Лекция 15

ТОЖДЕСТВА В АЛГЕБРЕ ОКТАВ $\mathbb{C}\mathrm{a}$. — ПОДАЛГЕБРЫ АЛГЕБРЫ ОКТАВ $\mathbb{C}\mathrm{a}$. — ГРУППА ЛИ G_2. — ПРИНЦИП ТРОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ГРУППЫ $\mathrm{Spin}(8)$. — АНАЛОГ ПРИНЦИПА ТРОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ГРУППЫ $\mathrm{Spin}(9)$. — АЛГЕБРА АЛБЕРТА $\mathbb{A}\mathrm{l}$. — ОКТАВНАЯ ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ.

Изучив алгебру Ли $\mathfrak{g}_2$, мы можем теперь обратиться к соответствующей группе Ли $G_2 = \mathrm{Aut}\,\mathbb{C}\mathrm{a}$. Результаты предыдущей лекции с точностью до накрытия полностью характеризуют алгебраическое строение компоненты единицы группы G_2. Поэтому основной вопрос, который нам осталось разобрать, состоит в выяснении того, связна ли группа G_2, а если связна, то какова ее фундаментальная группа.

Для этого нам нужно будет более подробно изучить алгебраическое строение алгебры $\mathbb{C}\mathrm{a}$.

Пусть сначала $\mathscr{A}$ — произвольная альтернативная алгебра. Заменив в тождестве альтернативности $(ab)b = a(bb)$ элемент b на $x + y$, раскрыв скобки и приведя подобные члены, мы получим тождество

$$ax \cdot y + ay \cdot x = a \cdot xy + a \cdot yx$$

(для упрощения формул мы вместо скобок пишем точки). Этот прием получения одного тождества из другого называется *поляризацией* (или *линеаризацией*).

Аналогичным образом, поляризовав второе тождество альтернативности $b(ba) = (bb)a$, мы получим — после переобозначения переменных — тождество

$$ax \cdot y + xa \cdot y = a \cdot xy + x \cdot ay.$$

Первое тождество означает, что выражение $(ax)y - a(xy)$ (называемое *ассоциатором* элементов a, x, y) кососимметрично по x и y, а второе — что оно кососимметрично по a и x. Но тогда это выражение кососимметрично по a и y, что дает третье тождество альтернативности

$$ax \cdot y + yx \cdot a = a \cdot xy + y \cdot xa,$$

при $y = a$ приобретающее вид $(ax)a = a(xa)$ (это тождество называется также тождеством эластичности).

Если алгебра $\mathscr{A}$, подобно алгебре $\mathbb{C}\mathrm{a}$, является, кроме того, метрической алгеброй, то для любых элементов $a \in \mathscr{A}$ и $b = \lambda + b'$, где $\lambda \in \mathbb{R}$ и $b' \perp 1$, будет иметь место равенство $(ab)(\lambda + b') = a \cdot b(\lambda + b')$, т. е. равенство $ab \cdot b' = a \cdot bb'$. Следовательно, $ab \cdot \lambda - ab \cdot b' = a \cdot b\lambda - a \cdot bb'$, т. е. $ab \cdot \bar{b} = a \cdot b\bar{b} = a(b, b)$. Поляризовав это тождество, мы получим тождество

$$ax \cdot \bar{y} + ay \cdot \bar{x} = 2(x, y)a, \tag{1}$$

являющееся обобщением тождества (2) предыдущей лекции (которое получается при $a = 1$).

Пусть теперь алгебра $\mathscr{A}$ нормирована, т. е. в ней выполнено тождество $(ab, ab) = (a, a)(b, b)$. Тогда, поляризовав это тождество сначала по $b = x + y$, а затем по $a = u + v$, мы получим тождество

$$(ux, vy) + (vx, uy) = 2(u, v)(x, y), \tag{2}$$

имеющее место для любых элементов u, v, x, y произвольной нормированной алгебры $\mathscr{A}$ (и, значит, в частности, алгебры $\mathbb{C}\mathrm{a}$).

Нас особенно будет интересовать подмножество линеала $\mathbb{C}\mathrm{a}'$, состоящее из элементов ξ, для которых $|\xi| = 1$. Это множество является 6-мерной сферой, и мы его будем обозначать символом S^6.

Легко видеть, что $\xi \in S^6$ *тогда и только тогда, когда* $\xi^2 = -1$. Действительно, если $\xi \in \mathbb{C}\mathrm{a}'$, то $\bar{\xi} = -\xi$ и потому $\xi^2 = -|\xi|^2$. Следовательно, если $|\xi| = 1$, то $\xi^2 = -1$. Обратно, если $\xi^2 = -1$, то $|\xi| = 1$, и значит, $\xi\bar{\xi} = 1$, т. е. $\xi(-\bar{\xi}) = -1 = \xi\xi$. Следовательно, $\bar{\xi} = -\xi$, т. е. $\xi \in \mathbb{C}\mathrm{a}'$, а так как $|\xi| = 1$, то $\xi \in S^6$. □

По линейности отсюда вытекает, что $\xi \in \mathbb{C}\mathrm{a}'$ *тогда и только тогда, когда* $\xi^2 = -|\xi|^2$.

Пусть теперь $\mathscr{H}$ — произвольная унитальная (и потому замкнутая относительно сопряжения) подалгебра алгебры $\mathbb{C}$a, отличная от алгебры $\mathbb{C}$a, и пусть ζ — произвольная октава из S^6, ортогональная подалгебре $\mathscr{H}$. Тогда *для любого элемента* $b \in \mathscr{H}$ *октава* $b\zeta$ *ортогональна подалгебре* $\mathscr{H}$. Действительно, полагая в (2) $u = 1$, $v = b$, $x = \zeta$ и $y = a$, где $a \in \mathscr{H}$, и учитывая, что $(ab, \zeta) = 0$ (ибо $ab \in \mathscr{H}$) и $(\zeta, 1) = 0$ (по условию), мы немедленно получаем, что $(b\zeta, a) = 0$ для любого элемента $a \in \mathscr{H}$. $\square$

В частности, $b\zeta \perp 1$ (ибо $1 \in \mathscr{H}$), так что $\overline{b\zeta} = -b\zeta$.

Кроме того, *для любых элементов* a, $b \in \mathscr{H}$ *имеют место равенства*

$$(3)\qquad \begin{gathered} a \cdot b\zeta = ba \cdot \zeta, \quad a\zeta \cdot b = a\bar{b} \cdot \zeta, \\ a\zeta \cdot b\zeta = -\bar{b}a. \end{gathered}$$

Действительно, полагая в (1) $x = \zeta$, $y = \bar{b}$ и учитывая, что $\zeta \perp b$, а потому и $\zeta \perp \bar{b}$, мы получим равенство

$$a\zeta \cdot b + a\bar{b} \cdot \bar{\zeta} = 0,$$

равносильное второму из тождеств (3). Аналогично, полагая в (1) $a = 1$, $x = a$, $y = \overline{b\zeta} = -b\zeta$, мы получим равенство

$$-a \cdot b\zeta + b\zeta \cdot \bar{a} = -2(a, b\zeta) = 0,$$

и, значит, равенство

$$a \cdot b\zeta = b\zeta \cdot \bar{a},$$

в силу уже доказанного второго тождества равносильное первому из тождеств (3). Наконец, при $b \in \mathbb{R}$ третье из тождеств (3) приобретает вид $a\zeta \cdot b\zeta = -ba$ и, значит, сводится ко второму тождеству. Поэтому это тождество достаточно доказать лишь при $b \perp 1$. Но в этом случае, положив в (1) $x = \zeta$ и $y = \overline{b\zeta} = -b\zeta$, мы получим, что

$$a\zeta \cdot b\zeta + (a \cdot b\zeta)\zeta = -2(\zeta, b\zeta)a = 0,$$

поскольку при $u = 1$, $v = b$, $x = y = \zeta$ из (2) вытекает, что $(\zeta, b\zeta) = (1, b)(\zeta, \zeta) = 0$. Следовательно, в силу уже доказанных тождеств $a\zeta\cdot b\zeta = -(ba)\zeta\cdot\zeta = ba = -\bar{b}a$. □

Теперь легко видеть, что *алгебра* $\mathscr{H}$ *ассоциативна*. Действительно, если $a, b, c \in \mathscr{H}$, то, заменив в (1) a на $b\zeta$, x на c и y на $\bar{a}\zeta$, мы получим тождество

$$(b\zeta\cdot\bar{c})\cdot\overline{\bar{a}\zeta} + (b\zeta\cdot\bar{a}\zeta)c = 2(\bar{c}, \bar{a}\zeta)\cdot b\zeta = 0,$$

равносильное в силу тождеств (3) соотношению ассоциативности $(ab)c = a(bc)$. □

Теперь мы уже можем доказать нашу основную лемму об автоморфизмах алгебры $\mathbb{C}\mathrm{a}$.

Произвольный автоморфизм $\Phi\colon \mathbb{C}\mathrm{a} \to \mathbb{C}\mathrm{a}$ переводит элементы i, j и e в такие элементы $\xi = \Phi i$, $\eta = \Phi j$ и $\zeta = \Phi e$ из S^6, что η ортогонален ξ, а ζ ортогонален ξ, η и $\xi\eta$. Оказывается, что последние условия не только необходимы, но и достаточны для существования автоморфизма Φ:

Лемма 1. *Для любых элементов* $\xi, \eta, \zeta \in S^6$ *таких, что*:

а) η *ортогонален* ξ;

б) ζ *ортогонален* ξ, η *и* $\xi\eta$,

существует (*очевидно, единственный*) *автоморфизм* Φ *алгебры* $\mathbb{C}\mathrm{a}$, *для которого*

$$\xi = \Phi i, \quad \eta = \Phi j, \quad \zeta = \Phi e.$$

Доказательство. Так как $\xi \in S^6$ и $\eta \in S^6$, то $\xi^2 = -1$ и $\eta^2 = -1$, а так как $\xi \perp \eta$, то $\xi\eta = -\eta\xi$. Поэтому $\overline{\xi\eta} = \bar{\eta}\bar{\xi} = \eta\xi = -\xi\eta$, и значит, $\xi\eta \in S^6$ (поскольку $|\xi\eta| = |\xi|\cdot|\eta| = 1$). Следовательно, $(\xi\eta)^2 = -1$. Кроме того, в силу альтернативности $\xi(\xi\eta) = -\eta$ и $(\xi\eta)\eta = -\xi$, а положив в (28) $u = v = \xi$, $x = \eta$ и $y = 1$, мы получим, что $(\xi\eta, \xi) = (\xi, \xi)(\eta, 1) = 0$, откуда следует, что $(\xi\eta)\xi = -\xi(\xi\eta) = \eta$. Поскольку, аналогично, $\eta(\xi\eta) = \xi$, мы видим, что, умножая в любом порядке и в любом числе элементы ξ и η, мы будем получать лишь элементы ± 1, $\pm\xi$, $\pm\eta$ и $\pm\xi\eta$. Это означает, что элементы вида

$$a + b\xi + c\eta + d\xi\eta, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

составляют подалгебру $\mathscr{H}$ алгебры $\mathbb{C}\mathrm{a}$, имеющую размерность 4 и, значит, по доказанному выше, являющуюся ассоциативной алгеброй. Но тогда легко видеть, что соответствия $1 \mapsto 1$, $i \mapsto \xi$, $j \mapsto \eta$, $k \mapsto \xi\eta$ определяют изоморфизм алгебры кватернионов $\mathbb{H}$ на алгебру $\mathscr{H}$.

Далее, элемент ζ, ортогональный по условию элементам 1, ξ, η и $\xi\eta$, ортогонален всей алгебре $\mathscr{H}$. Поэтому для него имеют место тождества (3). Но, сравнив эти тождества с формулами (1) лекции 14, мы немедленно обнаружим, что построенный изоморфизм $\mathbb{H} \to \mathscr{H}$ продолжается до гомоморфизма (в котором $e \mapsto \zeta$) алгебры $\mathbb{C}a$ на подалгебру, порожденную подалгеброй $\mathbb{H}$ и элементом ζ. Так как любой ненулевой гомоморфизм унитальной алгебры с делением необходимо является мономорфизмом (если $\xi \neq 0$ переходит в нуль, то куда переходит ξ^{-1}?) и так как любое мономорфное отображение конечномерной алгебры в себя необходимо является автоморфизмом (ибо инъективный линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве, биективен), то, следовательно, нами построен автоморфизм $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$, переводящий элементы i, j, e в элементы ξ, η, ζ.

Тем самым лемма 1 полностью доказана. $\square$

Из леммы 1, в частности, следует, что *группа* $G_2 = \operatorname{Aut} \mathbb{C}a$ *транзитивно действует на сфере* S^6, т. е. что отображение $G_2 \to S^6$, определенное формулой $\Phi \mapsto \Phi i$, надъективно. Это означает, что сфера S^6 диффеоморфна фактормногообразию G_2/K группы G_2 по подгруппе K, состоящей из всех автоморфизмов, оставляющих на месте элемент i:

$$G_2/K \approx S^6.$$

Для любого автоморфизма $\Phi \in K$ элемент $\eta = \Phi j$ из S^6 ортогонален элементу i и, значит, принадлежит некоторой пятимерной сфере S^5 (экватору сферы S^6 с полюсом i). При этом, согласно лемме 1, отображение $\Phi \mapsto \Phi j$ группы K на сферу S^5 надъективно. Следовательно,

$$K/L \approx S^5,$$

где L — подгруппа группы K, состоящая из автоморфизмов, оставляющих на месте элемент j.

Но для автоморфизмов Φ из L элемент $\zeta = \Phi e$ из S^6 ортогонален элементам i, j, k, т. е. принадлежит некоторой трехмерной сфере $S^3 \subset S^6$. При этом, согласно той же лемме 1, отображение $\Phi \mapsto \Phi e$ представляет собой диффеоморфизм группы L на сферу S^3:

$$L \approx S^3.$$

На топологическом языке все это означает, что группа G_2 расслаивается над сферой S^6 на многообразия, диффеоморфные группе K, которые в свою очередь расслаиваются над сферой S^5 на трехмерные сферы S^3.

Предложение 1. Группа G_2 связна и односвязна. Каждая группа Ли, локально изоморфная группе G_2, изоморфна ей.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из только что полученных результатов в силу леммы 2 лекции 1, следствия из леммы 1 лекции 9 и предложения 7 лекции 12. Второе утверждение означает, что группа G_2 не имеет нетривиальных дискретных инвариантных подгрупп. Поскольку (лемма 6 лекции 9) все дискретные инвариантные подгруппы связной группы Ли содержатся в ее центре, для доказательства этого утверждения достаточно установить, что центр группы G_2 тривиален, т. е. автоморфизм Φ_0 алгебры $\mathbb{C}$a, перестановочный с каждым её автоморфизмом Φ, необходимо является тождественным автоморфизмом. Но если автоморфизм Φ_0 перестановочен с автоморфизмом Φ, и если $\Phi \in K$, т. е. $\Phi i = i$, то $\Phi(\Phi_0 i) = \Phi_0 i$. Но, как непосредственно вытекает из леммы 1, последнее равенство для всех элементов группы K возможно только тогда, когда $\Phi_0 i = i$. Аналогично доказывается, что $\Phi_0 j = j$. Следовательно, $\Phi_0 = \mathrm{id}$. $\square$

Ввиду односвязности группы Ли G_2 ее алгебраическое строение полностью определяется изученным выше алгебраическим строением алгебры Ли $\mathfrak{g}_2$.

Замечание 1. Как уже было замечено в предыдущей лекции, подпространство $\mathscr{V}$ алгебры $\mathbb{C}$a, ортогональное элементам 1 и i, является линейным пространством над полем $\mathbb{C}$ с базисом j, e, g. Скалярное произведение в $\mathbb{C}$a определяет в $\mathscr{V}$ эрмитово скалярное произведение, по отношению к которому базис j, e, g ортонормирован. Любой автоморфизм $\Phi\colon \mathbb{C}\mathrm{a} \to \mathbb{C}\mathrm{a}$, оставляющий на месте i, т. е. принадлежащий подгруппе K, определяет линейный над $\mathbb{C}$ оператор $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$. Этот оператор сохраняет скалярное произведение, т. е. является унитарным оператором. Поскольку его определитель равен, как легко видеть, единице, тем самым группа K отождествляется с некоторой подгруппой группы $SU(3)$. При этом из леммы 1 непосредственно вытекает, что на самом деле группа K совпадает со всей группой $SU(3)$. Таким образом, можно считать, что $SU(3) \subset G_2$, причем $G_2/SU(3) \approx S^6$.

Алгебра Ли $\mathfrak{k}$ группы K состоит из дифференцирований D, для которых $Di = 0$. Тем самым мы заново доказали, что эти дифференцирования составляют алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли $\mathfrak{su}(3)$.

Алгебра $\mathbb{C}a$ может быть использована и для изучения группы $SO(8)$, поскольку каждый элемент группы $SO(8)$ мы можем считать ортогональным оператором $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$. Впрочем, здесь удобнее перейти от группы $SO(8)$ к ее универсальной накрывающей группе $\mathrm{Spin}(8)$.

Излагаемые ниже результаты, касающиеся групп $\mathrm{Spin}(8)$ и $\mathrm{Spin}(9)$, принадлежат Джекобсону.

Игнорируя в $\mathbb{C}a$ умножение, т. е. рассматривая $\mathbb{C}a$ просто как евклидово пространство, мы можем построить алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}_+(\mathbb{C}a)$ и $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}a')$. Таким образом, элементы i, j, k, e, $f = ie$, $g = je$, $h = ke$ будут теперь образующими алгебры $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}a')$. В этом качестве мы будем их обозначать, в соответствии с лекцией 13, символами $e_1, \ldots, e_7$. В алгебре $\mathrm{Cl}_+(\mathbb{C}a)$ к этим образующим прибавится еще одна образующая — единица алгебры $\mathbb{C}a$. Несколько отходя от принятых в лекции 13 обозначений, мы будем эту дополнительную образующую обозначать символом e_0.

Согласно замечанию к предложению 8 лекции 13 алгебра $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}a')$ изоморфна алгебре $\mathrm{Cl}^0_+(\mathbb{C}a)$, причем в указанном в этом замечании изоморфизме роль элемента e_n будет, конечно, играть теперь элемент e_0. Таким образом, этот изоморфизм будет определяться формулой

$$\omega_+(e_I) = \begin{cases} \bar{e}_I, & \text{если } |I| \text{ четно}, \\ e_0\bar{e}_I, & \text{если } |I| \text{ нечетно}, \end{cases}$$

где I — произвольное подмножество множества $\{1, \ldots, 7\}$.

Линеал $\mathbb{C}a$, по определению, вложен в алгебру $\mathrm{Cl}_+(\mathbb{C}a)$. Мы будем считать его вложенным и в алгебру $\mathrm{Cl}(\mathbb{C}a')$, отождествляя для этого его единицу с единицей 1 алгебры $\mathbb{C}l(\mathbb{C}a')$. Легко видеть, что в силу этого отождествления для каждого элемента алгебры $\mathbb{C}l^0_+(\mathbb{C}a)$ вида e_0u, где $u \in \mathbb{C}a$, будет справедливо равенство

$$\omega_+^{-1}(e_0u) = u.$$

Действительно, если $u = \lambda e_0 + u'$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, а $u' \in \mathbb{C}a'$, то $e_0u = \lambda + e_0u'$, и потому $\omega_+^{-1}(e_0u) = \lambda + \bar{u}' = \lambda + u' = u$ (сопряжение здесь понимается как сопряжение в $\mathbb{C}l_+(\mathbb{C}a)$, а не в $\mathbb{C}a$, поэтому $\bar{u}' = u'$). $\square$

Ввиду альтернативности алгебры $\mathbb{C}a$ для любых элементов $x \in \mathbb{C}a$ и $u \in \mathbb{C}a'$ имеет место равенство

$$(xu)u = x \cdot u^2 = -|u|^2 x$$

(напомним, что $u^2 = -|u|^2$, если $u \in \mathbb{C}a'$), означающее, что для линейного оператора $R_u\colon x \longmapsto xu$, $u \in \mathbb{C}a'$, имеет место равенство

$$R_u^2 = -|u|^2 E.$$

Поэтому соответствие $u \longmapsto R_u$ распространяется до некоторого гомоморфизма

$$R\colon \mathbb{C}l(\mathbb{C}a') \to \operatorname{End}\mathbb{C}a,$$

где $\operatorname{End}\mathbb{C}a$ — алгебра всех линейных операторов $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$.

Так как для любого элемента $u = \lambda + u' \in \mathbb{C}a \subset \mathbb{C}l(\mathbb{C}a')$ имеет место равенство $R(\lambda + u') = \lambda E + R_{u'} = R_{\lambda+u'}$, то гомоморфизм R является распространением соответствия $u \longmapsto R_u$ и для любого $u \in \mathbb{C}a$.

Аналогично доказывается существование такого гомоморфизма

$$L\colon \mathbb{C}l(\mathbb{C}a') \to \operatorname{End}\mathbb{C}a,$$

$L_u = L_u : X \to ux$ **для любого элемента** $u \in \mathbb{C}a$.

Поскольку алгебра $\mathbb{C}l(\mathbb{C}a)$ отождествляется с алгеброй $\mathbb{C}l_+(8)$, а алгебра $\operatorname{End}\mathbb{C}a$ — с алгеброй $\mathbb{R}(8)$, тем самым возникают два сквозных гомоморфизма

$$(4)\quad \operatorname{Spin}_+(8) \subset \mathbb{C}l^0_+(8) = \\ = \mathbb{C}l^0_+(\mathbb{C}a) \xrightarrow{\omega_+^{-1}} \mathbb{C}l(\mathbb{C}a') \overset{R,\,L}{\rightrightarrows} \operatorname{End}\mathbb{C}a = \mathbb{R}(8).$$

Так как $\omega_+^{-1}(e_0u) = u$, то каждому элементу группы $\operatorname{Spin}(8)$, имеющему вид e_0u, где $u \in S^7 \subset \mathbb{C}a$, отвечает при одном из этих гомоморфизмов оператор R_u: $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$, а при другом — оператор L_u: $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$. Поскольку $|u| = 1$, а алгебра $\mathbb{C}a$ нормирована, эти операторы ортогональны. Так как элементы вида e_0u, $u \in S^7$, порождают группу $\mathrm{Spin}_+(8)$, этим доказано, что гомоморфизмы (4) отображают группу $\mathrm{Spin}_+(8)$ в группу $\mathrm{SO}(8)$ (или, если не делать последнего отождествления, в группу $\mathrm{Ort}\,\mathbb{C}a$ ортогональных операторов $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$).

Элементы группы $\mathrm{SO}(8)$ (или $\mathrm{Ort}\,\mathbb{C}a$), являющиеся образами элемента $a \in \mathrm{Spin}_+(8)$ при гомоморфизмах (4), мы будем обозначать через a^R и a^L соответственно.

Согласно произведенным выше вычислениям, если $a = (e_0u_1)\ldots(e_0u_r)$, где $u_1, \ldots, u_r \in S^7$, то

$$a^R = R_{u_1} \circ \ldots \circ R_{u_r} \quad \text{и} \quad a^L = L_{u_1} \circ \ldots \circ L_{u_r}.$$

Замечание 2. Из общей теории матричных представлений групп $\mathrm{Spin}(n)$ непосредственно следует, что гомоморфизмы $a \mapsto a^R$ и $a \mapsto a^L$ эквивалентны полуспинорным представлениям группы $\mathrm{Spin}(8) \approx \mathrm{Spin}_+(8)$ (см. формулу (20) лекции 13 при $m = 1$), которые, заметим, имея дискретное ядро, в этом случае являются накрытиями (очевидно, двулистными). Впрочем, эта эквивалентность легко доказывается и непосредственно (следует только иметь в виду, что в точности представления (20) лекции 13 получатся, если для отождествления $\mathrm{Cl}_+^0(8) = \mathrm{Cl}_+^0(\mathbb{C}a)$ за базисные элементы алгебры $\mathbb{C}a$ приняты элементы $1, e, h, g, i, f, -j, k$, а для отождествления $\mathrm{End}\,\mathbb{C}a = \mathbb{R}(8)$ — элементы $-1, i, -j, -k, e, f, g, h$). Нам эта эквивалентность не понадобится, и потому доказывать ее мы не будем.

Кроме гомоморфизмов $a \mapsto a^R$ и $a \mapsto a^L$, мы имеем еще гомоморфизм φ_0: $\mathrm{Spin}_+(8) \to \mathrm{SO}(8)$ из предложения 4 лекции 13, который каждому элементу $a \in \mathrm{Spin}_+(8)$ сопоставляет ортогональный оператор $\varphi_0(a)$: $x \mapsto ax\bar{a}$, действующий в линеале $\mathbb{C}a$. Мы будем этот оператор обозначать теперь символом a^T. Так как $\mathrm{Ker}\,\varphi_0 = \{1, -1\}$, то $(-a)^T = a^T$ и, в частности, $(e_0u)^T = (ue_0)^T$. С другой стороны, как было показано при доказательстве предложения 4 лекции 13, $(ue_0)^T = u^{\perp}e_0^{\perp}$, где $u^{\perp}$ — симметрия относительно гиперплоскости, перпендикулярной вектору u. Но согласно формуле (2) предыдущей лекции для любых октав $x, u \in \mathbb{C}a$ имеет место равенство $\underline{\underline{uxu}} = uxu = (2(u, \bar{x}) - \bar{x}\bar{u})u$ (сопряжение в $\mathbb{C}a$), откуда при $|u| = 1$ следует, что $uxu = -u^{\perp}(\bar{x})$, т. е. — поскольку $e_0^{\perp}x = -\bar{x}$, — что $uxu = u^{\perp}e_0^{\perp}(x)$. Вводя оператор T_u: $x \mapsto uxu$, т. е. оператор $T_u = R_u \circ L_u = L_u \circ R_u$, мы получаем, следовательно, что $T_u = u^{\perp}e_0^{\perp}$ и, значит, $T_u = (ue_0)^T = (e_0u)^T$. Поэтому, если $a = (e_0u_1) \ldots (e_0u_r)$, то

$$a^T = T_{u_1} \circ \ldots \circ T_{u_r}$$

так же, как для операторов a^R и a^L.

Лемма 2 (центральное тождество Муфанг). *В каждой альтернативной алгебре справедливо тождество*

$$u \cdot xy \cdot u = ux \cdot yu. \tag{5}$$

Доказательство. Ввиду тождеств альтернативности и эластичности имеет место тождество

$$y^2x \cdot y = (y \cdot yx)\, y = y\,(yx \cdot y) = y\,(y \cdot xy) = y^2 \cdot xy,$$

и, следовательно, ввиду кососимметричности ассоциаторов — тождество

$$xy^2 \cdot y = x \cdot y^3,$$

т. е. тождество

$$x \cdot y^3 = (xy \cdot y)\, y.$$

Поляризовав это тождество по y, т. е. положив $y = a + b$ и приведя подобные члены, мы получим тождество

$$x \cdot a^2b + x \cdot ba^2 + x \cdot aba + x \cdot bab + x \cdot ab^2 + x \cdot b^2a =$$
$$= xa^2 \cdot b + xb \cdot a^2 + (xa \cdot b)\, a + (xb \cdot a)\, b + xa \cdot b^2 + xb^2 \cdot a.$$

Но в силу кососимметричности ассоциаторов суммы двух первых членов в каждой строчке равны. По той же причине равны и суммы двух последних членов. Поэтому

$$x \cdot aba + x \cdot bab = (xa \cdot b)\, a + (xb \cdot a)\, b.$$

Заменив здесь b на λb, где $\lambda \in \mathbb{R}$, сократив на λ и положив $\lambda = 0$, мы получим тождество

$$x \cdot aba = (xa \cdot b)\, a,$$

называемое правым тождеством Муфанг.

В силу этого тождества и кососимметричности ассоциаторов

$$\begin{aligned} ab \cdot xa - a \cdot bx \cdot a &= ab \cdot xa - (ab \cdot x)a + (ab \cdot x - a \cdot bx)a = \\ &= (x \cdot ab)a - x \cdot aba + (xa \cdot b - x \cdot ab)a = \\ &= (xa \cdot b)a - x \cdot aba = 0, \end{aligned}$$

что только обозначениями отличается от тождества (5). □

Лемма 2 означает, что

$$T_u(xy) = L_u x \cdot R_u y.$$

Отсюда в силу доказанных выше формул для a^R, a^L и a^T очевидной индукцией выводится, что

$$a^T(xy) = a^L x \cdot a^R y$$

для любых октав $x, y \in \mathbb{C}a$ и любого элемента $a \in \in \mathrm{Spin}_+(8)$.

Теперь мы можем от группы $\mathrm{Spin}_+(8)$ перейти к изоморфной ей группе $\mathrm{Spin}(8)$. Обозначив для любого элемента a группы $\mathrm{Spin}(8)$ соответствующий элемент группы $\mathrm{Spin}_+(8)$ через a_+ и положив $a^K = a_+^K$, где $K = T, L, R$, получим следующее предложение:

Предложение 2. *Для произвольного элемента* $a \in \in \mathrm{Spin}(8)$ *имеет место тождество*

$$a^T(xy) = a^L x \cdot a^R y, \qquad x, y \in \mathbb{C}a.$$

Это предложение называется п р и н ц и п о м т р о й с т в е н н о с т и д л я г р у п п ы $\mathrm{Spin}(8)$.

З а м е ч а н и е 3. Как мы знаем, гомоморфизм $a \mapsto a^T$ является накрытием, а, согласно замечанию 1, накрытиями будут и гомоморфизмы $a \mapsto a^L$ и $a \mapsto a^R$. Поэтому для любого $K = T, L, R$ гомоморфизм $a \mapsto a^K$ индуцирует изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{l}(\mathrm{Spin}(8))$ на алгебру Ли $\mathfrak{l}(\mathrm{SO}(8)) = \mathfrak{so}(8)$. Отождествив эти алгебры Ли посредством первого из этих изоморфизмов, получим из остальных двух некоторые автоморфизмы алгебры Ли $\mathfrak{so}(8)$. Обозначив для произвольной матрицы $A \in \mathfrak{so}(8)$ через A^λ и A^ρ ее образы при этих автоморфизмах, мы, как легко видеть, будем иметь тождество

$$(6) \qquad A^\lambda x \cdot y + x \cdot A^\rho y = A(xy), \qquad x, y \in \mathbb{C}a, \quad A \in \mathfrak{so}(8).$$

Это тождество называется **инфинитезимальным принципом тройственности**. Его прямое доказательство имеется в статье Фрейденталя [13].

Следующее предложение можно рассматривать как обращение принципа тройственности.

Предложение 3. *Если ортогональные операторы A, B, C: $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$ обладают тем свойством, что*

$$A(xy) = Bx \cdot Cy$$

для любых октав x, $y \in \mathbb{C}a$, то эти операторы необходимо унимодулярны (принадлежат группе $SO(8)$) *и в группе* $\mathrm{Spin}(8)$ *существует один и только один элемент* $a \in \mathrm{Spin}(8)$, *для которого*

$$A = a^T, \quad B = a^L, \quad C = a^R. \tag{7}$$

Доказательство. Если $A \in SO(8)$ и потому существует такой элемент $a \in \mathrm{Spin}(8)$, что $A = a^T$, то $xy = B'x \cdot C'y$, где $B' = (a^L)^{-1} \circ B$ и $C' = (a^R)^{-1} \circ C$. Но тогда $B'x = xb$, где $b = (C'1)^{-1}$ и $C'y = cy$, где $c = (B'1)^{-1}$, и, значит,

$$xy = xb \cdot cy.$$

Полагая здесь $x = y = 1$, мы получаем, что $bc = 1$, а заменяя x на $xc = xb^{-1}$, что $xc \cdot y = x \cdot cy$. Но легко видеть (принимая за x и y всевозможные базисные элементы линеала $\mathbb{C}a'$), что при произвольных x и y это равенство возможно только при $c \in \mathbb{R}$, т. е., ввиду ортогональности оператора C', при $c = \pm 1$. Если $c = 1$, то элемент a удовлетворяет соотношениям (7), а если $c = -1$, то его следует заменить на $-a$. Единственность этого элемента очевидна (ибо, если $a^T = b^T$, то $a = \pm b$, и потому $a^L = \pm b^L$).

Заметим, что операторы B и C оказались принадлежащими группе $SO(8)$. Поэтому для завершения доказательства нам осталось лишь показать, что включение $A \in O(8) \setminus SO(8)$ невозможно. При этом, не теряя общности, мы можем, очевидно, считать, что A: $x \to \bar{x}$, т. е. что $Bx \cdot Cy = \overline{xy}$. Но тогда $Bx = \bar{x}b$, где $b = (C1)^{-1}$ и $Cy = c\bar{y}$, где $c = (B1)^{-1}$, т. е. $\bar{x}b \cdot c\bar{y} = \overline{xy}$ и, значит (заменяем x на $\bar{x}$, а y на $\bar{y}$),

$$xb \cdot cy = yx.$$

При $x = y = 1$ отсюда следует, что $bc = 1$ и, значит, что $x \cdot cy = y \cdot xc$. В частности, $cy = yc$ для всех $y \in \mathbb{C}a$, что возможно только при $c \in \mathbb{R}$. Поэтому $xy = yx$, что абсурдно. Следовательно, случай $A \in O(8) \setminus SO(8)$ невозможен. $\square$

Замечание 4. Аналогичное обращение допускает и инфинитезимальный принцип тройственности (6): *если A, B, C — такие кососимметрические операторы $\mathbb{C}a \to \mathbb{C}a$, что*

$$A(xy) = Bx \cdot y + x \cdot Cy \quad \textit{для любых} \quad x, y \in \mathbb{C}a,$$

то $B = A^\lambda$ *и* $C = A^\rho$. Действительно, для операторов $B' = B - A^\lambda$ и $C' = C - A^\rho$ имеет место тождество $B'x \cdot y = -x \cdot C'y$, откуда следует, что $B'x = xb$, где $b = -C'1$, и $C'y = cy$, где $y = -B'1$. Таким образом, $xb \cdot y = -x \cdot cy$, откуда при $x = y = 1$ следует, что $b = -c$ и, значит, что $xb \cdot y = x \cdot by$. Поэтому $b \in \mathbb{R}$, т. е. оператор B' диагонален. Следовательно, в силу кососимметричности, $B' = 0$, а значит, и $C' = 0$. $\square$

Аналог принципа тройственности имеет место и для группы Spin(9). Чтобы получить его, мы введем в рассмотрение линеалы $\mathbb{C}a^\oplus = \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}a$ и $\mathbb{C}a^2 = \mathbb{C}a \oplus \mathbb{C}a$. Во избежание путаницы со скалярным произведением, элементы линеала $\mathbb{C}a^2$ будем обозначать символами $\{\xi, \eta\}$, где $\xi, \eta \in \mathbb{C}a$, и, соответственно этому, элементы линеала $\mathbb{C}a^\oplus$ — символами $\{r, \rho\}$, где $r \in \mathbb{R}$, $\rho \in \mathbb{C}a$.

Каждому элементу $x = \{\xi, \eta\}$ линеала $\mathbb{C}a^2$ и каждому элементу $u = \{r, \rho\}$ линеала $\mathbb{C}a^\oplus$ отнесем элемент xu линеала $\mathbb{C}a^2$, определенный формулой

$$xu = \{-r\xi + \bar{\rho}\eta,\ r\eta + \bar{\xi}\bar{\rho}\}.$$

Ясно, что это умножение билинейно (над $\mathbb{R}$) и обладает тем свойством, что если $xu = xv$ для всех $x \in \mathbb{C}a^2$, то $u = v$ (если $-r\xi + \bar{\rho}\eta = -s\xi + \bar{\sigma}\eta$ для всех ξ и η, то $-r\xi = -s\xi$, и потому $r = s$, и $\bar{\rho}\eta = \bar{\sigma}\eta$, и потому $\rho = \sigma$).

Лемма 3. Для любых элементов $x \in \mathbb{C}a^2$ и $u, v \in \mathbb{C}a^\oplus$ имеет место тождество

$$xu \cdot v = -xv \cdot v^\perp u, \tag{8}$$

где, как всегда $v^{\perp}$ — симметрия в гиперплоскости, перпендикулярной вектору v.

Доказательство. Пусть $u=\{r, \rho\}$, $v=\{s, \sigma\}$. Ясно, что без ограничения общности векторы u и v можно считать единичными, т. е. удовлетворяющими соотношениям $r^2+|\rho|^2=1$, $s^2+|\sigma|^2=1$. Тогда $v^{\perp}u=\{r-2(u, v)s, \rho-2(u, v)\sigma\}$, где $2(u, v)=2rs+\bar{\rho}\sigma+\bar{\sigma}\rho$

В силу линейности тождество (8) достаточно доказать только для $x=\{\xi, 0\}$ и $x=\{0, \eta\}$. Но если $x=\{\xi, 0\}$, то

$$xu=\{-r\xi, \bar{\xi}\bar{\rho}\},\quad xv=\{-s\xi, \bar{\xi}\bar{\sigma}\},$$

$$xu\cdot v=\{rs\xi+\bar{\sigma}\cdot\rho\xi,\ s\bar{\xi}\bar{\rho}-r\bar{\xi}\bar{\sigma}\}$$

и

$$\begin{aligned} xv\cdot v^{\perp}u &= \{(r-2(u, v)s)s\xi+\\ &+\overline{(\rho-2(u, v)\sigma)}\cdot\sigma\xi,\ (r-2(u, v)s)\bar{\xi}\bar{\sigma}-s\bar{\xi}\,\overline{(\rho-2(u, v)\sigma)}\}=\\ &=\{rs\xi-2(u, v)s^2\xi+\bar{\rho}\cdot\sigma\xi-2(u, v)\bar{\sigma}\sigma\xi,\ r\bar{\xi}\bar{\sigma}-\\ &\quad-2(u, v)s\bar{\xi}\bar{\sigma}-s\bar{\xi}\bar{\rho}+2(u, v)s\bar{\xi}\bar{\sigma}\}=\\ &=\{[rs-2(u, v)(s^2+|\sigma|^2)]\xi+\bar{\rho}\cdot\sigma\xi,\ r\bar{\xi}\bar{\sigma}-s\bar{\xi}\bar{\rho}\},\end{aligned}$$

и, значит (поскольку $rs-2(u, v)(s^2+|\sigma|^2)=rs-2(u, v)=-rs-\bar{\rho}\sigma-\bar{\sigma}\rho$),

$$xu\cdot v+xv\cdot v^{\perp}u=\{\bar{\sigma}\cdot\rho\xi-\bar{\sigma}\rho\cdot\xi+\bar{\rho}\sigma\cdot\xi-\bar{\rho}\cdot\sigma\xi, 0\},$$

что равно $\{0, 0\}$ в силу кососимметричности ассоциаторов и того очевидного замечания, что при замене одного из элементов сопряженным ассоциатор меняет знак.

Случай $x=\{0, \eta\}$ рассматривается аналогично. □

Сопоставим теперь каждому элементу $u\in\mathbb{C}a^{\oplus}$ линейный оператор $R_u\colon x\mapsto xu$, действующий в пространстве $\mathbb{C}a^2$. Поскольку, как показывает непосредственное вычисление, $xu\cdot u=|u^2|x$ для любых элементов $x\in\mathbb{C}a^2$, $u\in\mathbb{C}a^{\oplus}$, т. е. $R_u^2=|u^2|E$, линейное отображение $u\mapsto R_u$ пространства $\mathbb{C}a^{\oplus}$ в алгебру линейных операторов $\operatorname{End}\mathbb{C}a^2$ единственным образом распространяется до некоторого гомоморфизма алгебр

$$R\colon \mathrm{Cl}_{+}(\mathbb{C}a^{\oplus})\to\operatorname{End}\mathbb{C}a^2.$$

Поскольку алгебры $\mathbb{C}\mathrm{l}_+(\mathbb{C}\mathrm{a}^{\oplus})$ и $\operatorname{End}\mathbb{C}\mathrm{a}^2$ мы можем отождествить соответственно с алгебрами $\mathbb{C}\mathrm{l}_+(9)$ и $\mathbb{R}(16)$, тем самым возникает сквозной гомоморфизм

$$\text{(9)}\qquad \operatorname{Spin}_+(9)\subset \mathbb{C}\mathrm{l}_+(9)=\mathbb{C}\mathrm{l}(\mathbb{C}\mathrm{a}^{\oplus})\xrightarrow{R}\operatorname{End}\mathbb{C}\mathrm{a}^2=\mathbb{R}(16).$$

Если $u=\{r,\rho\}\in S^8\subset\mathbb{C}\mathrm{a}^{\oplus}$, т. е. $r^2+|\rho|^2=1$ и $x=\{\xi,\eta\}\in\mathbb{C}\mathrm{a}^2$, то

$$\begin{aligned}
|xu|^2&=|\{-r\xi+\bar\rho\bar\eta,\ r\eta+\bar\xi\bar\rho\}|^2=\\
&=(-r\xi+\bar\rho\bar\eta)(-r\bar\xi+\eta\rho)+(r\eta+\bar\xi\bar\rho)(r\bar\eta+\rho\xi)=\\
&=r^2\xi\bar\xi-r\xi\cdot\eta\rho-r\bar\rho\bar\eta\cdot\bar\xi+\bar\rho\bar\eta\cdot\eta\rho+\\
&+r^2\eta\bar\eta+r\eta\cdot\rho\xi+r\bar\xi\bar\rho\cdot\bar\eta+\bar\xi\bar\rho\cdot\rho\xi=\\
&=(r^2+|\rho|^2)(|\xi|^2+|\eta|^2)+rz=|x|^2+rz,
\end{aligned}$$

где

$$z=-\xi\cdot\eta\rho-\bar\rho\bar\eta\cdot\bar\xi+\eta\cdot\rho\xi+\bar\xi\bar\rho\cdot\bar\eta.$$

Но, положив $[\xi,\eta]=\xi\eta-\eta\xi$ и $(\xi,\eta,\zeta)=\xi\eta\cdot\zeta-\xi\cdot\eta\zeta$, мы, как легко видеть, получим, что

$$z=[\eta\rho,\xi]-(\eta,\rho,\xi)+[\bar\xi,\bar\rho\bar\eta]+(\bar\xi,\bar\rho,\bar\eta).$$

Как уже было замечено выше, при замене любого элемента сопряженным ассоциатор (ξ,η,ζ) меняет знак. Поэтому $(\bar\xi,\bar\rho,\bar\eta)=-(\xi,\rho,\eta)$. Аналогично $[\bar\xi,\bar\rho\bar\eta]=[\bar\xi,\overline{\eta\rho}]=[\xi,\eta\rho]$. Поэтому

$$z=[\eta\rho,\xi]+[\xi,\eta\rho]-(\eta,\rho,\xi)-(\xi,\rho,\eta)=0$$

из-за кососимметричности ассоциаторов. Таким образом, $|xu|^2=|x|^2$. Это означает, что линейный оператор $R_u=Ru$ ортогонален, откуда непосредственно следует, что гомоморфизм (9) переводит группу $\operatorname{Spin}_+(9)$ (даже группу $\operatorname{Pin}_+(9)$) в группу $SO(9)$.

Образ элемента $a\in\operatorname{Spin}_+(9)$ в группе $SO(9)$ при гомоморфизме (9), интерпретированный как ортогональный оператор в пространстве $\mathbb{C}\mathrm{a}^2$, мы будем обозначать символом a^R.

Замечание 5. Гомоморфизм $a\longmapsto a^R$ является спинорным представлением группы $\operatorname{Spin}_+(9)\approx\operatorname{Spin}(9)$, но этот факт нам не понадобится и доказывать его мы не будем.

Образ элемента $a \in \mathrm{Spin}_+(9)$ при гомоморфизме φ_0: $\mathrm{Spin}_+(9) \to SO(9)$ из предложения 4 лекции 13, интерпретированный как ортогональный оператор в пространстве $\mathbb{C}a^\oplus$, мы обозначим символом a^T.

Кроме того, как и выше, для любого элемента $a \in \mathrm{Spin}(9)$ мы положим $a^R = a_+^R$ и $a^T = a_+^T$, где a_+ — элемент группы $\mathrm{Spin}_+(9)$, соответствующий элементу a при изоморфизме $\mathrm{Spin}(9) \approx \mathrm{Spin}_+(9)$. Тогда будет иметь место следующее предложение:

Предложение 4. *Для произвольного элемента $a \in \mathrm{Spin}(9)$ имеет место тождество*

$$a^R(xu) = a^R x \cdot a^T u, \qquad x \in \mathbb{C}a^2, \quad u \in \mathbb{C}a^\oplus. \tag{10}$$

Доказательство. Поскольку группа $\mathrm{Spin}(9)$ порождается элементами вида vw, где $v, w \in S^8 \subset \mathbb{C}a^\oplus$, тождество (10) достаточно доказать лишь при $a = vw$. Но, согласно лемме 2 и определению гомоморфизма R,

$$\begin{aligned}(vw)^R(xu) &= (v^R \circ w^R)(xu) = (R_v \circ R_w)(xu) = \\ &= R_v(xu \cdot w) = R_v(-xw \cdot w^\perp u) = \\ &= -(xw \cdot w^\perp u) \cdot v = (xw \cdot v) \cdot v^\perp(w^\perp u) = \\ &= (R_v \circ R_w)x \cdot (v^\perp \circ w^\perp)u = \\ &= (vw)^R x \cdot (vw)^T u\end{aligned}$$

(напомним, что $(vw)^T = v^\perp \circ w^\perp$). □

Аналог предложения 3 также имеет место:

Предложение 5. *Если ортогональные операторы A: $\mathbb{C}a^\oplus \to \mathbb{C}a^\oplus$ и B: $\mathbb{C}a^2 \to \mathbb{C}a^2$ обладают тем свойством, что*

$$B(xu) = Bx \cdot Au \tag{11}$$

для любых элементов $x \in \mathbb{C}a^2$, $u \in \mathbb{C}a^\oplus$, то эти операторы необходимо унимодулярны и существует один и только один элемент $a \in \mathrm{Spin}(9)$, для которого

$$A = a^T, \quad B = a^R. \tag{12}$$

Докажем предварительно следующую лемму:

Лемма 4. *Если B — такой ортогональный оператор $\mathbb{C}a^2 \to \mathbb{C}a^2$, что*

$$B(xu) = Bx \cdot u \tag{13}$$

для любых элементов $x \in \mathbb{C}\mathrm{a}^2$ *и* $u \in \mathbb{C}\mathrm{a}$ **(т. е. при** $u = \{0, \rho\}$, *где* $\rho \in \mathbb{C}\mathrm{a}$), *то* $B = \pm E$.

Доказательство. Пусть

$$Bx = \begin{cases} \{C\xi, C_1\xi\}, & \text{если} \quad x = \{\xi, 0\}, \\ \{D_1\eta, D\eta\}, & \text{если} \quad x = \{0, \eta\}, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$Bx = \{C\xi + D_1\eta, C_1\xi + D\eta\}, \quad \text{если} \quad x \in \{\xi, \eta\}.$$

В этих обозначениях соотношение (13) при $u = \{0, \rho\}$ приобретает вид

$$\{C(\bar\rho\eta) + D_1(\bar\xi\bar\rho), C_1(\bar\rho\bar\eta) + D(\bar\xi, \bar\rho)\} = \\ = \{\bar\rho(\overline{C_1\xi + D\eta}), (\overline{C\xi + D_1\eta})\bar\rho\},$$

откуда следует (полагаем сначала $\xi = 0$, а затем $\eta = 0$), что

$$C(\bar\rho\bar\eta) = \bar\rho \cdot \overline{D\eta}, \quad C_1(\bar\rho\bar\eta) = \overline{D_1\eta} \cdot \bar\rho,$$
$$D_1(\bar\xi\bar\rho) = \bar\rho \cdot \overline{C_1\xi}, \quad D(\bar\xi\bar\rho) = \overline{C\xi} \cdot \bar\rho.$$

При $\rho = 1$ мы получаем отсюда, что

$$D_1\bar\xi = \overline{C_1\xi}, \quad D\bar\xi = \overline{C\xi}$$

и, следовательно (мы заменяем $\bar\rho$ на ρ, а $\bar\eta$ на ξ), что

$$C(\rho\xi) = \rho \cdot C\xi, \quad C_1(\rho\xi) = C_1\xi \cdot \rho. \tag{14}$$

Поэтому $C\rho = \rho c$ и $C_1\rho = c_1\rho$, где $c = C1$, $c_1 = C_1 1$, и, значит, тождества (14) приобретают вид

$$\rho\xi \cdot c = \rho \cdot \xi c, \quad c_1 \cdot \rho\xi = c_1\rho \cdot \xi.$$

Как мы уже знаем, из первого тождества следует, что $c \in \mathbb{R}$. Полагая же во втором $c_1 = u + ve$, $\rho = w$ и $\xi = e$, где $u, v, w \in \mathbb{H}$, и учитывая, что $(u + ve) \cdot we = -\bar w v + wu \cdot e$ и $(u + ve)e \cdot w = -\bar w u - wv \cdot e$, мы получим в алгебре $\mathbb{H}$ соотношения $\bar w v = \bar w u$, $wu = -wv$, которые при любом w возможны только при $u = v = 0$, т. е. при $c_1 = 0$. Этим доказано, что $C_1 = 0$ (и, значит, $D_1 = 0$) и что оператор C совпадает с оператором D и является оператором умножения на вещественное число c. Значит, оператором умножения на c является и оператор B, что в силу ортогональности этого оператора возможно только при $c = \pm 1$. □

Доказательство предложения 5. Если оператор A унимодулярен, и потому существует такой элемент $a \in \mathrm{Spin}(9)$, что $A = a^T$, то для оператора $B \circ (a^R)^{-1}$ выполнено соотношение (13) (даже для любых u) и, следовательно, согласно лемме 4, $B = \pm a^R = (\pm a)^R$. Поскольку $(-a)^T = a^T$, это доказывает равенства (11). Единственность элемента a в этих равенствах следует из того, что равенство $b^T = a^T$ возможно только при $b = \pm a$, а $(-a)^R = -a^R \neq a^R$.

Таким образом, для завершения доказательства предложения 5 осталось лишь доказать, что тождество (11) может иметь место только для унимодулярного оператора A. Но если это тождество выполнено для какого-то не унимодулярного ортогонального оператора A, то оно, очевидно, выполнено и для любого другого такого оператора (конечно, с другим B). Поэтому достаточно привести к противоречию предположение, что тождество (11) имеет место для оператора A: $u \mapsto \bar{u}$, где $\bar{u} = \{-r, \rho\}$, если $u = \{r, \rho\}$, т. е. предположение о существовании такого ортогонального оператора B: $\mathbb{C}\mathrm{a}^2 \to \mathbb{C}\mathrm{a}^2$, что

$$B(xu) = Bx \cdot \bar{u}. \tag{15}$$

Но при $u = \{0, \rho\}$ тождество (15) совпадает с тождеством (13) и потому, согласно лемме 4, $B = \pm E$. Следовательно, тождество (15) равносильно тождеству $xu = x\bar{u}$, из которого вытекает абсурдное равенство $u = \bar{u}$. Это завершает доказательство предложения 5. □

Кроме самих октав, можно, например, рассматривать матрицы, элементами которых являются октавы. Поскольку в алгебре $\mathbb{C}\mathrm{a}$ имеется сопряжение, для любой октавной матрицы X определена *эрмитово сопряженная матрица* X^*, получающаяся из транспонированной матрицы X^T, если все ее элементы заменить сопряженными октавами. По аналогии с комплексным случаем октавная матрица X, для которой $X^* = X$, называется *эрмитовой*.

Определив произведение XY октавных матриц X и Y обычной формулой, мы немедленно получим (проведя выкладку, полностью повторяющую соответствующее вычисление для комплексных матриц), что, так же как и для комплексных матриц, для любых октавных матриц X и Y имеет место равенство $(XY)^* = Y^*X^*$, откуда непосредственно следует, что совокупность всех эрмитовых октавных матриц данного порядка n является алгеброй относительно *йорданова умножения*

$$X \circ Y = \frac{XY + YX}{2}.$$

Эта алгебра коммутативна и унитальна. Ее единицей является единичная матрица E.

Мы изучим эту алгебру при $n = 3$. Обозначать ее мы будем символом $\mathbb{Al}$ в честь американского математика Алберта, одним из первых обратившего на нее внимание.

Замечание 6. Операция йорданова умножения имеет смысл в любой алгебре. Она, очевидно, коммутативна, а в ассоциативной алгебре удовлетворяет тождеству

$$(x^2 \circ y) \circ x = x^2 \circ (y \circ x), \tag{16}$$

где $x^2 = x \circ x = xx$. Алгебры с коммутативным умножением, удовлетворяющим этому тождеству, называются *йордановыми алгебрами.* (Кстати сказать, тождество (16), как было показано выше при доказательстве леммы 1, выполнено в любой альтернативной алгебре; поэтому коммутативная альтернативная алгебра йорданова.) Конечно, поскольку алгебра октав неассоциативна, нет никаких общих причин, чтобы алгебра октавных эрмитовых матриц порядка n была йордановой алгеброй. Тем не менее оказывается, что из-за альтернативности алгебры $\mathbb{C}a$ эта алгебра при $n \leqslant 3$ все же йорданова, причем, как показал Алберт, при $n = 3$ она не может быть получена ни из какой ассоциативной алгебры. Это объясняет особую роль алгебры $\mathbb{Al}$ и наш интерес к ней. Однако йордановость этой алгебры нам не понадобится и доказывать мы ее не будем.

Любой элемент X алгебры $\mathbb{Al}$ единственным образом представляется в виде

$$X = a_1E_1 + a_2E_2 + a_3E_3 + X_1(\xi_1) + X_2(\xi_2) + X_3(\xi_3), \tag{17}$$

где

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и

$$X_1(\xi)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\xi\\0&\bar\xi&0\end{pmatrix},\quad X_2(\xi)=\begin{pmatrix}0&0&\bar\xi\\0&0&0\\\xi&0&0\end{pmatrix},\quad X_3(\xi)=\begin{pmatrix}0&\xi&0\\\bar\xi&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

причем, как показывает автоматическое вычисление,

$$(18)\qquad E_i\circ E_j=\begin{cases}E_j, & \text{если}\quad j=i,\\ 0, & \text{если}\quad j\neq i,\end{cases}$$

$$(19)\qquad E_i\circ X_j(\xi)=\begin{cases}0, & \text{если}\quad j=i,\\ \frac{1}{2}X_j(\xi), & \text{если}\quad j\neq i,\end{cases}$$

$$(20)\qquad X_i(\xi)\circ X_j(\eta)=\begin{cases}(\xi,\eta)(E-E_i), & \text{если}\quad j=i,\\ X_{i+2}(\overline{\xi\eta}), & \text{если}\quad j=i+1\end{cases}$$

(в последней формуле имеется в виду, что индексы приводятся по модулю 3; поскольку в силу этого соглашения $i=j+1$ при $j=i+2$, случай $j=i+2$ сводится к случаю $j=i+1$).

Это полностью определяет алгебраическое строение алгебры $\mathbb{A}\mathrm{l}$.

Одной из наиболее важных характеристик произвольной алгебры является строение множества ее *идемпотентов*, т. е. элементов x, для которых $x^2=x$. Для алгебры $\mathbb{A}\mathrm{l}$ мы изучим множество всех ее идемпотентов X, след $\operatorname{Tr}X$ которых равен 1. Такие идемпотенты мы будем называть *примитивными идемпотентами*.

Для элемента (17) условие $\operatorname{Tr}X=1$ означает, что

$$(21)\qquad a_1+a_2+a_3=1,$$

а условие $X^2=X$ сводится к шести уравнениям

$$\left.\begin{aligned}&a_i^2+|\xi_{i+1}|^2+|\xi_{i+2}|^2=a_i,\\ &\bar\xi_{i+2}\bar\xi_{i+1}+(a_{i+1}+a_{i+2})\xi_i=\xi_i,\end{aligned}\right\}\quad i=1,2,3 \bmod 3,$$

равносильным в силу условия (21) уравнениям

$$\left.\begin{aligned}&(22)\qquad a_i(a_{i+1}+a_{i+2})=|\xi_{i+1}|^2+|\xi_{i+2}|^2,\\ &(23)\qquad a_i\bar\xi_i=\xi_{i+1}\xi_{i+2},\end{aligned}\right\}\quad i=1,2,3 \bmod 3.$$

Из уравнений (23) следует, что $a_i|\xi_i|^2 = \xi_i\xi_{i+1}\xi_{i+2}$ и одновременно что $a_i|\xi_i|^2 = \xi_{i+1}\xi_{i+2}\xi_i$. Следовательно, вещественное число $\lambda = \xi_i\xi_{i+1}\xi_{i+2}$ не меняется при замене i на $i+1$ и, значит, одно и тоже для всех i. При этом

(24) $$a_i|\xi_i|^2 = \lambda \quad \text{для каждого} \quad i = 1, 2, 3.$$

Теперь легко видеть, что

(25) $$|\xi_i|^2 = a_{i+1}a_{i+2} \quad \text{для любого} \quad i = 1, 2, 3 \bmod 3.$$

Действительно, умножив уравнение (22) на $a_{i+1}a_{i+2}$, мы в силу (24) получим равенство

$$a_ia_{i+1}a_{i+2}(a_{i+1}+a_{i+2}) = a_{i+2}\lambda + a_{i+1}\lambda,$$

из которого при $a_{i+1}+a_{i+2} \neq 0$, т. е. при $a_i \neq 1$, вытекает, что $\lambda = a_ia_{i+1}a_{i+2}$. Следовательно, если, кроме того, $a_i \neq 0$, то (25) следует из (24). Если же $a_i = 0$ или $a_{i+1}+a_{i+2} = 0$, то, как непосредственно вытекает из (22), $\xi_{i+1} = \xi_{i+2} = 0$, и потому (25) следует из соотношения (22) для $i+1$. □

Обратно, если условия (25) выполнены для всех i, то для всех i выполнены условия (22). Этим доказано, что *матрица $X \in \mathbb{A}$ тогда и только тогда является примитивным идемпотентом, когда ее элементы удовлетворяют условиям* (21), (23) *и* (25).

Заметим, что из (25) и (21) непосредственно вытекает, что для любого $i = 1, 2, 3$ имеет место неравенство $a_i > 0$.

Можно без особого труда показать, что при $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{C}$ уравнения (21), (23) и (25) определяют многообразие, диффеоморфное комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ (диффеоморфизм $[z_1 : z_2 : z_3] \longmapsto (\xi_1, \xi_2, \xi_3, a_1, a_2, a_3)$ определяется формулами

$$\xi_i = \frac{z_{i+1}\bar{z}_{i+2}}{|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2}, \quad a_i = \frac{|z_i|^2}{|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2},$$

где $i = 1, 2, 3 \bmod 3$), а при $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{H}$ — многообразие, диффеоморфное кватернионной проективной плоскости $\mathbb{H}P^2$ (проективное n-мерное пространство $\mathscr{A}P^n$ над алгеброй $\mathscr{A}$ определяется для любой ассоциативной алгебры с делением $\mathscr{A}$ — и, в частности, для алгебры кватернионов $\mathbb{H}$ — как фактормножество множества $\mathscr{A}^{n+1}\setminus\{0\}$ по отношению пропорциональности векторов;

ассоциативность необходима для транзитивности этого отношения). На этом основании множество всех примитивных идемпотентов алгебры $\mathbb{A}1$ называется *октавной проективной плоскостью* и обозначается символом $\mathbb{C}aP^2$. (Для этой терминологии есть и более глубокие основания; например, см. [13], в $\mathbb{C}aP^2$ можно определить «прямые», являющиеся на самом деле восьмимерными сферами, для которых верны аксиомы инцидентности проективной геометрии; но все это лежит за рамками нашего изложения.)

Пусть U_i, $i = 1, 2, 3$, — открытое подмножество проективной плоскости $\mathbb{C}aP^2$, состоящее из точек $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, a_1, a_2, a_3)$, для которых $a_i \neq 0$. Легко видеть, что это множество диффеоморфно произведению $\mathbb{C}a \times \mathbb{C}a \approx \mathbb{R}^{16}$ (например, при $i = 3$ диффеоморфизм $\mathbb{C}a \times \mathbb{C}a \to U_3$ задается формулами

$$\xi_1 = \frac{\eta_2}{1+|\eta_1|^2+|\eta_2|^2}, \quad \xi_2 = \frac{\eta_1}{1+|\eta_1|^2+|\eta_2|^2},$$

$$\xi_3 = \frac{\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2}{1+|\eta_1|^2+|\eta_2|^2}, \quad a_1 = \frac{|\eta_1|^2}{1+|\eta_1|^2+|\eta_2|^2},$$

$$a_2 = \frac{|\eta_2|^2}{1+|\eta_1|^2+|\eta_2|^2}, \quad a_3 = \frac{1}{1+|\eta_1|^2+|\eta_2|^2},$$

где $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{C}a$) и потому односвязно. Поскольку пересечения $U_1 \cap U_2$ и $(U_1 \cap U_2) \cap U_3$, очевидно, связны (первое диффеоморфно произведению $\mathbb{C}a \times (\mathbb{C}a \setminus \{0\})$, а второе — произведению $(\mathbb{C}a \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}a \setminus \{0\})$), $\mathbb{C}aP^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, отсюда следует, что *октавная проективная плоскость* $\mathbb{C}aP^2$ *является связным и односвязным многообразием* (размерности 16).