Предисловие

В основе теории групп Ли лежит теорема Картана об эквивалентности категории односвязных групп Ли категории алгебр Ли. Эта книга посвящена доказательству теоремы Картана и основных связанных с ней результатов. Более глубокие отделы теории групп Ли, опирающиеся на теорему Картана, остаются, таким образом, вне рамок нашего изложения. Точно так же, теория алгебр Ли излагается лишь постольку, поскольку это необходимо для доказательства теоремы Картана.

Подобно предыдущим книгам этой серии[1]), настоящая книга представляет собой почти точную запись лекций, которые автор читал студентам (и аспирантам) механико-математического факультета Московского университета. Однако если книги I и II основывались на лекциях обязательного курса, то эта книга является записью спецкурса, что обусловило ряд ее существенных отличий.

Ориентация на студентов старших курсов и аспирантов (отнесение этих лекций к пятому семестру имеет условный характер, поскольку контингент их слушателей довольно равномерно распределялся по всем старшим курсам) позволила за «законные» два академических часа (90 минут) излагать значительно больше материала, чем это было возможно на лекциях из I и II, рассчитанных на первокурсников. Увеличению объема лекций способствовало также их удлинение почти до двух астрономических часов (120 минут) за счет сокращения перерыва и затягивания лекций после звонка.

---

[1]) См. Постников М. М. Лекции по геометрии, Семестр I, Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1979; Семестр II, Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1979 (цитируются как I и II). Семестры III и IV находятся in statu nascendi.

Все это дало возможность почти вдвое увеличить фактический объем каждой лекции. Конечно, при менее напряженном ритме преподавания, — скажем, в условиях годового, а не семестрового курса, — каждая лекция разворачивается фактически в полторы-две лекции. Поэтому, быть может, эту книгу лучше рассматривать как запись годового спецкурса (но мне удавалось — при особо благоприятных обстоятельствах — укладываться и в один семестр), тем более, что по разным причинам обычно за семестр прочитывается не более 12—13 лекций, хотя по учебному плану их 18.

Из-за острейшего дефицита времени при чтении специального курса значительно чаще, чем в обязательном курсе, приходится ограничиваться лишь идеей доказательств, оставляя подробное их проведение слушателям. Вспомогательные утверждения из других отделов математики достаточно лишь формулировать со ссылками на литературу, а иллюстрирующие общую теорию примеры лишь описывать, также предоставляя их подробный разбор слушателям. При переносе же устной лекции на бумагу сохранять эти особенности нет необходимости и, более того, все доказательства стоит производить подробно, разбор примеров осуществлять до конца, а «посторонние» леммы доказывать. Это приводит к дополнительному разбуханию объема записанной лекции иногда вдвое-втрое.

Каждый лектор, предполагая у слушателей определенный запас знаний, всё же вынужден особо важные предварительные сведения хотя бы вкратце напоминать. При письменном изложении эти напоминания приходится для удобства читателей разворачивать в систематический раздел подчас довольно большого объема.

Всем этим объясняется неожиданно большой объем некоторых лекций в книге. Все же с учетом всего сказанного каждая лекция в книге на самом деле является записью реальной устной лекции (с точностью до само собой разумеющихся передвижек начальных и концевых отрезков соседних лекций).

Все лекции фактически разбиваются на 5 циклов. В первом цикле (лекции 1—3) вводятся и разъясняются на примерах основные понятия: группа Ли, алгебра Ли, алгебра Ли данной группы Ли.

Следующий цикл (лекции 4—7) посвящен «локальной теории» групп Ли. В лекциях 4 и 6 устанавливается эквивалентность категорий алгебр Ли и аналитических групускул (= локальных групп) Ли. Необходимый алгебраический аппарат развивается в лекции 5. В лекции 7 доказывается, что предположение аналитичности общности на самом деле не ограничивает. Здесь же рассматриваются подгрупускулы и факторгрупускулы.

Глобализация теории осуществляется в лекциях 8—10. В лекции 8 излагается теория накрытий (по Шевалле, т. е. «без путей»), в лекции 9 строится универсальная накрывающая группа, а в лекции 10 формулируется и обсуждается теорема Картана. Эта теорема не доказывается, а лишь сводится к теореме Адо о существовании для любой алгебры Ли точного линейного представления.

Эти три цикла могут составить предмет маленького курса по теории групп Ли для начинающих.

В лекциях 11 и 12 подробно рассматриваются подгруппы и факторгруппы групп Ли. Лекция 13 посвящена алгебрам Клиффорда и спинорным группам. В лекциях 14—16 впервые в учебной литературе подробно рассмотрены особые группы Ли G_2 и F_4 вместе со всем необходимым алгебраическим аппаратом.

Последние лекции 17—21 носят чисто алгебраический характер и фактически независимы от всего предшествующего (если не считать стоящей несколько особняком лекции 20). Формально они посвящены доказательству теоремы Адо, но на самом деле содержат весьма обширный фрагмент теории алгебр Ли (критерии Картана разрешимости и полупростоты, леммы Уайтхеда, теоремы Вейля и Леви), имеющий и самостоятельный интерес.

В заключение я хотел бы выразить благодарность В. Л. Попову, вклад которого в усовершенствование первоначальной рукописи книги далеко превзошел обычные обязанности редактора.

27 октября 1979 г. *М. М. Постников*