Лекция 20

ТЕОРЕМА ЛЕВИ. — ПРОСТЫЕ АЛГЕБРЫ И ГРУППЫ ЛИ. — КАИНОВЫ И УНИМОДУЛЯРНЫЕ ГРУППЫ. — ЛЕММА ШУРА. — ЦЕНТР ПРОСТОЙ МАТРИЧНОЙ ГРУППЫ ЛИ. — ПРИМЕР НЕМАТРИЧНОЙ ГРУППЫ ЛИ. — КОГОМОЛОГИИ ДЕ РАМА. — КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРЫ ЛИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ. — СРАВНЕНИЕ КОГОМОЛОГИЙ ГРУППЫ ЛИ И ЕЕ АЛГЕБРЫ ЛИ.

Каждая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является расширением своего радикала $\mathfrak{r}$ посредством алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$. Мы будем говорить, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ *допускает разложение Леви*, если это расширение тривиально, т. е. если в $\mathfrak{g}$ существует такая (автоматически полупростая) подалгебра $\mathfrak{m}$, что

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{m}.$$

Если алгебра $\mathfrak{g}$ полупроста или разрешима, она, конечно, допускает разложение Леви. Согласно предложению 4 предыдущей лекции, алгебра $\mathfrak{g}$, радикал $\mathfrak{r}$ которой абелев, допускает разложение Леви.

Предложение 1 (теорема Леви). *Любая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{K}$ допускает разложение Леви.*

Доказательство. Проведем индукцию по размерности $n = \dim \mathfrak{r}$ радикала алгебры $\mathfrak{g}$. Если $n = 0$ или $n = 1$ или если идеал $\mathfrak{a} = \mathfrak{r}^2$ равен нулю, то по сказанному выше алгебра $\mathfrak{g}$ допускает разложение Леви. Пусть $n > 1$, и пусть $\mathfrak{a} \neq 0$. Тогда $\dim \mathfrak{r}/\mathfrak{a} < n$, а поскольку $\mathfrak{r}/\mathfrak{a}$ является радикалом факторалгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, то, по предположению индукции, алгебра $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ допускает разложение Леви. Для алгебры $\mathfrak{g}$ это означает, что в ней существует такая подалгебра $\mathfrak{b}$, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} + \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}$. Идеал $\mathfrak{a}$ является разрешимым идеалом алгебры $\mathfrak{b}$, факторалгебра $\mathfrak{b}/\mathfrak{a}$ по которому полупроста (ибо она изоморфна полупростой алгебре $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$). Это означает, что $\mathfrak{a}$ является радикалом алгебры $\mathfrak{b}$, а так как $\dim \mathfrak{a} < n$, то, по предположению индукции, в $\mathfrak{b}$ существует такая полупростая подалгебра $\mathfrak{m}$, что $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m}$. Но тогда $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{b} \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{m} = 0$ и $\mathfrak{r} + \mathfrak{m} = \mathfrak{r} + \mathfrak{r} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{m} = \mathfrak{r} + \mathfrak{a} + \mathfrak{m} = \mathfrak{r} + \mathfrak{b} = \mathfrak{g}$, так что $\mathfrak{g} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{m}$. □

Сейчас можно было бы непосредственно перейти к доказательству теоремы Адо, но вместо этого мы предпочтем пока отклониться несколько в сторону и рассмотреть вопрос о справедливости аналога этой теоремы для групп Ли. Мы обсудим также взаимоотношения формально-алгебраической теории когомологий из лекции 19 с теориями когомологий, известными в топологии.

В соответствии с общеалгебраическим словоупотреблением алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *простой*, если она не имеет ненулевых идеалов, отличных от $\mathfrak{g}$.

Ясно, что нетривиальная простая абелева алгебра Ли необходимо одномерна, а неабелева простая алгебра Ли полупроста.

Можно показать, что *алгебра Ли* $\mathfrak{sl}(n)$ *проста*. Соответствующие вычисления в достаточной мере утомительны, и потому мы ограничимся единственно нужным нам случаем $n = 2$.

Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$ трехмерна и матрицы

$$H = E_{11} - E_{22}, \quad E_1 = E_{12}, \quad E_{-1} = E_{21}$$

составляют ее базис. Непосредственное вычисление показывает, что

$$[H, E_1] = 2E_1, \quad [H, E_{-1}] = -2E_{-1}, \quad [E_1, E_{-1}] = H,$$

откуда, в частности, следует, что идеал $\mathfrak{a}$ алгебры $\mathfrak{sl}(2)$, содержащий хотя бы один из элементов H, E_1, E_{-1}, содержит их все и потому совпадает со всей алгеброй $\mathfrak{sl}(2)$. С другой стороны, если $A = aH + a_1E_1 + a_{-1}E_{-1} \in \mathfrak{a}$, то $[H, A] = 2a_1E_1 - 2a_{-1}E_{-1} \in \mathfrak{a}$ и, значит,

$$aH + 2a_1E_1 = A + \frac{[H, A]}{2} \in \mathfrak{a},$$

а потому $[H, aH + 2a_1E_1] = 4a_1E_1 \in \mathfrak{a}$. Следовательно, если $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{sl}(n)$, то $a_1 = 0$ и, значит, $aH \in \mathfrak{a}$, что при $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{sl}(n)$ возможно лишь когда $a = 0$. Поэтому $A = a_{-1}E_{-1} \in \mathfrak{a}$, откуда снова следует, что либо $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(n)$, либо $a_{-1} = 0$. Таким образом, если $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{sl}(n)$, то $A = 0$, т. е. $\mathfrak{a} = 0$. □

Связная группа Ли G называется *простой*, если ее алгебра Ли неабелева и проста, или, что равносильно, если любая ее инвариантная подгруппа, отличная от группы G, нульмерна (и, следовательно, если замкнута, то дискретна). Таким образом, если группа G проста, то любой эпиморфизм $G \to G'$ либо является групповым накрытием (локальным изоморфизмом), либо группа G' тривиальна (состоит только из единицы). При этом группа G' также проста, ибо, согласно определению, группа Ли проста или не проста одновременно со всеми группами, ей локально изоморфными.

Примером простой группы Ли является группа $\mathrm{SL}(2)$, а также и ее универсальная накрывающая группа $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$.

Аналогично, связная группа Ли называется *полупростой*, если ее алгебра Ли полупроста.

Заметим, что любая простая группа Ли полупроста.

Напомним, что *коммутантом* $[G, G]$ группы G называется ее подгруппа, порожденная всеми элементами вида $aba^{-1}b^{-1}$. Группа G называется *каиновой*, если $[G, G] = G$. Из предложения 2 лекции 4 немедленно вытекает, что *связная группа Ли G тогда и только тогда является каиновой группой, когда для ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет место равенство $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^2$.*

В частности, отсюда следует, что *любая полупростая группа Ли каинова.*

Например, группа Ли $\mathrm{SL}(2)$, а также любая группа Ли, локально изоморфная группе $\mathrm{SL}(2)$, скажем, группа $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$, являются каиновыми группами Ли.

Как непосредственно следует из теоремы об определителе произведения матриц, *любая каинова (и, в частности, любая полупростая) матричная группа Ли унимодулярна*, т. е. состоит из унимодулярных матриц.

Кроме того, очевидно, что *любая факторгруппа каиновой группы также является каиновой группой.*

Пусть $\mathfrak{g}$ — линейная алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$, состоящая из линейных операторов, действующих в конечномерном комплексном линейном пространстве $\mathscr{V}$. Если линейный оператор A (не принадлежащий, вообще говоря, алгебре Ли $\mathfrak{g}$) перестановочен со всеми операторами из $\mathfrak{g}$, то его ядро $\operatorname{Ker} A$ и образ $\operatorname{Im} A$ инвариантны относительно этих операторов, и потому, если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ неприводима, то либо $A = 0$, либо оператор A невырожден. Но, для любого собственного значения λ оператора A оператор $A - \lambda E$ вырожден и также перестановочен со всеми операторами из $\mathfrak{g}$. Поэтому $A - \lambda E = 0$. Этим доказано, что *единственными операторами, перестановочными со всеми элементами неприводимой линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{C}$ являются скалярные операторы вида λE.*

Это утверждение называется л е м м о й Ш у р а. Заметим, что в его доказательстве мы нигде не пользовались алгебраической структурой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Поэтому лемма Шура справедлива для любых неприводимых (т. е. не имеющих нетривиальных инвариантных подпространств) семейств $\mathfrak{g}$ линейных операторов над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$.

Рассмотрим теперь произвольную линейную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ над полем $\mathbb{R}$, состоящую из линейных операторов, действующих в вещественном линейном пространстве $\mathscr{V}$. Чтобы воспользоваться леммой Шура, перейдем от алгебры $\mathfrak{g}$ к ее комплексификации $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, состоящей из матриц (линейных операторов) вида $A + iB$, $A, B \in \mathfrak{g}$, и действующей в комплексификации $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ пространства $\mathscr{V}$. Ясно, что если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ (над полем $\mathbb{R}$) полупроста, то алгебра Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ (над полем $\mathbb{C}$) также полупроста. Но, если алгебра $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ полупроста, то согласно теореме Вейля (предложение 3 лекции 19) пространство $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ разлагается в прямую сумму инвариантных подпространств $\mathscr{V}_i$, $i = 1, \ldots, s$, в каждом из которых алгебра $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ действует неприводимым образом. На языке матриц это означает, что (при соответствующем выборе базиса пространства $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$) каждая матрица из алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ (а, значит, и из алгебры $\mathfrak{g}$) имеет вид

(1) $$A_1 \oplus \ldots \oplus A_s,$$

причем для любого $i = 1, \ldots, s$ отображение $\rho_i: A \mapsto A_i$ будет неприводимым представлением алгебры $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ в пространстве $\mathscr{V}_i$.

Имея это в виду, предположим, что алгебра $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли некоторой линейной (= матричной) полупростой (и, значит, связной) группы Ли G, действующей в линейном пространстве $\mathscr{V}$. Группа G естественным образом действует и в линейном пространстве $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$, причем все подпространства $\mathscr{V}_i$ будут относительно этого действия инвариантны (они инвариантны относительно операторов $A \in \mathfrak{g} = \operatorname{Re} \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$, а потому и относительно всех операторов e^{tA}, $t \in \mathbb{R}$, порождающих — ввиду связности — группу G). Поэтому любой элемент группы G также допускает разложение вида (1) (вообще говоря, с комплексными матрицами $A_1, \ldots, A_s$). При этом все матрицы вида A_i будут составлять некоторую (вообще говоря, приводимую и, возможно, тривиальную) группу G_i, действующую в пространстве $\mathscr{V}_i$ и являющуюся эпиморфным образом группы G.

Заметим, что *все группы G_i унимодулярны*. Действительно, являясь полупростой, группа G каинова. Следовательно, каиновы, а потому и унимодулярны, и все группы G_i. $\square$

Пусть теперь A — произвольный элемент центра группы G. Будучи перестановочным с каждым элементом группы G, оператор A перестановочен и с каждым элементом алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а, значит, и с каждым элементом алгебры Ли $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$. Поэтому для любого $i = 1, \ldots, s$ оператор A_i: $\mathscr{V}_i \to \mathscr{V}_i$ из разложения (1) оператора A перестановочен с каждым элементом неприводимой алгебры $\rho_i(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}})$ и, следовательно, согласно лемме Шура является скалярным оператором вида $\lambda_i E$, где $\lambda_i \in \mathbb{C}$. С другой стороны, оператор A_i, являясь элементом группы G_i, унимодулярен. Следовательно, $\lambda_i^{n_i} = 1$, где $n_i = \dim \mathscr{V}_i$, и, значит, для элемента A имеется лишь конечное число ($\leqslant n_1 n_2 \ldots n_s$) возможностей. Этим доказано следующее предложение, бывшее основной целью всех наших рассуждений:

Предложение 1. *Центр любой полупростой (и, в частности, любой простой) матричной группы Ли конечен.* □

С помощью этого предложения легко доказывается, что аналог теоремы Адо для групп Ли неверен, т.е. что *существуют связные группы Ли, не изоморфные никакой матричной группе.* Для этого достаточно найти связную простую группу Ли с бесконечным центром. Мы покажем, *что такой группой является универсальная накрывающая группа* $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$ *группы* $\mathrm{SL}(2)$ *унимодулярных матриц второго порядка* (о которой мы уже знаем, что она проста). Для этого нам понадобится явная конструкция группы $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$.

Несколько опережая события, обозначим через $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$ гладкое трехмерное многообразие, являющееся произведением $\mathbb{R}\times D$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ и единичного круга D плоскости комплексного переменного, состоящего из таких комплексных чисел z, что $|z|<1$.

Легко видеть, что функция $z\longmapsto\dfrac{1+z}{1+\bar z}$ осуществляет непрерывное отображение круга D на окружность $|w|=1$ с выколотой точкой $w=-1$. Поэтому для любого числа $z\in D$ существует единственное число t, $-\pi<t<\pi$, для которого

$$e^{it}=\frac{1+z}{1+\bar z}.$$

Это число t мы будем обозначать символом $\dfrac{1}{i}\ln\dfrac{1+z}{1+\bar z}$.

Мы зададим в множестве $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$ умножение, определив его формулой

$$(1)\qquad (x,\ u)(y,\ v)=\left(x+y+t,\ \frac{u+e^{2iy}v}{e^{2iy}+u\bar v}\right),$$

$$x,\ y\in\mathbb{R},\ u,\ v\in D,$$

где

$$t=\frac{1}{2i}\ln\frac{1+e^{-2iy}u\bar v}{1+e^{2iy}\bar u v}.$$

Так как $|e^{2iy}+u\bar{v}|^2-|u+e^{2iy}v|^2=(1-|u|^2)(1-|v|^2)>0$, то

$$\left|\frac{u+e^{2iy}v}{e^{2iy}+u\bar{v}}\right|<1,$$

и, значит, формула (1) корректно определяет в $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$ умножение.

Это умножение обладает единицей (0, 0), и для любого элемента (x, u) существует обратный элемент

$$(x,\ u)^{-1}=(-x,\ -e^{2ix}u).$$

Кроме того, как показывает автоматическое, хотя и довольно длинное вычисление, умножение (1) ассоциативно. Поскольку это умножение, очевидно, гладко, тем самым доказано, что относительно умножения (1) *многообразие* $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$ *является группой Ли.*

Центр этой группы состоит из таких элементов (x, u), что

$$\frac{u+e^{2iy}v}{e^{2iy}+u\bar{v}}=\frac{v+e^{2ix}u}{e^{2ix}+v\bar{u}}$$

тождественно по y и v. В частности, при $v=0$ тождественно по y должно иметь место равенство $u=e^{2iy}u$, что возможно только при $u=0$. Следовательно, $v=e^{2ix}v$ тождественно по v, что возможно только при $x=\pi n$, где n — произвольное целое число. Обратно, ясно что все элементы вида $(\pi n, 0)$ лежат в центре группы $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$. Следовательно, *центр группы* $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$ *бесконечен.*

Теперь осталось установить, что группа $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$ действительно является универсальной накрывающей группой группы $\mathrm{SL}(2)$. С этой целью мы рассмотрим отображение $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}\to\mathrm{SL}(2)$, сопоставляющее элементу $(x, u)\in\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$ матрицу

$$\frac{1}{\sqrt{1-|u|^2}}\begin{pmatrix}\cos x+|u|\cos(x+\varphi) & |u|\sin(x+\varphi)-\sin x\\ |u|\sin(x+\varphi)+\sin x & \cos x-|u|\cos(x+\varphi)\end{pmatrix},$$

где $\varphi=\arg u$.

Элементарное, но, к сожалению, довольно длинное вычисление показывает, что это отображение определено корректно, является гомоморфизмом и что его ядро состоит из элементов вида $(2\pi n, 0)$ и, значит, дискретно. Поскольку $\dim \widetilde{\mathrm{SL}(2)} = \dim \mathrm{SL}(2) = 3$, отсюда в силу леммы 1 лекции 13 следует, что *гомоморфизм* $\widetilde{\mathrm{SL}(2)} \to \mathrm{SL}(2)$ *является групповым накрытием.*

Поскольку группа $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$, очевидно, односвязна (многообразия $\mathbb{R}$ и D односвязны, а значит, односвязно и их произведение $\mathbb{R} \times D = \widetilde{\mathrm{SL}(2)}$), этим все и доказано. □

Объяснение. В заключение мы объясним происхождение предъявленной конструкции группы $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$ (хотя формально все доказано и без этого).

Согласно теореме о полярном разложении (см. II, 21, предложение 4) любая унимодулярная матрица $A \in \mathrm{SL}(2)$ единственным образом раскладывается в произведение UP некоторой матрицы вращения U и некоторой положительно определенной унимодулярной матрицы P. Матрица U задается углом поворота x, а матрица P, имеющая вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

где $a > 0$ и $ac - b^2 = 1$, задается числами $a > 0$ и b, т. е. комплексным числом $z = a + ib$, принадлежащим правой полуплоскости $a > 0$. Переходя с помощью дробно-линейного преобразования от правой полуплоскости к единичному кругу, мы получаем, следовательно, что каждая матрица $A \in \mathrm{SL}(2)$ однозначно характеризуется парой (x, u) (так что группа $\mathrm{SL}(2)$ диффеоморфна произведению $S^1 \times D$), причем, как оказывается, умножению матриц отвечает как раз умножение пар, задаваемое формулой (1). Чтобы получить группу $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$, остается теперь считать x не углом, а точкой из $\mathbb{R}$.

Замечание 1. Бесконечность центра односвязной накрывающей группы $\widetilde{\mathrm{SL}}(2)$ можно доказать, не опираясь на ее явное описание на основании общих соображений. Действительно, поскольку для любой связной группы Ли G ее фундаментальная группа $\pi_1 G$ лежит в центре односвязной накрывающей группы $\widetilde{G}$, для доказательства бесконечности центра группы $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$ достаточно доказать, что группа $\pi_1\mathrm{SL}(2)$ бесконечна. Для этого можно воспользоваться уточнением предложения 8 лекции 12, относящимся к случаю, когда в условиях этого предложения группа G содержит такое подмножество P (очевидно, гомеоморфное фактормногообразию G/H), что любой элемент $g \in G$ единственным образом представляется в виде $g = hp$, где $h \in H$, $p \in P$, и утверждающим, что в этом случае *группа* $\pi_1 H$ *изоморфна группе* $\pi_1 G$. Согласно теореме о полярном разложении для подгруппы $\mathrm{SO}(n)$ группы $\mathrm{SL}(n)$, $n \geqslant 2$, таким множеством P является множество всех унимодулярных положительно определенных матриц порядка n. Без особого труда можно показать (при $n = 2$ мы выше это сделали), что это множество гомеоморфно открытому шару евклидова пространства $\left(\text{размерности } N = \frac{n(n+1)}{2} - 1\right)$ и потому односвязно. Поэтому группа $\pi_1\mathrm{SL}(n)$ изоморфна группе $\pi_1\mathrm{SO}(n)$ и, значит, при $n = 2$ является бесконечной циклической группой. Мы предпочли дать прямое, вычислительное доказательство, поскольку явный вид группы $\widetilde{\mathrm{SL}(2)}$ имеет и самостоятельный интерес.

Рассмотрим теперь вопрос о геометрических мотивировках формальных алгебраических конструкций из лекции 19.

Напомним, что *дифференциальной формой степени* m на гладком многообразии M называется произвольное (гладкое) поле кососимметрических тензоров типа $(m, 0)$. В локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ на многообразии M каждая такая форма ω выражается формулой

$$\omega = f_{i_1 \ldots i_m} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m},$$

где $f_{i_1 \ldots i_m}$ — гладкие функции на соответствующей координатной окрестности U, кососимметрически зависящие от индексов $i_1, \ldots, i_m$, а $dx^1, \ldots, dx^n$ — формы на U степени 1, значения $(dx^1)_a, \ldots, (dx^n)_a$ которых в каждой точке $a \in U$ (являющиеся ковекторами касательного пространства $\mathsf{T}_a(M)$) составляют базис, сопряженный базису $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_a$ пространства $\mathsf{T}_a(M)$.

Совокупность $\Omega^m(M)$ всех дифференциальных форм степени $m \geqslant 0$ на многообразии M является (бесконечномерным) линейным пространством над полем $\mathbb{R}$.

Формы степени 0 естественным образом отождествляются с гладкими функциями на M и, значит, линеал $\Omega^0(M)$ — с алгеброй $\mathcal{F}(M)$ гладких функций на M.

Формула

$$(\varphi \wedge \psi)_a = \varphi_a \wedge \psi_a,$$

где a — произвольная точка многообразия M, а φ и ψ — дифференциальные формы на M, корректно определяет на M дифференциальную форму $\varphi \wedge \psi$, которая называется *внешним произведением* форм φ и ψ. Степень формы $\varphi \wedge \psi$ равна сумме степеней форм φ и ψ.

Внешнее умножение ассоциативно, кососкоммутативно (если p и q — степени форм φ и ψ, то $\psi \wedge \varphi = (-1)^{pq}\varphi \wedge \psi$) и для форм степени 0 совпадает с умножением функций.

Для любой функции $f \in \mathcal{F}(M)$ формула

$$(df)_a(A) = Af,$$

где $a \in M$ и $A \in \mathsf{T}_a(M)$, определяет на M дифференциальную форму df степени 1. Эта форма называется *дифференциалом* функции f и в локальных координатах задается формулой

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i.$$

Операция d единственным образом распространяется до линейного (над полем $\mathbb{R}$) отображения

$$d\colon \Omega^m(M) \to \Omega^{m+1}(M),$$

определенного для любого $m \geqslant 0$ и обладающего следующими двумя свойствами:

1) отображение d является по отношению к внешнему умножению дифференцированием, т. е. для любых форм φ и ψ удовлетворяет соотношению

$$d(\varphi \wedge \psi) = d\varphi \wedge \psi + (-1)^m \varphi \wedge d\psi,$$

где m — степень формы φ;

2) имеет место тождество

$$d \circ d = 0,$$

т. е. $d(d\omega) = 0$ для любой формы ω.

Из этих свойств следует, что в локальных координатах оператор d задается формулой

$$d\omega = df_{i_1 \ldots i_m} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}, \tag{2}$$

что доказывает его единственность. Для доказательства существования следует принять формулу (2) за определение и проверить, что на пересечении любых двух координатных окрестностей получается одна и та же дифференциальная форма.

Форма $d\omega$ называется *внешним дифференциалом* формы ω.

Форма $\omega \in \Omega^m(M)$ называется *замкнутой*, если $d\omega = 0$, и *точной*, если существует такая форма $\varphi \in \in \Omega^{m-1}(M)$, что $d\varphi = \omega$. Согласно свойству 2) оператора d линейное пространство $B^m(M)$ точных форм содержится в линейном пространстве $Z^m(M)$ замкнутых форм, и потому определено факторпространство

$$H^m(M) = Z^m(M)/B^m(M).$$

Это факторпространство называется *пространством* (или *группой*) *когомологий де Рама* гладкого многообразия M.

Чтобы связать эту аналитико-геометрическую конструкцию с формально-алгебраическими конструкциями лекции 19, мы вспомним, что по отношению к скобке Ли линейное пространство $\mathfrak{a}(M)$ векторных полей на многообразии M является (бесконечномерной) алгеброй Ли, а линейное пространство $\mathcal{F}(M)$ гладких функций на M — модулем над алгеброй Ли $\mathfrak{a}(M)$ (по определению, $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$ для любой функции $f \in \mathcal{F}(M)$). Поэтому мы имеем право ввести в рассмотрение линейное пространство коцепей $C^m(\mathfrak{a}(M), \mathcal{F}(M))$ (определение которых имеет смысл и в бесконечномерном случае).

Любая дифференциальная форма $\omega \in \Omega^m(M)$ определяет по формуле

$$u(X_1, \ldots, X_m)(a) = \omega_a((X_1)_a, \ldots, (X_m)_a), \qquad a \in M,$$

где $X_1, \ldots, X_m$ — произвольные векторные поля на M, некоторую коцепь $u \in C^m(\mathfrak{a}(M), \mathcal{F}(M))$, и обратно, для любой коцепи $u \in C^m(\mathfrak{a}(M), \mathcal{F}(M))$ формула

$$\omega_a(A_1, \ldots, A_m) = u(X_1, \ldots, X_m)(a),$$

где $a \in M$, $A_1, \ldots, A_m \in \mathsf{T}_a(M)$, а $X_1, \ldots, X_m$ — такие векторные поля на M, что

$$(X_1)_a = A_1, \ldots, (X_m)_a = A_m,$$

корректно определяет некоторую дифференциальную форму $\omega \in \Omega^m(M)$. (Для доказательства корректности достаточно записать форму ω в координатах.) Ясно, что эти соответствия взаимнообратны, и значит, дифференциальные формы ω мы можем отождествлять с соответствующими коцепями (и обозначать их одинаковыми буквами).

В силу этого отождествления оператор d будет определяться формулой

$$\begin{aligned}(3)\quad (m+1)(d\omega)(X_1, \ldots, X_{m+1}) &= \\ = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{m+1}) &+ \\ + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=i+1}^{m+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots &\\ \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{m+1}),&\end{aligned}$$

где $X_1, \ldots, X_{m+1}$ — произвольные поля из $\mathfrak{a}(M)$, т. е. будет совпадать (с точностью до несущественного множителя $m+1$) с оператором δ для коцепей (проще всего это доказать, проверив прямым вычислением, что определенный формулой (3) оператор d обладает свойствами 1) и 2), а на функциях совпадает с их дифференциалом).

Это доказывает, что

$$(4)\qquad H^m(M) = H^m(\mathfrak{a}(M), \mathcal{F}(M))$$

для любого гладкого многообразия M (и любого $m \geqslant 0$).

Топологическая интерпретация пространств $H^m(\mathfrak{g}; \mathscr{V})$ возможна и для конечномерных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ (над полем $\mathbb{R}$). Для простоты мы ограничимся случаем, когда $\mathscr{V} = \mathbb{R}$.

Для каждого гладкого отображения $f\colon M \to N$ формула

$$(f^*\omega)_a(A_1, \ldots, A_m) = \omega_{f(a)}((df)_a A_1, \ldots, (df)_a A_m),$$

где $a \in M$, $A_1, \ldots, A_m \in \mathsf{T}_a(M)$ и $\omega \in \Omega^m(N)$, определяет на M дифференциальную форму $f^*\omega \in \Omega^m(M)$, обладающую тем свойством, что $d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega)$.

В частности, для любой группы Ли G, любого элемента $a \in G$ и любой формы $\omega \in \Omega^m(G)$ на группе G определена форма $L_a^*\omega \in \Omega^m(G)$. Форма ω называется *левоинвариантной формой*, если $L_a^*\omega = \omega$ для каждого элемента $a \in G$.

Все левоинвариантные формы степени m составляют подпространство $\Omega^m_{\text{inv}}(G)$ линейного пространства $\Omega^m(G)$, замкнутое относительно оператора d (если $\omega = L_a^*\omega$, то $d\omega = dL_a^*\omega = L_a^* d\omega$). Мы положим

$$H^m_{\text{inv}}(G) = Z^m_{\text{inv}}(G)/B^m_{\text{inv}}(G),$$

где $Z^m_{\text{inv}}(G)$ — пространство всех замкнутых левоинвариантных форм степени m, а $B^m_{\text{inv}}(G)$ — его подпространство, состоящее из форм вида $d\omega$, где $\omega \in \Omega^{m-1}_{\text{inv}}(G)$.

Пусть, как всегда, e — единица группы Ли G. Поскольку линейное пространство $\mathsf{T}_eG = \mathfrak{g}$ является алгеброй Ли, кососимметрические полилинейные функционалы на T_eG являются не чем иным, как коцепями этой алгебры Ли над тривиальным $\mathfrak{g}$-модулем $\mathbb{R}$. Поэтому соответствие $\omega \mapsto \omega_e$ задает нам линейное отображение

$$\Omega^m_{\text{inv}}(G) \to C^m(\mathfrak{g}; \mathbb{R}). \tag{5}$$

Предложение 2. *Отображение* (5) *является изоморфизмом.*

Доказательство. Форма $\omega \in \Omega^m(G)$ тогда и только тогда левоинвариантна (принадлежит $\Omega^m_{\text{inv}}(G)$), когда

$$\omega_a(A_1, \ldots, A_m) = u((dL_{a^{-1}})_a A_1, \ldots, (dL_{a^{-1}})_a A_m) \tag{6}$$

для любой точки $a \in G$ и любых векторов $A_1, \ldots, A_m \in \mathsf{T}_aG$, где $u = \omega_e$. Поэтому, если $\omega_e = 0$, то $\omega = 0$.

Обратно, непосредственная проверка показывает, что для любой коцепи $u \in C^m(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ формула (6) определяет левоинвариантную форму $\omega \in \Omega^m_{\text{inv}}(G)$, для которой $\omega_e = u$. $\square$

Таким образом, левоинвариантные дифференциальные формы из $\Omega^m_{\text{inv}}(G)$ мы в силу предложения 2 можем отождествлять с коцепями из $C^m(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$.

По определению,

$$\omega_e(A_1, \ldots, A_m) = \omega(X_1, \ldots, X_m)(e)$$

для любой формы $\omega \in \Omega^m(G)$ и любых векторов $A_1, \ldots, A_m \in \mathsf{T}_eG$, где $X_1, \ldots, X_m$ — произвольные векторные поля, обладающие тем свойством, что $(X_1)_e = A_1, \ldots, (X_m)_e = A_m$. В частности, без ограничения общности можно считать, что поля $X_1, \ldots, X_m$ левоинвариантны (принадлежат алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}(G)$).

С другой стороны, если форма ω левоинвариантна, то, как легко видеть, для любых левоинвариантных векторных полей $X_1, \ldots, X_m$ функция $\omega(X_1, \ldots, X_m)$ постоянна на группе G и, значит,

$$Y\omega(X_1, \ldots, X_m) = 0$$

для любого векторного поля $Y \in \mathfrak{a}(G)$.

В силу формулы (3) отсюда следует, что для любой формы $\omega \in \Omega^m_{\text{inv}}(G)$ значение $(d\omega)_e(A_1, \ldots, A_{m+1})$ коцепи $(d\omega)_e$ на векторах $A_1, \ldots, A_{m+1} \in \mathsf{T}_eG$ определяется формулой

$$(m+1)(d\omega)_e(A_1, \ldots, A_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{m+1})(e),$$

где $X_1, \ldots, X_m$ — левоинвариантные векторные поля на группе G, для которых $(X_1)_e = A_1, \ldots, (X_{m+1})_e = A_{m+1}$. Иными словами,

$$(m+1)(d\omega)_e(A_1, \ldots, A_{m+1}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=i+1}^{m+1}(-1)^{i+j}\omega_e([A_iA_j], A_1, \ldots, \widehat{A}_i, \ldots \ldots, \widehat{A}_j, \ldots, A_{m+1}),$$

где $[A_i, A_j]$ обозначает скобку Ли в алгебре Ли $\mathsf{T}_eG = \mathfrak{g}$ (т. е. $[A_i, A_j] = [X_i, X_j]_e$).

Это означает, что при отождествлении левоинвариантных форм из $\Omega^m_{\mathrm{inv}}(G)$ с коцепями из $C^m(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ оператор d переходит (с точностью до несущественного множителя $m+1$) в оператор δ. Следовательно, для любого $m \geqslant 0$

$$H^m_{\mathrm{inv}}(G) = H^m(\mathfrak{g};\mathbb{R}). \tag{7}$$

В отличие от группы $H^m(G)$ группа $H^m_{\mathrm{inv}}(G)$ не может, конечно, считаться топологическим инвариантом гладкого многообразия G_{diff}. Тем не менее, можно показать, что если группа Ли связна и односвязна, то группы $H^m(G)$ и $H^m_{\mathrm{inv}}(G)$ изоморфны (что в силу (7) дает, в частности, вполне эффективный метод вычисления групп $H^m(G)$). Однако соответствующее доказательство выходит за рамки этой книги.