Лекция 18

СЛЕДНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ. — ФУНКЦИОНАЛ КИЛЛИНГА. — СЛЕДНЫЙ ФУНКЦИОНАЛ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ. — ЖОРДАНОВО РАЗЛОЖЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА. — ЖОРДАНОВО РАЗЛОЖЕНИЕ ПРИСОЕДИНЕННОГО ОПЕРАТОРА. — ТЕОРЕМА КАРТАНА О ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ. — ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КРИТЕРИЯ КАРТАНА РАЗРЕШИМОСТИ АЛГЕБРЫ ЛИ. — ЛИНЕЙНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ С НЕВЫРОЖДЕННЫМ СЛЕДНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ. — ПОЛУПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ. — КРИТЕРИЙ КАРТАНА ПОЛУПРОСТОТЫ. — ОПЕРАТОРЫ КАЗИМИРА.

Продолжим изучение линейных алгебр Ли, начатое в предыдущей лекции.

Из свойств следа немедленно вытекает, что формула

$$\boldsymbol{t}(A, B) = \operatorname{Tr} AB$$

определяет на любой линейной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ некоторый билинейный симметрический функционал $\boldsymbol{t}$. Мы будем называть этот функционал *следным функционалом* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Билинейный функционал $\boldsymbol{s}$ на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ называется *инвариантным* (нам нет нужды объяснять здесь происхождение этого названия), если

$$\boldsymbol{s}([x, y], z) = \boldsymbol{s}(x, [y, z])$$

для любых элементов $x, y, z \in \mathfrak{g}$, т. е. если все линейные операторы вида $\operatorname{ad} y$, $y \in \mathfrak{g}$, кососимметричны по отношению к s.

Так как для любых операторов A, B и C след оператора $[A, B]C = ABC - BAC$ равен следу оператора $A[B, C] = ABC - ACB$, то *следный функционал любой линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ инвариантен.*

Пусть $\mathfrak{r}$ — радикал линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и пусть $A, B \in \mathfrak{g}$ и $C \in \mathfrak{r}$. Так как $[B, C] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$, то оператор $[B, C]$ нильпотентен. Так как $\mathfrak{r}$ является идеалом, то подпространство $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{g}$, порожденное $\mathfrak{r}$ и A, обладает тем свойством, что $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{r}$. Следовательно, $\mathfrak{a}$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$ и притом разрешимой. Так как $A \in \mathfrak{a}$, $[B, C] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{r} \subset \mathfrak{a}$, алгебра Ли $\mathfrak{a}$ разрешима и оператор $[B, C]$ нильпотентен, то оператор $A[B, C]$ также нильпотентен. Поэтому его след равен нулю, т. е. $\boldsymbol{t}(A, [B, C]) = 0$. Но тогда в силу инвариантности $\boldsymbol{t}([A, B], C) = 0$. Этим доказано, что *в любой линейной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ идеалы $\mathfrak{g}^2$ и $\mathfrak{r}$ ортогональны по отношению к следному функционалу $\boldsymbol{t}$.*

В условной, но наглядной записи

$$\boldsymbol{t}(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{r}) = 0.$$

В частности, при $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}$ мы получаем отсюда, что *в линейной разрешимой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ имеет место равенство*

$$\boldsymbol{t}(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}) = 0,$$

т. е. по отношению к следному функционалу идеал $\mathfrak{g}^2$ ортогонален всей алгебре $\mathfrak{g}$.

Чтобы получить аналогичные результаты для произвольной (вообще говоря, не линейной) алгебры Ли $\mathfrak{g}$, мы перейдем к линейной алгебре Ли $\mathfrak{g}' = \operatorname{ad}\mathfrak{g}$. Следный функционал, определенный на этой линейной алгебре, мы перенесем в алгебру Ли $\mathfrak{g}$ посредством гомоморфизма ad. Другими словами, мы определим на $\mathfrak{g}$ билинейный симметрический функционал $\boldsymbol{t}_{\mathfrak{g}}$ формулой

$$\boldsymbol{t}_{\mathfrak{g}}(x, y) = \boldsymbol{t}(\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y) = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y).$$

Определение 1. Функционал $\boldsymbol{t}_{\mathfrak{g}}$ называется *функционалом Киллинга* алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Так как ad является гомоморфизмом алгебр Ли, то *функционал Киллинга инвариантен.*

Для любой эффективно заданной алгебры Ли функционал Киллинга вычисляется обычно без каких-либо затруднений.

Пример 1. Найдем функционал Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n)$ всех матриц порядка n. Базис этой алгебры составляют матричные единицы E_{ij}.

Так как $E_{ij}E_{\alpha\beta} = \delta_{j\alpha}E_{i\beta}$, то

(1) $$[X, E_{\alpha\beta}] = \sum_{i=1}^{n} (x_{i\alpha}E_{i\beta} - x_{\beta i}E_{\alpha i}), \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, n,$$

для любой матрицы $X = \sum_{i, j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}$ из $\mathfrak{gl}(n)$, так что

$$(\operatorname{ad} X)E_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{n} (x_{i\alpha}E_{i\beta} - x_{\beta i}E_{\alpha i})$$

в алгебре Ли $\mathfrak{gl}(n)$.

Следовательно,

$$(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y) E_{\alpha\beta} = \sum_{i, j=1}^{n} (x_{i\alpha}y_{ji}E_{j\beta} + x_{\beta i}y_{ij}E_{\alpha j}) - \\ - \sum_{i, j=1}^{n} (x_{i\alpha}y_{\beta j} + x_{\beta j}y_{i\alpha}) E_{ij},$$

и потому

$$\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} X \circ \operatorname{ad} Y) = n \sum_{i, j=1}^{n} (x_{ij}y_{ji} + x_{ji}y_{ij}) - 2 \sum_{i, j=1}^{n} x_{ii}y_{jj} = \\ = 2n \operatorname{Tr}(XY) - 2 \operatorname{Tr} X \cdot \operatorname{Tr} Y.$$

Этим доказано, что *функционал Киллинга алгебры Ли* $\mathfrak{gl}(n)$ *выражается формулой*

$$t_{\mathfrak{gl}(n)}(X, Y) = 2n \operatorname{Tr}(XY) - 2 \operatorname{Tr} X \cdot \operatorname{Tr} Y,$$

т. е. формулой

$$t_{\mathfrak{gl}(n)}(X, Y) = 2nt(X, Y) - 2t(X, E) \cdot t(Y, E).$$

Обратим внимание, что *этот функционал вырожден*, т. е. что $\mathfrak{gl}(n)^{\perp} \neq 0$. Действительно, ясно, что для любой скалярной матрицы aE имеет место тождество $t_{\mathfrak{gl}(n)}(X, aE) = 0$, $X \in \mathfrak{gl}(n)$, означающее, что $aE \in \mathfrak{gl}(n)^{\perp}$.

Пример 2. В алгебре Ли $\mathfrak{sl}(n)$ матриц порядка n со следом, равным нулю, базис составляют матрицы

$$E_{ij}^{(0)} = \begin{cases} E_{ij}, & \text{если } i \neq j, \\ E_{ii} - E_{nn}, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

где $i, j = 1, \ldots, n$ и $(i, j) \neq (n, n)$. Матрица $X = \sum_{i, j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}$ из $\mathfrak{sl}(n)$ выражается через этот базис по формуле

$$X = \sum_{\substack{i, j=1 \\ (i, j)\neq(n, n)}} x_{ij}E_{ij}^{(0)}.$$

В силу соотношения (1) отсюда непосредственно вытекает, что

$$(\operatorname{ad} X) E_{\alpha\beta}^{(0)} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(x_{i\alpha}E_{i\beta}^{(0)} - x_{\beta i}E_{\alpha i}^{(0)}\right), & \text{если } \alpha \neq \beta, \\ \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq\alpha}}^{n-1} \left(x_{i\alpha}E_{i\alpha}^{(0)} - x_{\alpha i}E_{\alpha i}^{(0)}\right) - \sum_{i=1}^{n-1} \left(x_{in}E_{in}^{(0)} - x_{ni}E_{ni}^{(0)}\right), & \text{если } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Произведя необходимые вычисления, мы для функционала Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$ получим отсюда формулу

$$\mathbf{t}_{\mathfrak{sl}(n)}(X, Y) = 2n \operatorname{Tr}(XY) = 2n\mathbf{t}(X, Y).$$

Таким образом, *для алгебры Ли $\mathfrak{sl}(n)$ функционал Киллинга $\mathbf{t}_{\mathfrak{sl}(n)}$ и следный функционал $\mathbf{t}$ отличаются лишь множителем.*

Теперь легко видеть, что, в отличие от предыдущего случая, *функционал $\mathbf{t}_{\mathfrak{sl}(n)}$ не вырожден*, т. е. $\mathfrak{sl}(n)^{\perp} = 0$. Действительно, если $\operatorname{Tr}(XY) = 0$ для любой матрицы $Y \in \mathfrak{sl}(n)$, то, в частности, $x_{ij} = \operatorname{Tr}(XE_{ij}) = 0$ при $i \neq j$ и $x_{ii} - x_{nn} = \operatorname{Tr}(X(E_{ii} - E_{nn})) = 0$ для любого i. Поэтому матрица X имеет вид aE и, значит, ввиду условия $\operatorname{Tr} X = 0$ равна нулю.

Пример 3. В алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$ кососимметрических матриц порядка n базис состоит из матриц

$$E_{[i, j]} = \frac{E_{ij} - E_{ji}}{2}, \qquad i < j,$$

причем в силу той же формулы (1) для любой матрицы $X = \sum_{i, j=1}^{n} x_{ij}E_{ij}$ из $\mathfrak{so}(n)$ имеет место формула

$$(\operatorname{ad} X) E_{[\alpha, \beta]} = \sum_{i=1}^{n} (x_{i\alpha}E_{[i, \beta]} - x_{\beta i}E_{[\alpha, i]}).$$

Для функционала $t_{\mathfrak{so}(n)}$ отсюда вытекает формула

$$t_{\mathfrak{so}(n)}(XY)=(n-1)\operatorname{Tr}(XY)=(n-1)t(X, Y).$$

Таким образом, *для алгебры Ли $\mathfrak{so}(n)$ функционалы $t_{\mathfrak{so}(n)}$ и t также отличаются лишь множителем.*

Поскольку $x_{ij}=\operatorname{Tr}(XE_{[i,j]})$ для любой матрицы $X=\sum\limits_{i,j=1}^{n}x_{ij}E_{ij}$ из $\mathfrak{so}(n)$, отсюда, в частности, следует, что, как и в предыдущем случае, *функционал $t_{\mathfrak{so}(n)}$ не вырожден.*

Конструкция функционала Киллинга допускает весьма далекое обобщение.

Определение 2. *Представлением* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в линейном пространстве $\mathscr{V}$ (называемом *пространством представления*) называется произвольный гомоморфизм $\rho\colon \mathfrak{g}\to[\operatorname{End}\mathscr{V}]$ алгебры $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $[\operatorname{End}\mathscr{V}]$ линейных операторов на $\mathscr{V}$.

Заметим, что задание представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяет в пространстве $\mathscr{V}$ этого представления структуру модуля (см. лекцию 5) над алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (по формуле $xv=\rho(x)v$, где $x\in\mathfrak{g}$, $v\in\mathscr{V}$) и, обратно, любой модуль над $\mathfrak{g}$ является пространством представления ρ, для которого $\rho(x)v=xv$, $x\in\mathfrak{g}$, $v\in\mathscr{V}$. Таким образом, понятия модуля над алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ по существу идентичны. Сохранение этих обоих дублирующих друг друга понятий основывается исключительно на традиции.

Примером представления служит гомоморфизм ad. Это представление называется *присоединенным.*

Любое представление ρ определяет по формуле

$$t_\rho(x, y)=t(\rho(x), \rho(y))=\operatorname{Tr}(\rho(x)\rho(y))$$

симметрический инвариантный билинейный функционал на $\mathfrak{g}$ называемый *следным функционалом представления.*

Таким образом, функционал Киллинга является не чем иным, как следным функционалом присоединенного представления:

$$t_{\mathfrak{g}}=t_{\mathrm{ad}}.$$

Следный же функционал линейной алгебры Ли будет в этой терминологии следным функционалом тождественного представления:

$$t = t_{\mathrm{id}}.$$

Предложение 1. В каждой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ идеалы $\mathfrak{g}^2$ и $\mathfrak{r}$ ортогональны относительно следного функционала любого представления ρ. В частности, эти идеалы ортогональны относительно функционала Киллинга.

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathfrak{g}$ и $z \in \mathfrak{r}$. Нам надо доказать, что $t_\rho([x, y], z) = 0$. Но, по определению,

$$t_\rho([x, y], z) = t(\rho[x, y], \rho z) = t([\rho x, \rho y], \rho z)$$

и потому $t_\rho([x, y], z) = 0$, так как $[\rho x, \rho y]$ принадлежит идеалу $(\rho\mathfrak{g})^2$ линейной алгебры Ли $\rho\mathfrak{g}$, а ρz — ее радикалу. □

Следствие 1. В разрешимой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ идеал $\mathfrak{g}^2$ ортогонален (по отношению к функционалу Киллинга) всей алгебре:

$$t_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}) = 0. \quad \square$$

Оказывается, что это необходимое условие разрешимости также и достаточно:

Предложение 2 (критерий Картана разрешимости). *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда разрешима, когда $t_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}) = 0$.*

Доказательство этого предложения использует ряд фактов из линейной алгебры, с изложения которых мы и начнем.

Для простоты мы пока будем предполагать поле $\mathbb{K}$ алгебраически замкнутым (скажем, полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел).

Пусть A — произвольный линейный оператор в конечномерном линейном пространстве $\mathscr{V}$. Приведем этот оператор к жордановой нормальной форме (см. II, 16), т. е. найдем в $\mathscr{V}$ базис, в котором матрица оператора A является прямой суммой жордановых клеток вида

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Заменив в каждой из этих клеток единицы нулями, мы получим диагонализируемый оператор A_d, имеющий те же характеристические корни, а значит, и тот же характеристический многочлен, что и оператор A. Оператор $A_n = A - A_d$ получается, очевидно, заменой всех корней λ нулями. Этот оператор нильпотентен и перестановочен с оператором A_d (а значит, и с оператором A). Более того, легко видеть, что существует такой многочлен $p(T)$, что $A_d = p(A)$ (им будет любой многочлен, обладающий тем свойством, что $p(\lambda_i) = \lambda_i$ и $p^{(k)}(\lambda_i) = 0$ при $k = 1, \ldots, n_i - 1$ для каждого характеристического корня λ_i оператора A, где n_i — кратность корня λ_i) и, значит, такой многочлен $q(T)$, что $A_n = q(A)$ (достаточно положить $q(T) = T - p(T)$). Поэтому любой оператор, перестановочный с оператором A, будет перестановочен и с операторами A_d и A_n.

Если теперь $A = A' + A''$, где A' — диагонализируемый оператор, A'' — нильпотентный оператор и операторы A' и A'' перестановочны друг с другом, а значит, и с оператором A, то операторы A' и A'' будут перестановочны с операторами A_d и A_n и будет иметь место равенство $A' - A_d = A_n - A''$. Но легко видеть, что разность двух перестановочных диагонализируемых (нильпотентных) операторов будет диагонализируемым (соответственно нильпотентным) оператором. Поскольку единственным диагонализируемым и одновременно нильпотентным оператором является нулевой оператор, отсюда следует, что равенство $A' - A_d = A_n - A''$ возможно только тогда, когда $A' = A_d$ и $A'' = A_n$.

Этим доказана следующая лемма:

Лемма 1. *Любой оператор A, действующий в конечномерном линейном пространстве $\mathscr{V}$, единственным образом представляется в виде суммы*

$$A = A_d + A_n \tag{2}$$

таких операторов A_d и A_n, что:

1) *оператор A_d диагонализируем;*
2) *оператор A_n нильпотентен;*
3) *операторы A_d и A_n перестановочны друг с другом и с оператором A.*

При этом оба оператора A_d и A_n являются многочленами от оператора A. □

Оператор A_n называется *нильпотентной частью* оператора A, а оператор A_d — *диагонализируемой частью* оператора A. (Бурбаки называет A_d *полупростой частью* оператора A.) Разложение (2) называется *жордановым разложением* оператора A.

Согласно общим определениям каждому линейному оператору $A: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ может быть сопоставлен линейный оператор $\operatorname{ad} A$, действующий в линейном пространстве $\operatorname{End}\mathscr{V}$ по формуле

$$(\operatorname{ad} A) X = AX - XA, \qquad X \in \operatorname{End}\mathscr{V}.$$

Лемма 2. *Имеют место равенства*

$$(\operatorname{ad} A)_d = \operatorname{ad} A_d, \quad (\operatorname{ad} A)_n = \operatorname{ad} A_n.$$

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства $\mathscr{V}$, в котором матрица оператора A_d диагональна. Это означает, что

$$A_d = \lambda_1 E_{11} + \ldots + \lambda_n E_{nn},$$

где E_{ij} — базисные операторы, определенные формулой

$$E_{ij} e_k = \begin{cases} e_i, & \text{если} \quad k = j, \\ 0, & \text{если} \quad k \neq j \end{cases}$$

(эти операторы составляют базис линеала $\operatorname{End}\mathscr{V}$, и их матрицами в базисе $e_1, \ldots, e_n$ являются матричные единицы E_{ij}). Так как

$$E_{ij} E_{ab} = \begin{cases} E_{ib}, & \text{если} \quad j = a, \\ 0, & \text{если} \quad j \neq a, \end{cases}$$

то

$$(\operatorname{ad} A_d) E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}.$$

Это означает, что в базисе $\{E_{ij}\}$ матрица оператора $\operatorname{ad} A_d$ диагональна (с элементами $\lambda_i - \lambda_j$ по главной диагонали). Таким образом, оператор $\operatorname{ad} A_d$ диагонализируем.

С другой стороны, ясно, что для любого $k \geqslant 0$ и любого $X \in \operatorname{End}\mathscr{V}$ оператор $(\operatorname{ad} A_n)^k X$ является суммой операторов $\pm A_n^i X A_n^j$, где $i + j = k$. Поэтому, если $A_n^m = 0$, то $(\operatorname{ad} A_n)^{2m-1} = 0$, т. е. оператор $\operatorname{ad} A_n$ нильпотентен.

Наконец, так как ad является гомоморфизмом алгебр Ли, то $[\operatorname{ad} A_d, \ \operatorname{ad} A_n] = \operatorname{ad}[A_d, \ A_n] = 0$ и $\operatorname{ad} A_d +$

$+ \operatorname{ad} A_n = \operatorname{ad}(A_d + A_n) = \operatorname{ad} A$, т. е. операторы $\operatorname{ad} A_d$ и $\operatorname{ad} A_n$ перестановочны и их сумма равна оператору $\operatorname{ad} A$.

Таким образом, операторы $\operatorname{ad} A_d$ и $\operatorname{ad} A_n$ обладают по отношению к оператору $\operatorname{ad} A$ характеристическими свойствами 1)—3) из леммы 1. Поэтому $\operatorname{ad} A_d = (\operatorname{ad} A)_d$ и $\operatorname{ad} A_n = (\operatorname{ad} A)_n$. □

Следствие. *Операторы* $\operatorname{ad} A_d$ *и* $\operatorname{ad} A_n$ *являются многочленами от оператора* $\operatorname{ad} A$. □

Теперь мы можем доказать наше ключевое предложение о линейных алгебрах Ли:

Предложение 3 (критерий Картана). *Если следный функционал линейной алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *тождественно равен нулю, то алгебра* $\mathfrak{g}$ *разрешима.*

Доказательство. Пусть A — произвольный оператор из $\mathfrak{g}^2$, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — все его собственные значения (характеристические корни), повторенные столько раз, какова их кратность. Предложение 3 немедленно вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Для любого аддитивного отображения* $\beta\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *поля* $\mathbb{K}$ *в себя (т. е. такого, что* $\beta(a+b) = \beta a + \beta b$*) справедливо соотношение*

$$\beta(\lambda_1)\lambda_1 + \ldots + \beta(\lambda_n)\lambda_n = 0.$$

Действительно, поле $\mathbb{K}$ является линейным пространством (бесконечномерным) над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел. Выбрав произвольный базис $\{u_i,\ i \in I\}$ над $\mathbb{Q}$ поля $\mathbb{K}$ (множество индексов I бесконечно, но это ничему не мешает), обозначим i-ю ($i \in I$) координату элемента $u \in \mathbb{K}$ в этом базисе через $\beta_i(u)$. Поскольку $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$, мы можем рассматривать $\beta_i\colon u \mapsto \beta_i(u)$ как (очевидно, аддитивное) отображение $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$. Следовательно, согласно лемме, в поле $\mathbb{K}$ имеет место равенство

$$\beta_i(\lambda_1)\lambda_1 + \ldots + \beta_i(\lambda_n)\lambda_n = 0.$$

Перейдя в этом равенстве к i-й координате, мы получим, что

$$\beta_i(\lambda_1)^2 + \ldots + \beta_i(\lambda_n)^2 = 0,$$

т. е. (поскольку все числа $\beta_i(\lambda_1), \ldots, \beta_i(\lambda_n)$ рациональны) что

$$\beta_i(\lambda_1) = 0, \ldots, \beta_i(\lambda_n) = 0.$$

Поскольку индекс $i \in I$ был произволен, это возможно только при $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$, т. е. когда $A_d = 0$. Следовательно, оператор $A = A_n$ нильпотентен.

Этим доказано, что идеал $\mathfrak{g}^2$ является нильалгеброй Ли. Следовательно, согласно теореме Энгеля, этот идеал нильпотентен, а потому сама алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима. □

Таким образом, для завершения доказательства предложения 3 осталось лишь доказать лемму.

Доказательство леммы. Как и выше, мы без ограничения общности можем считать, что

$$A_d = \lambda_1 E_{11} + \ldots + \lambda_n E_{nn}.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$D = \beta(\lambda_1) E_{11} + \ldots + \beta(\lambda_n) E_{nn}.$$

Если $p(T)$ — такой многочлен, что $p(\lambda_i) = \beta(\lambda_i)$ для всех i, то $D = p(A_d)$ и потому $D = p(q(A))$, где $q(T)$ — такой многочлен, что $q(A) = A_d$. Следовательно, оператор D перестановочен с A, а значит, и с A_n (и с A_d). Но тогда $(DA_n)^k = D^k A_n^k$ для любого $k \geqslant 0$, и потому оператор DA_n нильпотентен. Следовательно, его след равен нулю:

$$\operatorname{Tr} DA_n = 0$$

и, значит,

$$\beta(\lambda_1)\lambda_1 + \ldots + \beta(\lambda_n)\lambda_n = \operatorname{Tr} DA_d = \operatorname{Tr} DA.$$

Таким образом, нам нужно только доказать, что $\operatorname{Tr} DA = 0$.

Так как $A \in \mathfrak{g}^2$, то в алгебре $\mathfrak{g}$ существуют такие операторы $B_1, \ldots, B_s, C_1, \ldots, C_s$, что

$$A = [B_1, C_1] + \ldots + [B_s, C_s],$$

и потому

$$\operatorname{Tr} DA = \operatorname{Tr} D[B_1, C_1] + \ldots + \operatorname{Tr} D[B_s, C_s] =$$
$$= \operatorname{Tr}[D, B_1]C_1 + \ldots + \operatorname{Tr}[D, B_s]C_s.$$

Но

$$(\operatorname{ad} D) E_{ij} = (\beta(\lambda_i) - \beta(\lambda_j)) E_{ij}$$

и, значит, $\operatorname{ad} D = g(\operatorname{ad} A_d)$, где $g(T)$ — такой многочлен, что $g(\lambda_i - \lambda_j) = \beta(\lambda_i) - \beta(\lambda_j)$ для любых i и j (такой многочлен существует, так как при $\lambda_i - \lambda_j = \lambda_a - \lambda_b$ имеет место равенство

$$\beta(\lambda_i) - \beta(\lambda_j) = \beta(\lambda_i - \lambda_j) = \beta(\lambda_a - \lambda_b) = \beta(\lambda_a) - \beta(\lambda_b)).$$

Поскольку $\operatorname{ad} A_d$ является, как мы знаем, многочленом от $\operatorname{ad} A$, этим доказано, что существует такой многочлен $f(T)$, что $\operatorname{ad} D = f(\operatorname{ad} A)$. Так как $A, B_i \in \mathfrak{g}$, то $[A, B_i] \in \mathfrak{g}$, т. е. $(\operatorname{ad} A)B_i \in \mathfrak{g}$. Следовательно, $(\operatorname{ad} A)^m B_i \in \mathfrak{g}$ для любого $m \geqslant 0$ и потому $(\operatorname{ad} D)B_i = f(\operatorname{ad} A)B_i \in \mathfrak{g}$, т. е. $[D, B_i] \in \mathfrak{g}$. Значит, согласно условию,

$$\operatorname{Tr}[D, B_i]C_i = t([D, B_i], C_i) = 0$$

для любого $i = 1, \ldots, s$, и потому $\operatorname{Tr} DA = 0$. $\square$

Заметим, что *предложение* 3 *справедливо для алгебр Ли над любым полем* $\mathbb{K}$ *характеристики* 0 (а не только над алгебраически замкнутым). Действительно, при переходе от поля $\mathbb{K}$ к его алгебраическому замыканию $\overline{\mathbb{K}}$ условие этого предложения сохраняется, а его заключение остается справедливым и над $\mathbb{K}$ (алгебра Ли над $\mathbb{K}$ разрешима, если она разрешима как алгебра над $\overline{\mathbb{K}}$). $\square$

Следствие 1. *Радикал* $\mathfrak{r}$ *произвольной алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *является аннулятором идеала* $\mathfrak{g}^2$ *по отношению к функционалу Киллинга:*

$$\mathfrak{r} = (\mathfrak{g}^2)^{\perp}.$$

Доказательство. Мы уже знаем, что $t_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{r}) = 0$, т. е. что $\mathfrak{r} \subset (\mathfrak{g}^2)^{\perp}$. С другой стороны, образ $\mathfrak{s}$ идеала $(\mathfrak{g}^2)^{\perp}$ в присоединенной алгебре $\operatorname{ad}\mathfrak{g}$ обладает, очевидно, тем свойством, что на $\mathfrak{s}^2$ следный функционал t равен нулю. Поэтому идеал $\mathfrak{s}^2$ разрешим, а значит, разрешим и идеал $(\mathfrak{g}^2)^{\perp}$. Следовательно, $(\mathfrak{g}^2)^{\perp} \subset \mathfrak{r}$. $\square$

Следствие 2. *Алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *разрешима, если*

$$t_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}^2) = 0, \tag{3}$$

т. е., что равносильно, если

$$\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x)^2 = 0 \tag{4}$$

для любого элемента $x \in \mathfrak{g}^2$.

Доказательство. В силу тождества

$$\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x + \operatorname{ad} y)^2 = \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x)^2 + 2\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) + \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} y)^2$$

условие (4) равносильно тому, что для любых двух элементов $x, y \in \mathfrak{g}^2$ имеет место равенство $\operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x \operatorname{ad} y) = 0$, означающее, что следный функционал линейной алгебры Ли $\operatorname{ad}\mathfrak{g}^2$ тождественно равен нулю. Этому же равносильно, по определению, условие (3). Поэтому при выполнении этих условий линейная алгебра Ли $\operatorname{ad}\mathfrak{g}^2$ разрешима. Но тогда разрешима и алгебра $\mathfrak{g}$, поскольку $\mathfrak{g}/\mathfrak{z} \approx \operatorname{ad}\mathfrak{g}$, а алгебра $\operatorname{ad}\mathfrak{g}/\operatorname{ad}\mathfrak{g}^2$ абелева. □

Требование $x \in \mathfrak{g}^2$ в этом следствии существенно.

Пример 4. Рассмотрим трехмерную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ с базисом e_1, e_2, e_3, умножение в которой определено формулами

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = ae_1 + be_2, \quad [e_2, e_3] = ce_1 + de_2,$$

где $ad - bc \neq 0$ и $a^2 + d^2 + 2bc \neq 0$. Для этой алгебры Ли идеал $\mathfrak{g}^2$ является линейной оболочкой элементов e_1, e_2 и потому представляет собой абелеву алгебру Ли. Следовательно, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима. Вместе с тем для любого элемента $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ этой алгебры оператор $\operatorname{ad} x$ имеет (в базисе e_1, e_2, e_3) матрицу

$$\begin{pmatrix} -ax_3 & -cx_3 & ax_1 + cx_2 \\ -bx_3 & -dx_3 & bx_1 + dx_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, значит, оператор $(\operatorname{ad} x)^2$ — матрицу

$$\begin{pmatrix} (a^2+bc)x_3^2 & (a+d)cx_3^2 & -(a^2+cb)x_1x_3 - (a+d)cx_2x_3 \\ (a+d)bx_3^2 & (bc+d^2)x_3^2 & -(a+d)bx_1x_3 - (bc+d^2)x_2x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

со следом $(a^2 + d^2 + 2bc)x_3^2$, равным нулю только при $x_3 = 0$ (т. е. при $x \in \mathfrak{g}^2$).

Теперь мы уже можем доказать предложение 2.

Доказательство предложения 2. Достаточно заметить, что если $t_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}) = 0$, то, тем более $t_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{g}^2) = 0$. □

Рассмотрим теперь линейные алгебры Ли, следный функционал которых не вырожден.

Предложение 4. Линейная алгебра Ли с невырожденным следным функционалом t редуктивна.

Доказательство. Так как $t(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{r}) = 0$ и функционал t инвариантен, то $t(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]) = t(\mathfrak{g}^2, \mathfrak{r}) = 0$, откуда ввиду невырожденности следует, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = 0$, т. е. что

$\mathfrak{r} \subset \mathfrak{z}$. Поэтому, в частности, любой абелев идеал алгебры $\mathfrak{g}$ лежит в $\mathfrak{z}$. Далее, как было показано в предыдущей лекции, любой оператор A из $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}^2$ нильпотентен. Поэтому для каждого оператора B из $\mathfrak{g}$ нильпотентен и оператор AB (поскольку $AB = BA$), и, значит, след $\operatorname{Tr} AB = \mathfrak{t}(A, B)$ этого оператора равен нулю. Ввиду невырожденности функционала $\mathfrak{t}$ это возможно только при $A = 0$. Следовательно, $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{g}^2 = 0$ и, значит, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ редуктивна. □

Обратное утверждение верно только «с точностью до изоморфизма». Именно, можно показать, что *любая редуктивная алгебра Ли изоморфна линейной алгебре с невырожденным следным функционалом*, но это утверждение нам не понадобится и мы его доказывать не будем.

Другое частичное обращение предложения 4 содержится в следующем предложении, которое, напротив, нам будет очень полезно:

Предложение 5. Следный функционал линейной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ невырожден.

Докажем предварительно две леммы.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная алгебра Ли и $\mathfrak{t}$ — симметрический билинейный инвариантный функционал на $\mathfrak{g}$. Тогда для любого идеала $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{g}$ его аннулятор $\mathfrak{a}^\perp$ относительно функционала $\mathfrak{t}$ также является идеалом.

Доказательство. Если $x \in \mathfrak{a}^\perp$, $y \in \mathfrak{g}$ и $z \in \mathfrak{a}$, то

$$\mathfrak{t}([x, y], z) = \mathfrak{t}(x, [y, z]) = 0$$

и потому $[x, y] \in \mathfrak{a}^\perp$. □

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{g}$ — линейная полупростая алгебра, $\mathfrak{a}$ — ее идеал и $\mathfrak{a}^\perp$ — его аннулятор относительно следного функционала $\mathfrak{t}$. Тогда $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp = 0$.

Доказательство. Согласно лемме 3 аннулятор $\mathfrak{a}^\perp$, а значит и пересечение $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$, является идеалом. При этом на идеале $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ следный функционал тождественно равен нулю. Поэтому, согласно предложению 3, идеал $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^\perp$ разрешим и, значит, в силу полупростоты алгебры $\mathfrak{g}$ равен нулю. □

Доказательство предложения 5. Применив лемму 2 к идеалу $\mathfrak{a} = \mathfrak{g}$, мы получим, что $\mathfrak{g}^\perp = 0$. Но это и означает, что функционал $\mathfrak{t}$ невырожден. □

Представление ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется *точным*, если оно является мономорфизмом, т. е. осуществляет изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ с линейной алгеброй $\rho(\mathfrak{g})$. Поскольку следный функционал алгебры $\rho(\mathfrak{g})$ есть не что иное, как следный функционал представления ρ, предложение 5 равносильно утверждению, что *следный функционал любого точного представления полупростой алгебры Ли невырожден.*

В частности, это утверждение применимо к присоединенному представлению ad (оно точно, поскольку центр полупростой алгебры Ли равен нулю). Так как следный функционал присоединенного представления это в точности функционал Киллинга, тем самым доказано, что *функционал Киллинга произвольной полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ невырожден.*

Поэтому для любого идеала $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{g}$ его аннулятор $\mathfrak{a}^{\perp}$ относительно функционала Киллинга $\mathfrak{k}_{\mathfrak{g}}$ имеет дополнительную размерность, т. е.

$$\dim \mathfrak{a} + \dim \mathfrak{a}^{\perp} = \dim \mathfrak{g}.$$

С другой стороны, так как ad осуществляет изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ с линейной алгеброй ad $\mathfrak{g}$, переводящий функционал $\mathfrak{k}_{\mathfrak{g}}$ в следный функционал $\mathfrak{k}$ алгебры ad $\mathfrak{g}$, то ввиду леммы 4 имеет место равенство $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}^{\perp} = 0$.

Следовательно, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}$.

Это утверждение мы сформулируем в виде отдельного предложения:

Предложение 6. *В полупростой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ любой идеал $\mathfrak{a}$ выделяется прямым слагаемым, т. е. существует такой идеал $\mathfrak{a}^{\perp}$, что*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^{\perp}.$$

Дополнительный идеал $\mathfrak{a}^{\perp}$ является аннулятором идеала $\mathfrak{a}$ относительно функционала Киллинга. $\square$

Следствие. *Любой идеал и любая факторалгебра полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ являются полупростыми алгебрами Ли.*

Доказательство. Если аннулятор подпространства относительно невырожденного билинейного функционала является прямым дополнением этого подпространства, то ограничение функционала на подпространстве также, очевидно, невырождено. Поэтому на каждом идеале $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{g}$ функционал Киллинга невырожден. Это означает, что при изоморфизме $\mathrm{ad}\colon \mathfrak{g} \to \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ идеал $\mathfrak{a}$ переходит в линейную алгебру Ли $\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$ с невырожденным следным функционалом. Поэтому, согласно предложению 4, алгебра $\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$, а, значит, и идеал $\mathfrak{a}$ является редуктивной алгеброй Ли, т. е. разлагается в прямую сумму своего центра $\mathfrak{z}$ и полупростого идеала $\mathfrak{m}$. Поскольку прямое слагаемое идеала является, очевидно, идеалом всей алгебры, центр $\mathfrak{z}$ в силу полупростоты алгебры $\mathfrak{g}$ должен быть равен нулю. Следовательно, идеал $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$ полупрост.

Утверждение о факторалгебрах сводится к утверждению об идеалах, поскольку факторалгебра по произвольному идеалу $\mathfrak{a}$ изоморфна дополнительному идеалу $\mathfrak{a}^{\perp}$. □

Из невырожденности функционала Киллинга следует также, что *для любой полупростой алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *имеет место равенство* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2$. Действительно, согласно следствию 1 из предложения 3, аннулятор $(\mathfrak{g}^2)^{\perp}$ идеала $\mathfrak{g}^2$ по отношению к функционалу Киллинга для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равен нулю. Поэтому ввиду невырожденности функционала Киллинга $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}$. □

Условие невырожденности функционала Киллинга не только необходимо, но и достаточно для полупростоты алгебры Ли. Чтобы показать это, мы в первую очередь заметим, что *если следный функционал t_ρ некоторого представления ρ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ невырожден, то представление ρ точное.* Действительно, если $\rho a = 0$, то $t_\rho(a, x) = \mathrm{Tr}(\rho a\, \rho x) = 0$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ и, значит, $a = 0$. □

В частности, если у алгебры Ли $\mathfrak{g}$ невырожден функционал Киллинга, то ее присоединенное представление точно, так что линейная алгебра $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{g}$ (а центр алгебры $\mathfrak{g}$ тривиален). Поскольку при этом изоморфизме следный функционал алгебры $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ соответствует функционалу Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$, этот функционал также невырожден. Следовательно, линейная алгебра $\mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$ редуктивна и, имея тривиальный центр, полупроста. Поэтому полупроста и алгебра $\mathfrak{g} \approx \mathrm{ad}\,\mathfrak{g}$.

Этим доказано следующее предложение:

Предложение 7 (критерий Картана полупростоты). *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда полупроста, когда ее функционал Киллинга невырожден.* □

В силу этого предложения и результатов примеров 1—3 *алгебры Ли* $\mathfrak{sl}(n)$ *и* $\mathfrak{so}(n)$ *полупросты, а алгебра Ли* $\mathfrak{gl}(n)$ *не полупроста.* □

Пусть теперь ρ — произвольное нетривиальное (т. е. такое, что $\rho a \neq 0$ хотя бы для одного элемента $a \in \mathfrak{g}$) представление полупростой алгебры $\mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{k}$ — его ядро. Тогда, согласно предложению 6, в алгебре $\mathfrak{g}$ существует такой идеал $\mathfrak{h} = \mathfrak{k}^{\perp}$, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{h}$. Представление ρ, ограниченное на $\mathfrak{h}$, точно, а так как идеал $\mathfrak{h}$ полупрост (см. следствие из предложения 6), то следный функционал t_ρ представления ρ на идеале $\mathfrak{h}$ невырожден. Поэтому для любого базиса $e_1, \ldots, e_n$ идеала $\mathfrak{h}$ (как линейного пространства над полем $\mathbb{K}$) существует t_ρ-двойственный базис $e^1, \ldots, e^n$, обладающий тем свойством, что

$$t_\rho(e_i, e^j) = \delta_i^j, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Для любого элемента $x \in \mathfrak{g}$ мы положим

$$[x, e_i] = \alpha_i^j(x) e_j, \qquad [x, e^i] = \beta_i^j(x) e_j.$$

Таким образом, $(\alpha_i^j(x))$ — это матрица ограничения линейного оператора $\operatorname{ad} x$ на подпространстве $\mathfrak{h}$ в базисе $e_1, \ldots, e_n$, а $(\beta_i^j(x))$ — его же матрица в базисе $e^1, \ldots, e^n$.

Лемма 5. Для любого элемента $x \in \mathfrak{g}$ *имеют место равенства*

$$\alpha_i^j(x) + \beta_i^j(x) = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Доказательство. Эти равенства являются лишь иной записью утверждения об инвариантности функционала t_ρ (кососимметричности линейного оператора $\operatorname{ad} x$):

$$\alpha_i^j(x) = t_\rho([x, e_i], e^j) = -t_\rho(e_i, [x, e^j]) = -\beta_i^j(x). \quad □$$

Лемма 6. Линейный оператор

$$C = \rho(e_i)\rho(e^i)$$

не зависит от выбора базиса $e_1, \ldots, e_n$.

Доказательство. Для любого другого базиса $e_{i'} = c_{i'}^i e_i$ линеала $\mathfrak{h}$ двойственный базис выражается формулой $e^{j'} = c^{j'}_j e^j$. Поэтому

$$\begin{aligned}\rho\left(e_{i'}\right)\rho\left(e^{i'}\right) &= \delta^{i'}_{j'}\rho\left(e_{i'}\right)\rho\left(e^{j'}\right) = \\ &= \delta^{i'}_{j'}c^{i}_{i'}c^{j'}_{j}\rho\left(e_i\right)\rho\left(e^j\right) = \\ &= \delta^i_j\rho\left(e_i\right)\rho\left(e^j\right) = \\ &= \rho\left(e_i\right)\rho\left(e^i\right). \quad \square\end{aligned}$$

Определение 3. Линейный оператор C называется *оператором Казимира* представления ρ.

Для тривиального представления $\rho = 0$ мы, по определению, положим $C = 0$.

Предложение 8. *Оператор Казимира перестановочен с любым оператором из* $\rho(\mathfrak{g})$:

$$[C, \rho(x)] = 0 \quad \textit{для любого} \quad x \in \mathfrak{g}.$$

При $\rho \neq 0$ след $\operatorname{Tr} C$ оператора Казимира равен размерности n идеала $\mathfrak{h}$, так что этот оператор отличен от нуля (и, более того, ненильпотентен).

Доказательство. По определению

$$\operatorname{Tr} C = \operatorname{Tr}\left(\rho\left(e_i\right)\rho\left(e^i\right)\right) = t_\rho\left(e_i, e^i\right) = \delta^i_i = n.$$

Так как

$$\begin{aligned}\rho(x)C &= \rho(x)\rho(e_i)\rho(e^i) = \\ &= [\rho(x), \rho(e_i)]\rho(e^i) + \rho(e_i)\rho(x)\rho(e^i) = \\ &= \rho([x, e_i])\rho(e^i) + \rho(e_i)\rho(x)\rho(e^i) = \\ &= \alpha^j_i(x)\rho\left(e_j\right)\rho(e^i) + \rho\left(e_i\right)\rho(x)\rho(e^i)\end{aligned}$$

и аналогично

$$C\rho(x) = -\beta^i_j(x)\rho\left(e_j\right)\rho(e^i) + \rho\left(e_i\right)\rho(x)\rho(e^i),$$

то $C\rho(x) - \rho(x)C = 0$ в силу леммы 2. $\square$

Представление ρ называется *неприводимым*, если неприводима линейная алгебра Ли $\rho(\mathfrak{g})$. Такое представление автоматически нетривиально (при $\dim\mathscr{V} > 0$).

Следствие. *Оператор Казимира неприводимого представления полупростой алгебры Ли обратим.*

Доказательство. В силу перестановочности C с $\rho(x)$ ядро оператора C инвариантно относительно всех операторов $\rho(x)$ и, значит, ввиду неприводимости, равно нулю. $\square$