Лекция 12

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОНЯТИЯ ПОДГРУППЫ ГРУППЫ ЛИ.— ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП ЛИ.— ЗАМКНУТЫЕ ПОДГРУППЫ ГРУПП ЛИ. — АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ. — ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ АЛГЕБР.— ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ГРУПП ЛИ.—ИДЕАЛЫ И ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДГРУППЫ.—ФАКТОРМНОГООБРАЗИЯ ГРУПП ЛИ.— ФАКТОРГРУППЫ ГРУПП ЛИ.— ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ГРУПП.— ОДНОСВЯЗНОСТЬ ГРУПП $\mathrm{SU}(n)$ И $\mathrm{Sp}(n)$. — ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА ГРУППЫ $\mathrm{U}(n)$.

Замечание 3 предыдущей лекции дает нам альтернативное определение понятия подгруппы группы Ли, формально более широкое. Оказывается, что условия, накладываемые на подгруппы групп Ли, можно ослаблять и в других направлениях.

Гладкое отображение $\Phi\colon N \to M$ называется *погружением* (или *иммерсией*), если для любой точки $a \in N$ линейное отображение

$$(d\Phi)_a\colon \mathsf{T}_a(N) \to \mathsf{T}_{\Phi a}(M)$$

является мономорфизмом (инъективно).

Предложение 1. *Любой мономорфизм $\Phi\colon H \to G$ групп Ли является погружением.*

Доказательство. Рассмотрим экспоненциальное отображение

$$\exp\colon \mathfrak{l}(G) \to G.$$

В интерпретации элементов алгебры $\mathfrak{l}(G)$ как однопараметрических подгрупп это отображение определяется формулой

$$\exp \beta = \beta(1).$$

Поскольку $\mathfrak{l}(\Phi)\beta = \Phi \circ \beta$ (предложение 5 лекции 2), отсюда следует, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{l}(H) \arrow[r, "\mathfrak{l}(\Phi)"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathfrak{l}(G) \arrow[d, "\exp"] \\ H \arrow[r, "\Phi"'] & G \end{tikzcd}$$

Если линейное отображение $\mathfrak{l}(\Phi) = (d\Phi)_e$ не инъективно, то в нормальной окрестности нуля алгебры $\mathfrak{l}(H) = \mathsf{T}_e(H)$ существует отличный от нуля вектор A, принадлежащий ядру отображения $\mathfrak{l}(\Phi)$, т. е. такой, что $\mathfrak{l}(\Phi)A = 0$. Но тогда

$$(\Phi \circ \exp) A = (\exp \circ \mathfrak{l}(\Phi)) A = \exp 0 = e,$$

и, следовательно, $\exp A = e$ (в силу инъективности отображения Φ). Поскольку это невозможно (на нормальной окрестности отображение $\exp$ является диффеоморфизмом), тем самым доказано, что отображение $(d\Phi)_e$ мономорфно.

С другой стороны, тот факт, что отображение Φ представляет собой гомоморфизм, означает, что для любого элемента $a \in H$ имеет место равенство

$$\Phi \circ L_a = L_{\Phi a} \circ \Phi.$$

Для дифференциалов это означает, что имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathsf{T}_e(H) \arrow[r, "(dL_a)_e"] \arrow[d, "(d\Phi)_e"'] & \mathsf{T}_a(H) \arrow[d, "(d\Phi)_a"] \\ \mathsf{T}_e(G) \arrow[r, "(dL_{\Phi a})_e"'] & \mathsf{T}_{\Phi a}(G) \end{tikzcd}$$

из которой следует (поскольку горизонтальные стрелки этой диаграммы являются изоморфизмами), что отображение $(d\Phi)_a$ также мономорфно. □

Следствие. *Группа Ли H, для которой H_{abstr} является подмножеством в G_{abstr}, а отображение вложения $\iota\colon H \to G$ представляет собой гомоморфизм групп Ли, является подгруппой группы Ли G.*

Доказательство. Согласно предложению 1 отображение ι является погружением, а это и означает, что H есть подгруппа группы Ли G. $\square$

В силу этого следствия, *введенные определением* 1 *лекции* 3 *матричные группы Ли являются не чем иным, как подгруппами группы Ли* $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$.

Конечно, наибольший интерес представляют подгруппы H группы Ли G, топология которых индуцирована топологией группы G, т. е. для которых топологическая группа H_{top} является подгруппой топологической группы G_{top}. Мы будем называть такие подгруппы *топологическими подгруппами* групп Ли.

Напомним, что подмножество A топологического пространства X называется *локально замкнутым*, если любая точка $a \in A$ обладает в X такой окрестностью U, что пересечение $A \cap U$ замкнуто в U. Мы уже встречались с этим понятием в лекции 7 применительно к подгрупускулам.

Нам понадобится следующая лемма из теории топологических групп:

Лемма 1. *Любая локально замкнутая подгруппа H топологической группы G замкнута.*

Доказательство. Пусть U — такая окрестность точки e, что $H \cap U$ замкнуто в U. Ясно, что без ограничения общности можно считать, что $U^{-1} = U$. Рассмотрим произвольную точку $x \in \overline{H}$. Тогда $xU \cap H \neq \varnothing$. Пусть $y \in xU \cap H$. Так как левый сдвиг $L_y\colon a \mapsto ya$ является гомеоморфизмом, то множество $y(U \cap H)$ замкнуто в yU. Но так как $y \in H$, то $y(U \cap H) = yU \cap H$. Следовательно, $yU \cap H$ замкнуто в yU, т. е. $\overline{yU \cap H} \cap yU = yU \cap H$. С другой стороны, $x \in yU^{-1} = yU$, и потому $x \in yU \cap \overline{H} \subset \overline{yU \cap H}$. Следовательно, $x \in yU \cap H$ и, значит, $x \in H$. $\square$

Подгруппу H группы Ли G мы будем называть *замкнутой*, если множество ее точек является замкнутым подмножеством в G.

Заметим, что в этом определении топология самой подгруппы H никак не фигурирует. Тем не менее оказывается, что условие замкнутости однозначно эту топологию фиксирует:

Предложение 2. Подгруппа H группы Ли G тогда и только тогда замкнута, когда ее топология индуцирована топологией группы G, т. е. когда она является топологической подгруппой.

Доказательство. В силу леммы 1 мы докажем достаточность этого условия, если установим, что *каждое подмногообразие N, топология которого индуцирована топологией объемлющего многообразия M, локально замкнуто.* Но это почти очевидно. Действительно, любая точка такого подмногообразия обладает в M окрестностью U, которая пересекается с N по некоторому плоскому подмногообразию V в U. С другой стороны, ясно, что любое плоское подмногообразие локально замкнуто.

Для доказательства необходимости мы воспользуемся тем, что каждая замкнутая подгруппа H группы Ли G является локально выпрямляемым подмногообразием со счетной базой. Поэтому в G существует такая окрестность U единицы e, что пересечение $U \cap H$ является объединением счетного числа плоских подмногообразий V_ξ, $\xi \in \Xi \subset \mathbb{R}^{n-m}$. При этом, так как подгруппа H замкнута, то множество Ξ (являющееся образом множества $U \cap H$ при непрерывном отображении, определенном формулой (2) предыдущей лекции) локально замкнуто. Следовательно, будучи счетным, оно имеет хотя бы одну изолированную точку ξ_0. Соответствующее плоское подмногообразие V_{ξ_0} обладает тем свойством, что любая его точка a имеет в U такую окрестность U_a, что пересечение $U_a \cap H$ лежит в V_{ξ_0} и, значит, является окрестностью точки a в H. Это означает, что точка a обладает в U (и, значит, в G) фундаментальной системой окрестностей, высекающей на H фундаментальную систему окрестностей точки a в H. Применив левый сдвиг $L_{ba^{-1}}$, мы получим, что это свойство имеет место и для любой точки $b \in H$. Но тогда топология в H и будет, по определению, индуцироваться топологией объемлющего пространства G. □

В силу следствия леммы 1 предыдущей лекции (или, если хотите, в силу следствия предложения 3 лекции 4) из предложения 1 вытекает, что *на каждой замкнутой подгруппе H группы Ли G ее структура гладкого многообразия единственна.*

Удивительно, что уже одного условия замкнутости достаточно, чтобы на H существовала гладкость, по отношению к которой она является группой Ли и подгруппой группы Ли G:

Теорема 1 (Картан). *Если замкнутое подмножество H группы Ли G является подгруппой группы G_{abstr}, то в H существует единственная гладкость (согласованная с индуцированной на H топологией), по отношению к которой H является подгруппой группы Ли G (и, в частности, группой Ли).*

Доказательство. Каждая группа Ли G одновременно является и групускулой Ли. Так как H замкнута, то для любой окрестности U точки e в групускуле G пересечение $U \cap H$ замкнуто в U. Следовательно, H является подгрупускулой групускулы Ли G (см. определение 1 лекции 7). Поэтому, согласно теореме Картана для групускул (предложение 1 лекции 7), групускула H локально плоска, т. е., другими словами, ее пересечение $U \cap H$ с некоторой картой U в точке e является плоским подмногообразием этой карты, имеющим вид $\exp \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ — некоторая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$. Это означает, что H локально совпадает в e со связной подгруппой $G(\mathfrak{h})$ группы Ли G. Поскольку любая окрестность связной топологической группы порождает всю группу (лемма 3 лекции 9), этим доказано, что группа $G(\mathfrak{h})$ (точнее, группа $G(\mathfrak{h})_{\text{abstr}}$, снабженная индуцированной топологией) совпадает с компонентой единицы H_e группы H. Это вводит в группу H_e, а значит, и во всю группу H гладкость, относительно которой эта группа является подгруппой группы Ли G.

Единственность этой гладкости обеспечивается, согласно сделанному выше замечанию, замкнутостью подгруппы H. □

Заметим, что в силу замкнутости подгруппа H группы Ли G будет ее топологической подгруппой.

Теорема 1 является сильнейшим орудием для установления лиевости конкретных топологических групп.

Пример. Подгруппа группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ (или группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$) называется *алгебраической группой*, если она представляет собой пересечение группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{R})$ (группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$) с алгебраическим многообразием в пространстве $\mathbb{R}(n) = \mathbb{R}^{n^2}$ (соответственно в пространстве $\mathbb{C}(n) = \mathbb{C}^{n^2}$), т. е. с множеством общих нулей некоторой системы многочленов от n^2 неизвестных.

Поскольку любое алгебраическое многообразие, очевидно, замкнуто, мы получаем в силу теоремы 1, что *каждая алгебраическая группа является матричной группой Ли.*

Это немедленно доказывает лиевость всех групп, рассмотренных в лекции 1 ($\mathrm{SL}(n), \mathrm{O}(n), \mathrm{Sp}(n), \mathrm{U}(n)$ и т. п.; заметим, что группу $\mathrm{U}(n)$ следует при этом трактовать не как подгруппу группы $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$, а в силу вложения $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(2n; \mathbb{R})$ как подгруппу группы $\mathrm{GL}(2n; \mathbb{R})$).

Пусть $\mathscr{A}$ — произвольная конечномерная алгебра над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (вообще говоря, не ассоциативная и не лиева), и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ее базис. Ясно, что обратимое линейное отображение $\Phi\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ тогда и только тогда является автоморфизмом алгебры $\mathscr{A}$, когда $\Phi(e_ie_j) = \Phi(e_i)\Phi(e_j)$ для любых $i, j = 1, \ldots, n$. Следовательно, если $\Phi(e_i) = x_i^j e_j$ и $e_ie_j = c_{ij}^k e_k$ и, значит,

$$\Phi(e_ie_j) = \Phi(c_{ij}^k e_k) = c_{ij}^k x_k^l e_l,$$
$$\Phi(e_i)\Phi(e_j) = (x_i^p e_p)(x_j^q e_q) = c_{pq}^l x_i^p x_j^q e_l,$$

то Φ тогда и только тогда является автоморфизмом, когда

$$c_{ij}^k x_k^l = c_{pq}^l x_i^p x_j^q$$

для любых $i, j, l = 1, \ldots, n$. Это означает, что матрицы (x_i^j), соответствующие автоморфизмам алгебры $\mathscr{A}$, составляют алгебраическую и, значит, гладкую группу. Таким образом, задание базиса $e_1, \ldots, e_n$ определяет изоморфизм группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$ алгебры $\mathscr{A}$ на некоторую матричную алгебраическую группу Ли. Перенесенная в $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$ с помощью этого изоморфизма структура группы Ли не зависит, очевидно, от выбора базиса $e_1, \ldots, e_n$. Таким образом, *группа* $\mathrm{Aut}\,\mathscr{A}$ *автоморфизмов произвольной конечномерной алгебры* $\mathscr{A}$ *является группой Ли.*

Найдем алгебру Ли этой группы.

Предложение 2. *Алгеброй Ли группы* Aut $\mathscr{A}$ *является алгебра Ли* Der $\mathscr{A}$ *всех дифференцирований алгебры* $\mathscr{A}$:

$$\mathfrak{l}(\operatorname{Aut}\mathscr{A}) = \operatorname{Der}\mathscr{A}.$$

Доказательство. Выбрав в $\mathscr{A}$ произвольный базис, мы можем считать группу Aut $\mathscr{A}$ и алгебру Ли Der $\mathscr{A}$ состоящими из матриц.

Пусть $D \in \operatorname{Der}\mathscr{A}$. Тогда для любых элементов $x, y \in \mathscr{A}$ и любого $p \geqslant 0$ будет иметь место равенство

$$D^p(xy) = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} D^i x \cdot D^{p-i} y \quad \text{(формула Лейбница)},$$

а значит, и равенство

$$\begin{aligned}
(e^{tD})(xy) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{t^p}{p!} D^p(xy) = \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{p} \frac{1}{p!} \binom{p}{i} t^p \cdot D^i x \cdot D^{p-i} y = \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^{i+j}}{i!\,j!} D^i x \cdot D^j y = \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} D^i x\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} D^j x\right) = e^{tD}x \cdot e^{tD}y
\end{aligned}$$

(сходимость всех рядов обеспечивается стандартными вычислениями с матричными нормами). Это означает, что $e^{tD} \in \operatorname{Aut}\mathscr{A}$ и, значит, что $D \in \mathfrak{l}(\operatorname{Aut}\mathscr{A})$.

Обратно, пусть $D \in \mathfrak{l}(\operatorname{Aut}\mathscr{A})$, т. е. $e^{tD} \in \operatorname{Aut}\mathscr{A}$. Тогда

$$\begin{aligned}
(e^{tD} - E)(xy) &= e^{tD}x \cdot e^{tD}y - x \cdot y = \\
&= (e^{tD}x - x)\, e^{tD}y + x\,(e^{tD}y - y),
\end{aligned}$$

и потому

$$D(xy)=\lim_{t\to 0}\frac{(e^{tD}-E)(xy)}{t}=$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^{tD}x-x}{t}e^{tD}y+\lim_{t\to 0}x\frac{e^{tD}y-y}{t}=$$
$$=Dx\cdot y+x\cdot Dy.$$

Следовательно, $D\in \operatorname{Der}\mathscr{A}$. $\square$

Пусть, в частности, $\mathscr{A}$ является алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ односвязной группы Ли G. Поскольку на категории односвязных групп Ли функтор Ли вполне унивалентен (см. лекцию 10), любой автоморфизм $\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ реализуется некоторым автоморфизмом $G\to G$ группы Ли G. Это показывает, что *группа автоморфизмов* $\operatorname{Aut} G$ *односвязной группы Ли* G *изоморфна группе автоморфизмов* $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ *ее алгебры Ли*:

$$\operatorname{Aut} G\approx\operatorname{Aut}\mathfrak{g}.$$

Перенеся посредством этого изоморфизма гладкость из $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$ в $\operatorname{Aut} G$, мы определим $\operatorname{Aut} G$ как группу Ли. При этом в силу сказанного выше *алгеброй Ли группы Ли* $\operatorname{Aut} G$ *будет алгебра Ли* $\operatorname{Der}\mathfrak{g}$:

$$\mathfrak{l}(\operatorname{Aut} G)=\operatorname{Der}\mathfrak{l}(G).$$

Чтобы получить аналогичный результат для произвольной связной группы Ли G, рассмотрим ее универсальную накрывающую группу $\widetilde{G}$. Мы знаем (см. лекцию 9), что $\widetilde{G}$ функториально зависит от G, и потому любой автоморфизм $\Phi\colon G\to G$ единственным образом определяет некоторый автоморфизм $\widetilde{\Phi}\colon\widetilde{G}\to\widetilde{G}$, для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G} \arrow[r, "\widetilde{\Phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "\pi"] \\
G \arrow[r, "\Phi"'] & G
\end{tikzcd}$$

Тем самым определяется (очевидно, мономорфное) отображение

$$\operatorname{Aut} G\to\operatorname{Aut}\widetilde{G}.$$

Образ этого мономорфизма состоит из автоморфизмов $\Psi\colon \tilde{G} \to \tilde{G}$, для которых из равенства $\pi(a) = \pi(b)$ следует равенство $\pi\Psi(a) = \pi\Psi(b)$. Это условие в точности равносильно требованию, чтобы автоморфизм Ψ переводил в себя ядро $K = \operatorname{Ker} \pi$ накрытия π. Поэтому множество всех таких автоморфизмов замкнуто и потому (теорема 1) является подгруппой группы Ли $\operatorname{Aut} \tilde{G}$ и, значит, группой Ли. Перенеся эту структуру группы Ли в группу $\operatorname{Aut} G$, мы определим последнюю группу как группу Ли.

Тем самым доказано, что *группа автоморфизмов произвольной связной группы Ли является группой Ли.*

Вернемся теперь к общим группам Ли и их замкнутым подгруппам. Так как по алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ односвязная группа Ли G восстанавливается однозначно, то все подалгеры $\mathfrak{h}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ корректно распределяются по двум классам: подалгебрам одного класса соответствуют замкнутые подгруппы односвязной группы Ли G, а подалгебрам другого — незамкнутые. Тем самым возникает вопрос о внутренней алгебраической характеризации подалгебр этих классов или, что равносильно, соответствующих подгрупп. Мы не будем заниматься этим вопросом в полной общности и ограничимся следующим, — пожалуй, наиболее интересным и неожиданным — результатом:

Теорема 2. *Любая связная инвариантная подгруппа H односвязной группы Ли G замкнута.*

Докажем сначала предложение, характеризующее подалгебры Ли, отвечающие инвариантным подгруппам:

Предложение 3. *Алгебра Ли $\mathfrak{l}(H)$ каждой инвариантной подгруппы H произвольной группы Ли G является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{l}(G)$ группы G. Обратно, если подгруппа H связна и алгебра Ли $\mathfrak{l}(H)$ является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{l}(G)$, то подгруппа H инвариантна.*

Доказательство. Это предложение вполне аналогично предложению 2 лекции 7 и может быть доказано дословно так же. Однако чтобы не повторяться, мы дадим здесь другое доказательство, опирающееся на предложение 2 лекции 7.

Ясно, что в силу этого предложения достаточно доказать, что *связная подгруппа H группы Ли G тогда и толь-*

ко тогда инвариантна, когда произвольная окрестность V её единицы является инвариантной подгрупускулой группы G (рассматриваемой как групускула). Но, действительно, если H инвариантна, то V инвариантна по определению. Обратно, пусть V инвариантна, и пусть $g \in G$. Тогда в V существует такая окрестность единицы W, что $g^{-1}Wg \subset V$. Поскольку группа H связна, любой ее элемент a имеет вид $a_1a_2\dots a_k$, где $a_1, a_2, \dots, a_k \in W$. Поэтому

$$g^{-1}ag = g^{-1}a_1g \cdot g^{-1}a_2g \cdot \dots \cdot g^{-1}a_kg \in V \cdot V \cdot \dots \cdot V \subset H$$

и, значит, подгруппа H инвариантна. □

Заметим, что существуют несвязные неинвариантные подгруппы H, для которых подалгебра $\mathfrak{l}(H)$ является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{l}(G)$. Их компоненты единицы инвариантны.

Существенным дополнением к предложению 3 является следующее предложение:

Предложение 4. *Для любого гомоморфизма $\Phi\colon G \to H$ групп Ли его ядро $\operatorname{Ker}\Phi$ является подгруппой группы Ли G. Алгебра Ли $\mathfrak{l}(\operatorname{Ker}\Phi)$ совпадает с ядром $\operatorname{Ker}\mathfrak{l}(\Phi)$ индуцированного отображения $\mathfrak{l}(\Phi)\colon \mathfrak{l}(G) \to \mathfrak{l}(H)$ алгебр Ли:*

$$\mathfrak{l}(\operatorname{Ker}\Phi) = \operatorname{Ker}\mathfrak{l}(\Phi).$$

Доказательство. Поскольку ядро $\operatorname{Ker}\Phi$ замкнуто, первое утверждение следует из теоремы 1. Каждую однопараметрическую подгруппу $\beta\colon \mathbb{R} \to \operatorname{Ker}\Phi$ этого ядра гомоморфизм Φ переводит в постоянное отображение, т. е. в нуль алгебры $\mathfrak{l}(H)$. Следовательно, $\mathfrak{l}(\operatorname{Ker}\Phi) \subset \operatorname{Ker}\mathfrak{l}(\Phi)$. Обратно, если однопараметрическая подгруппа $\beta\colon \mathbb{R} \to G$ группы G лежит в ядре гомоморфизма $\mathfrak{l}(\Phi)$, то $\Phi \circ \beta = \mathrm{const}$, т. е. $\beta(t) \in \operatorname{Ker}\Phi$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и, значит, $\beta \in \mathfrak{l}(\operatorname{Ker}\Phi)$. Следовательно, $\operatorname{Ker}\mathfrak{l}(\Phi) \subset \mathfrak{l}(\operatorname{Ker}\Phi)$.

Теперь мы можем доказать и теорему 2.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}(H)$. Поскольку подгруппа H инвариантна, подалгебра $\mathfrak{h}$ является идеалом, и потому определена факторалгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Согласно теореме 1 лекции 10 (заметим, что эта теорема пока доказана у нас только по модулю теоремы Адо) существует односвязная группа Ли N с алгеброй Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Поскольку на категории односвязных групп Ли функтор Ли вполне унивалентен, существует гомоморфизм Φ: $G \to N$ групп Ли, реализующий естественный гомоморфизм φ: $\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, т. е. такой, что $\mathfrak{l}(\Phi) = \varphi$. Согласно предложению 4 ядро $\operatorname{Ker}\Phi$ этого гомоморфизма является замкнутой подгруппой с алгеброй Ли

$$\mathfrak{l}(\operatorname{Ker}\Phi) = \operatorname{Ker}\mathfrak{l}(\Phi) = \operatorname{Ker}\varphi = \mathfrak{h}.$$

Компонента единицы $(\operatorname{Ker}\Phi)_e$ этого ядра также замкнута и ее алгеброй Ли также является идеал $\mathfrak{h}$. Таким образом, мы имеем в группе Ли G две связные подгруппы H и $(\operatorname{Ker}\Phi)_e$ с одной и той же алгеброй Ли. Поэтому в силу теоремы 1 предыдущей лекции $H = (\operatorname{Ker}\Phi)_e$. Следовательно, подгруппа H замкнута. □

З а м е ч а н и е 1. Предложение 3 утверждает, что в соответствии Ли связные инвариантные подгруппы группы Ли G взаимно однозначно соответствуют идеалам алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Ясно при этом, что *если группа G является прямым произведением $A \times B$ инвариантных подгрупп A и B, то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ будет прямой суммой от $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ идеалов $\mathfrak{a} = \mathfrak{l}(A)$ и $\mathfrak{b} = \mathfrak{l}(B)$*. Однако обратное, вообще говоря, н е в е р н о даже для связных групп Ли G. Если $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ и A, B — такие инвариантные подгруппы связной группы G, что $\mathfrak{l}(A) = \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{l}(B) = \mathfrak{b}$, то группа G не обязана быть прямым произведением $A \times B$ групп A и B. Можно лишь утверждать, что группа G порождается группами A и B (поскольку любой элемент некоторой нормальной окрестности является, очевидно, произведением элементов групп A и B, а группа G, будучи связной, порождается этой окрестностью) и что пересечение $A \cap B$, являясь подгруппой группы Ли G с нулевой алгеброй Ли, будет нульмерной инвариантной подгруппой. В частности, если пересечение $A \cap B$ замкнуто (что в силу теоремы 2 всегда выполнено, если группа G односвязна), то оно дискретно. Кроме того, если подгруппы A и B связны, то, поскольку отображение $(a, b) \mapsto aba^{-1}b^{-1}$ связного многообразия $A \times B$ в дискретное многообразие $A \cap B$ непрерывно, оно переводит все многообразие $A \times B$ в точку $e \in G$, т. е. подгруппы A и B перестановочны. Следовательно, отображение $A \times B \to G$, определенное формулой $(a, b) \mapsto ab$, является эпиморфизмом. Так как этот эпиморфизм индуцирует, очевидно, тождественный изоморфизм $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \to \mathfrak{g}$ алгебр Ли, то, согласно предложению 4, его ядро дискретно и, значит, он является групповым накрытием, а потому — для односвязной группы G — изоморфизмом. Этим доказано, что *односвязная группа Ли G тогда и только тогда разлагается в прямое произведение $A \times B$ связных подгрупп A и B, когда алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ разлагается в прямую сумму $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ подалгебр $\mathfrak{a} = \mathfrak{l}(A)$ и $\mathfrak{b} = \mathfrak{l}(B)$*.

Для любой подгруппы H произвольной группы Ли G компоненты левых смежных классов aH, $a \in G$, являются, очевидно, не чем иным, как всевозможными максимальными инвариантными многообразиями подрасслоения $E^{\mathfrak{h}}$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}(H)$. Поэтому в группе G существует такая (кубическая) карта $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$, что $e \in U$ и для любого $a \in G$ пересечение $U \cap aH$ является объединением плоских подмногообразий вида V_ξ, $\xi \in \mathbb{R}^{n-m}$. В частности, этим свойством обладает пересечение $U \cap H$. Если подгруппа H замкнута (что мы всегда будем отныне предполагать), то карту (U, h) можно выбрать так, чтобы пересечение $U \cap H$ состояло только из одного подмногообразия V_0 (см. выше доказательство предложения 1). Пусть W — такая (кубическая по отношению к h) окрестность точки e в G, что $W^{-1} \subset W$ и $W^4 \subset U$. Если точки $a, b \in W$ сравнимы по модулю H, т. е. $a^{-1}b \in H$, то $a^{-1}b \in W^2 \cap H \subset U \cap H = V_0$, т. е. $b \in aV_0$. Поскольку $a \in aV_0$ и aV_0 вместе с V_0 связно, этим доказано, что точки a и b принадлежат одной компоненте связности пересечения $U \cap aH$, т. е. одному многообразию V_ξ. Поскольку обратное очевидно (если $a, b \in W \cap V_\xi$, то $a^{-1}b \in H$), тем самым доказано, что точки $a, b \in W$ тогда и только тогда принадлежат одному смежному классу по H, когда существует такое ξ, что $a, b \in V_\xi$, т. е., другими словами, что *пересечения $V_\xi \cap W$ для разных ξ принадлежат различным смежным классам по H.*

Рассмотрим теперь множество G/H всех смежных классов aH, $a \in G$. Группа G действует на этом множестве по формуле

$$g(aH) = (ga)H, \quad g \in G, \quad aH \in G/H.$$

Отображение $aH \longmapsto g(aH)$ мы будем обозначать символом $\bar{L}_g$. Оно связано с левым сдвигом L_g в группе G

формулой $\bar{L}_g \circ \omega = \omega \circ L_g$, где ω — естественное отображение $G \to G/H$, $a \mapsto aH$.

Пусть $\overline{W}$ — образ окрестности W при отображении ω.

Согласно сказанному выше отображение $\bar{h}$: $\overline{W} \to \mathbb{R}^{n-m}$, сопоставляющее каждому классу $aH \in \overline{W}$ точку $\xi \in \mathbb{R}^{n-m}$, для которой $a \in V_\xi \cap W$, корректно определено. Поскольку оно, очевидно, инъективно, а множество $h(\overline{W})$ представляет собой открытый куб в $\mathbb{R}^{n-m}$ полуширины c, равной полуширине окрестности W, пара $(\overline{W}, \bar{h})$ является картой на G/H, содержащей точку H. С картой (W, h) эта карта связана коммутативной диаграммой

$$
\begin{array}{ccc}
W & \longrightarrow & \overline{W} \\
{\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{h}} \\
\mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-m}
\end{array}
\tag{1}
$$

верхняя горизонтальная стрелка которой является отображением ω: $a \mapsto aH$, а нижняя — проекцией по первым m координатным осям.

Сопоставив каждому смежному классу $aH \in \overline{W}$, $a \in W$, точку в W с координатами

$$x^1 = 0, \ \ldots, \ x^m = 0, \quad x^{m+1} = x^{m+1}(a), \ \ldots, \ x^n = x^n(a),$$

мы получим отображение σ: $\overline{W} \to W$, являющееся сечением отображения ω: $\overline{W} \to W$, т. е. такое, что $\omega \circ \sigma = \mathrm{id}$ на $\overline{W}$. С отображениями h и $\bar{h}$ сечение σ связано формулой

$$\bar{h} = h \circ \sigma.$$

Заметим, что отображение $\sigma \circ \omega$: $W \to W$ гладко.

Поскольку для любого элемента $a \in G$ отображение $\bar{L}_a$ биективно, пара $(a\overline{W}, \bar{h}_a)$, где $\bar{h}_a = \bar{h} \circ \bar{L}_a$, является картой в точке $aH \in G/H$. Если $a\overline{W} \cap b\overline{W} \neq \varnothing$, то на $\bar{h}_a(a\overline{W} \cap b\overline{W})$ для отображения $\bar{h}_b \circ \bar{h}_a^{-1}$ будет иметь место формула

$$\bar{h}_b \circ \bar{h}_a^{-1} = \bar{h} \circ \bar{L}_b \circ \bar{L}_a^{-1} \circ \bar{h}^{-1} =$$
$$= h \circ \sigma \circ \bar{L}_{ba^{-1}} \circ \omega \circ h^{-1} = h \circ \sigma \circ \omega \circ L_{ba^{-1}} \circ h^{-1},$$

из которой немедленно следует, что это отображение гладко и, значит, карта $(a\overline{W}, \bar{h}_a)$ согласована с картой $(b\overline{W}, \bar{h}_b)$.

Поскольку карты вида $(a\overline{W}, \bar{h}_a)$, очевидно, покрывают G/H, тем самым доказано, что они составляют атлас и потому определяют на G/H некоторую гладкость. Снабженное этой гладкостью множество G/H называется *фактормногообразием* (или *однородным пространством*) группы Ли G по ее замкнутой подгруппе H.

Отображение $\omega\colon G \to G/H$ переводит каждую карту aW в карту $a\overline{W}$ и потому (см. диаграмму (1)) в соответствующих координатах является проекцией $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$. Это означает, что *естественное отображение*

$$\omega\colon G \to G/H, \qquad a \mapsto aH,$$

гладко и во всех точках имеет один и тот же ранг $n-m$ (так что его дифференциал $(d\omega)_a$ в каждой точке $a \in G$ является эпиморфизмом).

Сечение $\sigma\colon \overline{W} \to W$ является, конечно, гладким отображением.

Отображение

$$\bar{\mu}\colon G \times G/H \to G/H, \qquad (g, aH) \mapsto (ga)H,$$

задающее действие группы G на G/H, связано с умножением в группе G коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times\omega"'] & G \arrow[d, "\omega"] \\ G \times G/H \arrow[r, "\bar{\mu}"'] & G/H \end{tikzcd}$$

Для любых точек $g, a \in G$ отображение $\mathrm{id} \times \omega$ на окрестности $gW \times a\overline{W}$ точки (g, aH) обладает сечением $\mathrm{id} \times \sigma$. Поэтому на этой окрестности отображение $\bar{\mu}$ является композицией гладких отображений $\mathrm{id} \times \sigma$, μ, ω и потому гладко. Этим доказано, что *отображение $\bar{\mu}$ гладко.*

Предположим теперь, что подгруппа H инвариантна. Тогда формула

$$aH \cdot bH = abH$$

корректно определяет в G/H умножение, по отношению к которому G/H является группой. Легко видеть, что это умножение задает гладкое отображение

$$G/H \times G/H \to G/H, \tag{2}$$

т. е. что *факторгруппа* G/H *является группой Ли*. Действительно, пусть $a, b \in G$. Рассмотрим в G/H окрестности $a\overline{W}$ и $b\overline{W}$ смежных классов aH и bH. На окрестности $a\overline{W} \times b\overline{W}$ отображение (2) является композицией гладких отображений $\sigma \times \sigma$, μ, ω и потому гладко. Следовательно, оно гладко всюду. □

Предложение 5. *Алгебра Ли факторгруппы* G/H *изоморфна факторалгебре алгебры Ли* $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$ *по идеалу* $\mathfrak{h} = \mathfrak{l}(H)$:

$$\mathfrak{l}(G/H) \approx \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

Доказательство. Поскольку отображение ω: $G \to G/H$ гладко, оно является гомоморфизмом групп Ли и потому индуцирует гомоморфизм

$$\mathfrak{l}(\omega): \ \mathfrak{g} \to \mathfrak{l}(G/H)$$

их алгебр Ли. В интерпретации алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{l}(G/H)$ как касательных пространств в точке e гомоморфизм $\mathfrak{l}(\omega)$ является не чем иным, как дифференциалом

$$(d\omega)_e\colon \ \mathsf{T}_e(G) \to \mathsf{T}_e(G/H)$$

отображения ω. Но выше мы видели, что этот дифференциал является эпиморфизмом с ядром $\mathfrak{h} = \mathsf{T}_e(H)$. Поэтому гомоморфизм $\mathfrak{l}(\omega)$ индуцирует изоморфизм факторалгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ на алгебру $\mathfrak{l}(G/H)$. □

Подчеркнем, что в этой теореме подгруппа H предполагается замкнутой. Факторалгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ по идеалам $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, которым соответствуют незамкнутые инвариантные подгруппы группы G, не являются алгебрами Ли никаких факторгрупп группы G (по крайней мере, если понимать факторгруппы в их обычном смысле).

В случае, когда инвариантная подгруппа H не связна, из предложения 5 следует, что факторгруппы G/H и G/H_e, где H_e — компонента единицы подгруппы H (также, очевидно, являющаяся инвариантной подгруппой), локально изоморфны. Это замечание можно уточнить, заметив, что, поскольку $H_e \subset H$, каждый смежный класс по H_e содержится в некотором однозначно определенном смежном классе по H, что определяет естественное отображение

$$\rho\colon G/H_e \to G/H.$$

Так как естественные отображения $\omega\colon G \to G/H$ и $\omega_e\colon G \to G/H_e$ непрерывны и открыты, то отображение ρ также непрерывно и открыто. В случае, когда подгруппа H инвариантна, отображение ρ является, очевидно, гомоморфизмом.

Предложение 6. *Для любой замкнутой подгруппы H связной группы Ли G естественное отображение*

$$\rho\colon G/H_e \to G/H$$

является накрытием.

Доказательство. Так как подгруппа H_e открыта в подгруппе H, то единица группы G обладает такой связной окрестностью V, что $V^{-1}V \subset H_e$. Ясно, что предложение 6 будет доказано, если мы покажем, что для любой точки $\omega(g) = gH$ многообразия G/H ее окрестность $V(g) = \omega(gV)$ ровно накрыта отображением ρ.

Выбрав в каждой компоненте H_α подгруппы H по представителю h_α, рассмотрим в G/H_e открытые связные множества $\omega_e(gVh_\alpha)$. Эти множества не пересекаются (если $\omega_e(gvh_\alpha) = \omega_e(gv'h_\beta)$, т. е. $gvh_\alpha = gv'h_\beta h$, где $h \in H_e$, то $h_\alpha = v^{-1}v' \cdot h_\beta h$, где $v^{-1}v' \in H_e$, и потому $h_\alpha = h_\beta$), вместе составляют все множество $\rho^{-1}V(g)$ (так как элементами множества $V(g)$ являются смежные классы вида gvH, где $v \in V$, то множество $\rho^{-1}V(g)$ состоит из смежных классов вида $gvh_\alpha H_e$) и каждое из них с помощью ρ биективно — и, значит, гомеоморфно — отображается на $V(g)$ (если $\omega(gvh_\alpha) = \omega(gv'h_\alpha)$, то $v'h_\alpha = vh_\alpha h$, где $h \in H$, и потому $v^{-1}v' \in H$ и, значит, $v^{-1}v' \in H_e$; но тогда $h = h_\alpha^{-1} \cdot v^{-1}v' \cdot h_\alpha \in H_e$ — ибо H_e инвариантна в H — и, значит, $\omega_e(gvh_\alpha) = \omega_e(gv'h_\alpha)$). Следовательно, окрестность $V(g)$ ровно накрыта отображением ρ. □

Следствие. *Если в условиях предложения 6 фактор-многообразие G/H односвязно, то подгруппа H связна.* □

Теперь мы можем показать, что общий метод установления связности топологических групп, опирающийся на лемму 2 лекции 1, может быть употреблен и для установления односвязности:

Предложение 7. *Если связная группа Ли G содержит замкнутую связную и односвязную подгруппу H, фактормногообразие G/H по которой односвязно, то группа G также односвязна.*

Справедливо даже следующее более общее предложение:

Предложение 8. *Для любой связной замкнутой подгруппы H связной группы Ли G, фактормногообразие G/H по которой односвязно, фундаментальная группа $\pi_1 G$ группы Ли G является факторгруппой фундаментальной группы $\pi_1 H$ группы Ли H.*

Доказательство. Пусть $\tilde{G}$ — односвязная группа Ли, накрывающая группу G, и пусть $\pi\colon \tilde{G} \to G$ — соответствующее накрытие. Полный прообраз $H_\pi = \pi^{-1}H$ подгруппы H при гомоморфизме π является в $\tilde{G}$ замкнутой подгруппой, причем отображение $\tilde{G}/H_\pi \to G/H$, индуцированное гомоморфизмом π, является, как нетрудно видеть, диффеоморфизмом. Таким образом, многообразие $\tilde{G}/H_\pi$ также односвязно, и, следовательно, подгруппа H_π связна. Поэтому ограничение π_H отображения π на H_π является накрытием $H_\pi \to H$ и, следовательно, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H} \arrow[rr] \arrow[dr, "\rho"'] & & H_\pi \arrow[dl, "\pi_H"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

где $\rho\colon \tilde{H} \to H$ — универсальное накрытие группы Ли H. При этом отображение $H_\pi \to H$ (само будучи накрытием) эпиморфно и потому индуцирует эпиморфизм ядра $\operatorname{Ker}\rho$ гомоморфизма ρ на ядро $\operatorname{Ker}\pi_H$ гомоморфизма π_H. Это доказывает предложение 8 (вместе с предложением 7), поскольку, по определению, $\pi_1 H = \operatorname{Ker}\rho$ и $\pi_1 G = \operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Ker}\pi_H$. $\square$

В качестве примера на применение предложения 7 рассмотрим группу $SU(n)$ унимодулярных унитарных матриц. Так как (см. лекцию 1) для любого $n > 1$ фактормногообразие $\mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1) = \mathrm{U}(n)/\mathrm{U}(n-1)$ диффеоморфно сфере S^{2n-1}, то, согласно следствию леммы 1 лекции 9, это факторорногообразие односвязно. Поскольку группа $\mathrm{SU}(1)$ состоит только из одного элемента и потому односвязна, отсюда в силу предложения 7 очевидной индукцией выводится, что *для любого $n \geqslant 1$ группа $\mathrm{SU}(n)$ односвязна.*

Аналогичное рассуждение, использующее односвязность сферы $S^{4n-1} = \mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(n-1)$ и тот факт, что группа $\mathrm{Sp}(1) \approx \mathbb{S}^3$ односвязна, показывает, что *для любого $n \geqslant 1$ группа $\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{U}^{\mathbb{H}}(n)$ односвязна.*

Что же касается группы $\mathrm{U}(n)$, то здесь уже нужно применить предложение 8, поскольку группа $\mathrm{U}(1)$, являющаяся группой $\mathbb{S}^1$ комплексных чисел $|z| = 1$, неодносвязна, ибо обладает нетривиальным накрытием $\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, задающимся формулой $t \longmapsto e^{2\pi i t}$, $t \in \mathbb{R}$. Так как ввиду односвязности группы $\mathbb{R}$ это накрытие универсально, то группа $\pi_1 \mathbb{S}^1$ изоморфна его ядру, т. е. группе целых чисел $\mathbb{Z}$. Поэтому та же индукция, что и выше, но использующая вместо предложения 7 предложение 8, показывает, что фундаментальная группа $\pi_1 U(n)$ группы Ли $\mathrm{U}(n)$ является факторгруппой группы $\mathbb{Z}$.

Чтобы вычислить эту факторгруппу полностью, мы воспользуемся следующим предложением, в определенном отношении двойственным предложению 8:

Предложение 9. *Для любой инвариантной связной замкнутой подгруппы H связной группы Ли G фундаментальная группа $\pi_1 G/H$ группы Ли G/H является факторгруппой фундаментальной группы $\pi_1 G$ группы Ли G.*

Доказательство. Пусть $\pi\colon \widetilde{G} \to G$ и $\rho\colon \widetilde{G/H} \to G/H$ — универсальные накрытия, и пусть $\omega\colon G \to G/H$ — естественное отображение. Так как группа $\widetilde{G}$ односвязна, гомоморфизм $\omega \circ \pi\colon \widetilde{G} \to G/H$ поднимается до некоторого гомоморфизма $\widetilde{\omega}\colon \widetilde{G} \to \widetilde{G/H}$. Если $\widetilde{H} = \operatorname{Ker} \widetilde{\omega}$ и $\widetilde{\iota}\colon \widetilde{H} \to \widetilde{G}$ — отображение вложения, то, поскольку $\omega \circ \pi \circ \widetilde{\iota} = \rho \circ \widetilde{\omega} \circ \widetilde{\iota} = 0$, гомоморфизм π переводит $\widetilde{H}$ в H и, значит, индуцирует некоторый гомоморфизм $\pi_H\colon \widetilde{H} \to$

$\to H$. Все это наглядно изображается на коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd} \widetilde{H} \arrow[r, "\tilde{\iota}"] \arrow[d, "\pi_H"'] & \widetilde{G} \arrow[r, "\tilde{\omega}"] \arrow[d, "\pi"] & \widetilde{G/H} \arrow[d, "\rho"] \\ H \arrow[r, "\iota"'] & G \arrow[r, "\omega"'] & G/H \end{tikzcd}$$

Оказывается, что если гомоморфизм ω является эпиморфизмом, то он индуцирует эпиморфизм группы $\pi_1 G = \operatorname{Ker} \pi$ на группу $\pi_1 G/H = \operatorname{Ker} \rho$. Действительно, в этом случае группа $\widetilde{G/H}$ будет изоморфна факторгруппе $\widetilde{G}/\widetilde{H}$, так что эта факторгруппа будет односвязной группой. Поэтому, согласно следствию из предложения 6, подгруппа H будет связна, и, значит, гомоморфизм π_H: $\widetilde{H} \to H$ будет накрытием и, в частности, эпиморфизмом. Если теперь $\tilde{a} \in \operatorname{Ker} \rho$ и $\tilde{g}$ — такой элемент из $\widetilde{G}$, что $\tilde{\omega}(\tilde{g}) = \tilde{a}$, то элемент $\pi\tilde{g} \in G$ будет лежать в ядре H эпиморфизма ω и потому будет образом при эпиморфизме π_H некоторого элемента $\tilde{h} \in \widetilde{H}$, т. е. — точнее — будет иметь место равенство $(\iota \circ \pi_H)\tilde{h} = \pi\tilde{g}$. Тогда элемент $\tilde{g}_1 = (\tilde{\iota}\tilde{h})^{-1}\tilde{g}$ будет лежать в ядре $\operatorname{Ker} \pi$ гомоморфизма π, а его образом $\tilde{\omega}(\tilde{g}_1)$ при гомоморфизме $\tilde{\omega}$ будет данный элемент $\tilde{a} \in \operatorname{Ker} \rho$.

Таким образом, для доказательства предложения 9 достаточно показать, что $\tilde{\omega}(\widetilde{G}) = \widetilde{G/H}$.

Но очевидно, что в G и G/H существуют такие базы $\{U_\alpha\}$ и $\{V_\alpha\}$ открытых множеств, состоящие из связных множеств, ровно накрытых соответственно отображениями π и ρ, что для любого α множество V_α является образом $\omega(U_\alpha)$ множества U_α при эпиморфизме ω. Пусть $U_{\alpha,\beta}$ — компоненты прообраза $\pi^{-1}U_\alpha$ множества U_α, а $V_{\alpha,\gamma}$ — компоненты прообраза $\rho^{-1}(V_\alpha)$ множества V_α при, соответственно, отображениях π и ρ. Так как каждое множество $U_{\alpha,\beta}$ гомоморфизм $\omega \circ \pi$ отображает на множество V_α, то гомоморфизм $\tilde{\omega}$ отображает его на некоторое множество $V_{\alpha,\gamma}$. Поэтому, если какое-то множество $V_{\alpha,\gamma}$ пересекает подпространство $\tilde{\omega}(\widetilde{G})$, то оно содержится в нем: $V_{\alpha,\gamma} \subset \tilde{\omega}(\widetilde{G})$. Поскольку множества вида $V_{\alpha,\gamma}$ составляют базу пространства $\widetilde{G/H}$, это возможно только тогда, когда подпространство $\tilde{\omega}(\widetilde{G})$ одновременно замкнуто и открыто. Поэтому в силу связности $\tilde{\omega}(\tilde{G}) = \widetilde{G/H}$ (ср. с доказательством леммы 3 лекции 8).

Тем самым предложение 9 полностью доказано. □

Мы применим предложение 9 к эпиморфизму $\mathrm{U}(n) \to \mathbb{S}^1$, задаваемому формулой

$$A \longmapsto \frac{\det A}{|\det A|}, \qquad A \in \mathrm{U}(n).$$

Так как $\pi_1\mathbb{S}^1 = \mathbb{Z}$, то, согласно этому предложению, группа $\pi_1\mathrm{U}(n)$ эпиморфно отображается на группу $\mathbb{Z}$. Поскольку, с другой стороны, как выше было показано, группа $\mathbb{Z}$ также эпиморфно отображается на группу $\pi_1\mathrm{U}(n)$, этим доказано, что *фундаментальная группа* $\pi_1\mathrm{U}(n)$ *группы Ли* $\mathrm{U}(n)$ *изоморфна группе* $\mathbb{Z}$.

Среди классических связных матричных групп Ли нам осталось рассмотреть только группу $\mathrm{SO}(n)$. Мы сделаем это в следующей лекции.