ .

2. *Переходный режим.* Пусть  $\gamma \ll \omega_0$ ,  $\Omega \simeq \omega_0$ . Исследуем поведение  $x(t)$  в том случае, когда  $\omega$  находится в окрестности резонансной частоты:  $\omega = \omega_0 + \varepsilon$ ,  $|\varepsilon| \ll \omega_0$ . Тогда в интервале  $0 \leq t < T$  основной вклад в (18.16) дает первый член:

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{F_0}{2m\omega_0} \text{Re} \frac{1 - e^{-\gamma t/2 + i\varepsilon t}}{\varepsilon + i\gamma/2} e^{-i\omega t} \equiv A(t) \cos(\omega t + \alpha(t)), \\ A(t) &= \frac{F_0}{2m\omega_0} \left[ \frac{1 - 2e^{-\gamma t/2} \cos \varepsilon t + e^{-\gamma t}}{\varepsilon^2 + (\gamma/2)^2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом приближении  $|dA/dt| \ll \omega A$ ,  $|d\alpha/dt| \ll \omega|\alpha|$  — приращения функций  $A(t)$  и  $\alpha(t)$  за период  $2\pi/\omega$  достаточно малы. В этом случае решение уравнения (18.5) является квазипериодической функцией

с адиабатически медленно изменяющимися «амплитудой»  $A(t)$  и «фазой»  $\alpha(t)$ . Это представление, как говорят физики-теоретики, — аналог

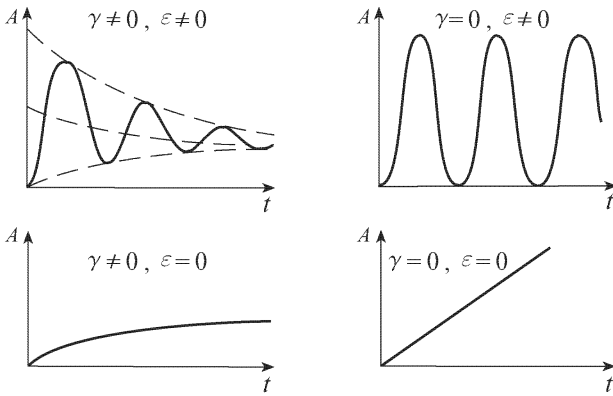


Рис. 18.4

«слегка искривленной» прямой линии. На рис. 18.4 изображены графики  $A(t)$  при различных значениях  $\varepsilon$  и  $\gamma$ . Исследуем три частных случая:

1)  $\gamma = 0, \varepsilon \neq 0$ . Тогда

$$A(t) = \frac{F_0}{m\omega_0|\varepsilon|} \left| \sin \frac{\varepsilon t}{2} \right|;$$

2)  $\gamma \neq 0, \varepsilon = 0$ ;

$$A(t) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0} (1 - e^{-\gamma t/2});$$

3)  $\gamma = 0, \varepsilon = 0$ ;

$$A(t) = \frac{F_0 t}{2m\omega_0}.$$

Область  $t \geq T$ . Интегрируя (18.9) в пределах  $0 \leq t \leq T$ , получим затухающие колебания:

$$\begin{aligned} x(t) &= \dot{D}(t-T)x(T) + \gamma D(t-T)x(T) + D(t-T)\dot{x}(T) \approx \\ &\approx e^{-\gamma(t-T)/2} A(T) \cos[\omega_0 t + \alpha(T)]. \end{aligned}$$

**18.5. Колебания связанных систем.** Рассмотрим консервативную систему с  $s$  степенями свободы, взаимодействующую с внешним полем. Лагранжиан свободной системы имеет вид (17.13). Очевидно, что в приближении однородного поля потенциальная энергия взаимодействия системы с внешним полем

$$U^{\text{ext}}(c + x, t) = -x_n F_n(t), \quad F_n = - \left( \frac{\partial U^{\text{ext}}}{\partial q_n} \right)_c.$$

Аналогично (18.3) получим лагранжиан системы:

$$l(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2} g_{in} \dot{x}_i \dot{x}_n - \frac{1}{2} k_{in} x_i x_n + x_i F_i(t). \quad (18.18)$$

Взаимодействие с термостатом приводит в линейном приближении к появлению сил трения. Эти силы можно представить в виде производной от квадратичной формы:

$$F_{\text{тр}i}(t) = - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i}, \quad R = \frac{1}{2} \gamma_{in} \dot{x}_i \dot{x}_n, \quad (18.19)$$

называемой диссипативной функцией Рэля [73]. Матрица коэффициентов симметрична:  $\gamma_{mn} = \gamma_{nm}$ .

Уравнения движения имеют вид

$$g_{mn} \ddot{x}_n + k_{mn} x_n = F_m - \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_m}. \quad (18.20)$$

Очевидно, что для определения вынужденных колебаний необходимо перейти к нормальным координатам. В соответствии с (17.29), (17.30)  $x_i = \Delta_{i\alpha} z_\alpha$ ,

$$L(z, \dot{z}, t) = \frac{1}{2} (\dot{z}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 z_\alpha^2) + z_\alpha f_\alpha(t), \quad (18.21)$$

где  $f_\alpha(t) = F_i \Delta_{i\alpha}$ . В новых переменных диссипативная функция

$$r(\dot{z}) = \frac{1}{2} \overline{\gamma}_{\alpha\beta} \dot{z}_\alpha \dot{z}_\beta, \quad \overline{\gamma}_{\alpha\beta} = \gamma_{in} \Delta_{i\alpha} \Delta_{n\beta}.$$

Уравнения Лагранжа имеют вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_\mu} - \frac{\partial L}{\partial z_\mu} = - \frac{\partial r}{\partial \dot{z}_\mu} \rightarrow \ddot{z}_\mu + \omega_\mu^2 z_\mu = f_\mu - \overline{\gamma}_{\mu\beta} \dot{z}_\beta.$$

В частном случае  $\gamma_{mn} = \gamma_{mnm}$ ,  $\overline{\gamma}_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}$ ,

$$\ddot{z}_\mu + \gamma \dot{z}_\mu + \omega_\mu^2 z_\mu = f_\mu(t), \quad \mu = 1, \dots, s. \quad (18.22)$$

Это уравнение совпадает с (18.5). Функция Грина уравнения (18.22)

$$G_\alpha(t, t') = \theta(t - t') D_\alpha(t - t'), \quad D_\alpha(\tau) = \frac{e^{-\gamma\tau/2}}{\Omega_\alpha} \sin \Omega_\alpha \tau,$$

$\Omega_\alpha = \sqrt{\omega_\alpha^2 - (\gamma/2)^2}$ . Решение уравнения (18.22)

$$z_\mu(t) = a_\mu e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_\mu t + \alpha_\mu) + \int_{t_0}^t dt' G_\mu(t-t') f_\mu(t').$$

Амплитуда и фаза определяются начальными условиями  $z_\mu(t_0)$ ,  $\dot{z}_\mu(t_0)$ , ( $z_\mu = g_{mn} \Delta_{m\mu} x_n$ ). Таким образом, решение уравнения (18.20)

$$x_m(t) = e^{-\gamma t/2} \Delta_{m\mu} a_\mu \cos(\omega_\mu t + \alpha_\mu) + \int_{t_0}^{\infty} dt' \Delta_{m\mu} \Delta_{n\mu} G_\mu(t-t') F_n(t'). \quad (18.23)$$

Вклад каждой моды зависит от соотношений между компонентами силы  $F_n(t)$  [84].

Пример 18.2. Лагранжиан двумерной системы

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2} \dot{x}_i^2 - \frac{m}{2} U_{in} x_i x_n + x_2 F(t),$$

$$U_{11} = U_{22} = \omega_0^2, \quad U_{12} = U_{21} = -4\Omega^2,$$

$F(t) = F_0 \cos \omega t$ ,  $t \geq 0$ . Найдем решение уравнений движения в установившемся режиме.

Из уравнения  $(-\lambda^2 \delta_{mn} + U_{mn}) u_n = 0$  получим собственные частоты  $\lambda_{2,1}^2 = \omega_0^2 \pm 2\Omega^2$ , собственные векторы и матрицу  $\Delta_{m\mu} = u_{m(\mu)}$ :

$$u_{m(1)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_{m(2)} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{m\mu} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В установившемся режиме  $t - t_0 \gg \gamma^{-1}$ . Произведем в интеграле (18.23) замену  $t - t' = \tau$  и заменим предел интегрирования  $t - t_0$  на  $\infty$ . В результате находим

$$x_m(t) \simeq \text{Re } F_0 e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \Delta_{m\mu} \Delta_{2\mu} G_\mu(\tau) e^{i\omega\tau}.$$

Следовательно,

$$x_1(t) = \frac{F_0}{2m} \text{Re} \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{(\lambda_1^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)(\lambda_2^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} e^{-i\omega t} \equiv C_1 \cos(\omega t + \gamma_1),$$

$$x_2(t) = \frac{F_0}{2m} \text{Re} \frac{\lambda_2^2 + \lambda_1^2 - 2\omega^2 - 2i\gamma\omega}{(\lambda_1^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)(\lambda_2^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)} e^{-i\omega t} \equiv C_2 \cos(\omega t + \gamma_2).$$

Амплитуды колебаний  $C_1(\omega)$  и  $C_2(\omega)$  определяют две резонансные кривые. Отношение амплитуд

$$\frac{C_1(\omega)}{C_2(\omega)} = \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{[(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - 2\omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2]^{1/2}}.$$

Если  $\omega \gg \lambda_2$ , то  $C_1/C_2 \ll 1$ . Для частот  $\omega \ll \lambda_1$  отношение  $C_1/C_2 < 1$ ; для частот  $\omega$ , находящихся в пределах  $\lambda_1 < \omega < \lambda_2$ , величина  $C_1/C_2 \lesssim 1$ . Мы имеем полосовой фильтр, ослабляющий влияние внешней силы частотой  $\omega$ , лежащей вне интервала  $(\lambda_1, \lambda_2)$  [81].

## Лекция 19. Общие свойства нелинейных систем

**19.1. Нелинейные системы.** Большинство задач теоретической и математической физики приводят к нелинейным уравнениям [85–93]. Консервативные системы с одной степенью свободы всегда интегрируемы. В предыдущих лекциях мы получили решения одномерных нелинейных систем частицы в поле Экарта (см. лекцию 5) и математического маятника (см. лекцию 14), которые демонстрируют типичные свойства нелинейных колебаний: 1) периодическое решение, разложенное в ряд Фурье, содержит бесконечное число гармоник основной частоты, 2) период колебаний зависит от полной энергии.

Системы с несколькими степенями свободы, как правило, неинтегрируемы. Исключение составляют системы, обладающие определенными симметриями, с каждой из которых связан первый интеграл. Это обстоятельство позволило, например, найти решение задачи Кеплера (см. лекцию 6). Однако в настоящее время нет общих методов, позволяющих найти первые интегралы; не существует и общего метода интегрирования нелинейных систем. Любопытно отметить, что известны случаи, когда удалось догадаться о существовании скрытого интеграла при помощи численного эксперимента. Более того, использование ЭВМ в значительной мере способствовало пониманию характерных особенностей поведения существенно нелинейных систем [93].

Тема настоящей лекции — введение в качественную теорию дифференциальных уравнений. В 1882 г. А. Пуанкаре развил новое представление о том, что значит решить дифференциальное уравнение [94]. Он писал: «... именно с качественной стороны должна начинаться теория всякой функции, и вот почему в первую очередь возникает следующая задача: построить кривые, определяемые дифференциальным уравнением. Это качественное изучение; когда оно будет проделано полностью, то принесет самую большую пользу численному анализу функций. Впрочем, это качественное изучение и само по себе будет иметь первостепенный интерес. Различные и чрезвычайно важные вопросы анализа и механики могут быть сведены к нему».