

Решение задач на движение тел с использованием блоков

Задача 1. Через блок перекинута нерастяжимая нить, к которой прикреплены два тела массами m_1 и m_2 (причём $m_1 > m_2$). Определить ускорения, с которыми будут двигаться тела и силу натяжения нити. Массами блока и нити пренебречь.

Решение задачи. Запишем краткое условие задачи и выполним чертёж (рис. 1.). Инерциальную систему отсчёта (ИСО) свяжем с осью блока и направим ось y вертикально вниз. Поскольку $m_1 > m_2$, ускорение тела массой m_1 будет направлено вниз, а тела с массой m_2 — вверх. На каждое из тел действуют по две силы: сила тяжести $F = mg$ и сила натяжения нити T .

Найти: a , T .

Дано: m_1, m_2 .

Запишем для каждого тела основной закон динамики:

$$\begin{aligned}m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_1 + \vec{T}_1, \\m_2 \vec{a}_2 &= \vec{F}_2 + \vec{T}_2.\end{aligned}$$

В проекциях на ось y эти уравнения примут вид:

$$\begin{aligned}m_1 a_1 &= m_1 g - T_1, \\-m_2 a_2 &= m_2 g - T_2.\end{aligned}\quad (1)$$

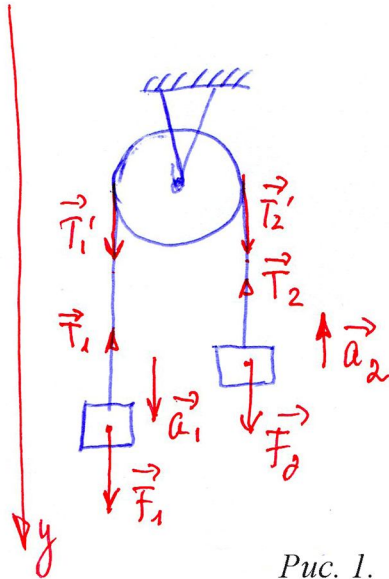


Рис. 1.

Обсудим полученные уравнения. Так как по условию задачи нить нерастяжимая — тела за одно и то же время будут проходить одинаковые пути, а значит, их скорости и ускорения будут одинаковыми — $a_1 = a_2 = a$. По условию задачи масса нити пренебрежимо мала, значит её вклад в натяжение нити мы учи-

тывать не будем. А поскольку мы пренебрегаем и массой блока, мы не будем учитывать его момент инерции и соответствующий момент силы. Всё это приводит к тому, что сила натяжения нити при переходе через блок меняет своё направление, не меняя модуля: $T'_1 = T'_2$, $T'_1 = T_1$, $T'_2 = T_2$, откуда

$$T_1 = T_2 = T.$$

Уравнения (1) теперь можно записать в виде:

$$\begin{aligned} m_1 a &= m_1 g - T, \\ m_2 a &= T - m_2 g. \end{aligned} \quad (2)$$

Мы получили систему из двух уравнения относительно двух неизвестных a и T . Сложим правые и левые части полученных уравнений:

$$(m_1 + m_2) a = (m_1 - m_2) g,$$

Откуда

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Силу натяжения нити найдем, подставив выражение для a в одно из уравнений (2):

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Теперь рассмотрим эту же задачу с учётом массы блока.

Задача 2. *Через блок массой m перекинута нерастяжимая нить, к которой прикреплены два тела массами m_1 и m_2 (причём $m_1 > m_2$). Определить ускорения, с которыми будут двигаться тела и силу натяжения нити. Массой нити пренебречь, блок считать однородным диском, трением пренебречь.*

Решение задачи. Данная задача отличается от задачи 1 тем, что теперь массой блока мы не пренебрегаем. Это приводит к тому, что в дополнение к двум уравнениям задачи 1 мы должны добавить уравнение вращательного движения блока. Теперь мы не

можем считать силы натяжения нити T_1 и T_2 равными. Отсутствие силы трения, позволяет не учитывать его в написании уравнения вращения блока. Теперь нам надо две оси координат: ось x направим вертикально вниз и спроецируем на неё уравнения движения тел; ось y направим перпендикулярно к листу, к нам и спроецируем на неё уравнение вращательного движения блока. Выполним чертёж.

Найти: a, T_1, T_2 .

Дано: m_1, m_2, m .

Запишем в векторной форме уравнения движения тел

$$m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1;$$

$$m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2$$

и уравнение вращательного движения блока

$$J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2,$$

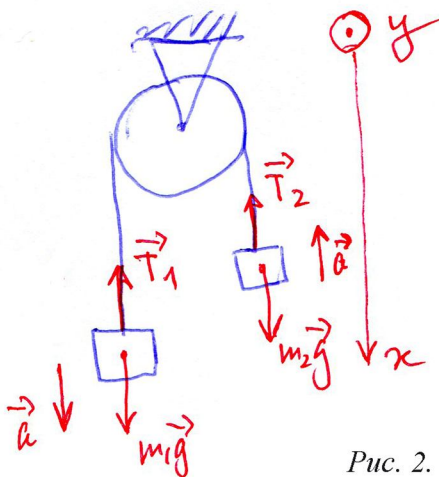


Рис. 2.

где \vec{M}_1 — момент силы натяжения нити \vec{T}_1 , \vec{M}_2 — момент силы натяжения нити \vec{T}_2 . Спроецируем первые два уравнения на ось x , а последнее на ось y и добавим уравнение кинематической связи. Получим систему 4 уравнений:

$$m_1 a = m_1 g - T_1; \quad (1)$$

$$m_2 a = T_2 - m_2 g; \quad (2)$$

$$J \varepsilon = RT_1 - RT_2; \quad (3)$$

$$a = \varepsilon R. \quad (4)$$

Момент инерции блока (диск)

$$J = \frac{mR^2}{2}. \quad (5)$$

Подставим (4) и (5) в (3);

$$\frac{ma}{2} = T_1 - T_2. \quad (6)$$

Сложим (1) и (2)

$$(m_1 + m_2)a = (m_1 - m_2)g - (T_1 - T_2).$$

Откуда

$$T_1 - T_2 = (m_1 - m_2)g - (m_1 + m_2)a. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) найдём

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + m/2} g. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (1) и (2), получим

$$T_1 = m_1(g - a) = \frac{2m_2 + m/2}{m_1 + m_2 + m/2} \cdot m_1 g;$$

$$T_2 = m_2(g + a) = \frac{2m_1 + m/2}{m_1 + m_2 + m/2} \cdot m_2 g.$$

В рассмотренных выше задачах ось блока была связана с неподвижной системой координат. Поместим теперь блок в подвижную систему координат.

Задача 3. К потолку лифта, движущегося вверх с ускорением $w = 3 \text{ м/с}^2$ подвешен блок. Через блок перекинута нерастяжимая нить, к которой прикреплены два тела массами $m_1 = 5 \text{ кг}$ и $m_2 = 3 \text{ кг}$. Определить ускорения, с которыми будут двигаться тела относительно блока a'_1 и a'_2 , земли a_1 и a_2 , и силу натяжения нити. Массами блока и нити пренебречь.

Решение задачи. Запишем краткое условие задачи и выполним чертёж (рис. 3.). Инерциальную систему отсчёта (ИСО) свяжем со зданием, в котором находится лифт, и направим ось y вертикально вниз.

Найти:

$$a'_1, a'_2, a_1, a_2, T_1, T_2.$$

Дано:

$$w = 3 \text{ м/с}^2,$$

$$m_1 = 5 \text{ кг},$$

$$m_2 = 3 \text{ кг},$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2.$$

Уравнения движения тел в заданной ИСО будут:

$$m_1 \vec{a}_1 = m_1 \vec{g} + \vec{T}_1;$$

$$m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{T}_2.$$

В проекциях на ось y эти уравнения примут вид

$$m_1 a_1 = m_1 g - T_1; \quad (1)$$

$$m_2 a_2 = T_2 - m_2 g. \quad (2)$$

Поскольку массами блока и нити мы пренебрегаем, то

$$T_1 = T_2 = T.$$

Относительно блока тела движутся с одинаковыми по модулю ускорениями a' (см. задачу 1):

$$a'_1 = a'_2 = a'.$$

Ускорения тел в заданной ИСО будут:

$$a_1 = a' - w, \quad (3)$$

$$a_2 = a' + w. \quad (4)$$

Подставим (3) и (4) соответственно в (1) и (2), получим:

$$m_1 (a' - w) = m_1 g - T, \quad (5)$$

$$m_2 (a' + w) = T - m_2 g, \quad (6)$$

отсюда

$$a' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g + w), \quad (7)$$

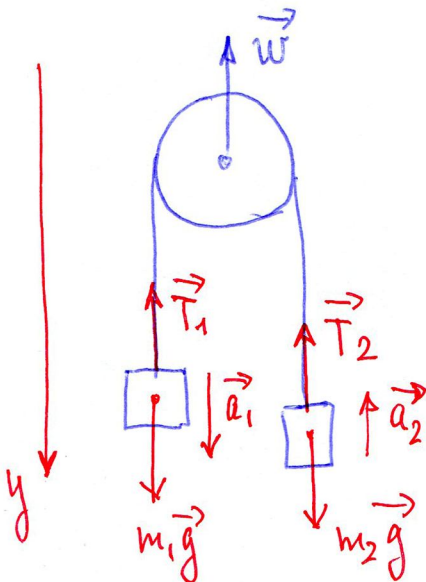


Рис. 3.

$$a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g + w) - w, \quad (8)$$

$$a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} (g + w) + w, \quad (9)$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} (g + w). \quad (10)$$

Подставляя численные значения в (7) — (10), получим:

$$a' = 3,2 \text{ м/с}^2, \quad a_1 = 0,2 \text{ м/с}^2, \quad a = 6,2 \text{ м/с}^2, \quad T = 48 \text{ Н}.$$

Задача 4. Тележка массой 6 кг, движущаяся по горизонтальной плоскости, с помощью невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок, массой которого можно пренебречь, соединена с телом массой 3 кг. Определить натяжение нити и ускорения грузов: а) без учёта трения; б) с учётом трения ($k=0,1$).

Найти: a, T

Дано:

$$m_1 = 6 \text{ кг},$$

$$m_2 = 3 \text{ кг},$$

$$k = 0,1,$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2.$$

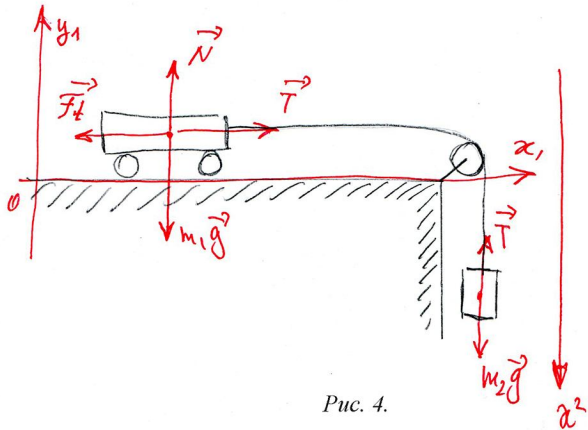


Рис. 4.

Решение задачи. Свяжем ИСО со столом. Ось x_1 направим параллельно столу, ось y_1 — вертикально вверх, ось x_2 — вертикально вниз (рис. 4). Как и в предыдущих задачах нерастяжимость нити обеспечивает телам, участвующим в движении, одинаковость ускорений. Невесомость нити и блока обеспечивает одинаковую силу натяжения нити по обеим сторонам блока.

Запишем для каждого тела основной закон динамики:

$$m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{tr} + \vec{T} = m_1 \vec{a}, \quad (1)$$

$$m_2 \vec{g} + \vec{T} = m_2 \vec{a}. \quad (2)$$

а) Спроецируем уравнения (1) и (2) на соответствующие оси координат с учётом отсутствия силы трения ($F_{tr} = 0$):

$$x_1: \quad T = m_1 a; \quad (3)$$

$$y_1: \quad m_1 g = N \quad (4)$$

на движение тележки по столу не влияет;

$$x_2: \quad m_2 g - T = m_2 a. \quad (5)$$

Складывая (3) и (4) получим:

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g = 3,3 \text{ м/с}^2.$$

$$T = m_1 a = 19,8 \text{ Н.}$$

б) Теперь спроецируем уравнения (1) и (2) с учётом силы трения. Из (4) следует, что $F_{tr} = k N = k m_1 g$, тогда:

$$x_1: \quad T - k m_1 g = m_1 a; \quad (6)$$

$$x_2: \quad m_2 g - T = m_2 a. \quad (7)$$

Складывая (6) и (7) получим:

$$a = \frac{m_2 - k m_1}{m_1 + m_2} g = 2,7 \text{ м/с}^2.$$

$$T = m_2 (g - a) = 21,9 \text{ Н.}$$

Наличие силы трения увеличивает силу натяжения нити.

Задача 5. Три тела массой m_1, m_2, m_3 , по 5 кг каждое, подвешены на блоках, как показано на рис. 5. На тело m_3 положили перегрузок $m_4 = 0,5$ кг. Найти ускорение грузов, натяжение нитей, силы давления на оси блоков и силу давления перегрузка на тело m_3 . Нить считать нерастяжимой и невесомой. Массой блоков и трением пренебречь.

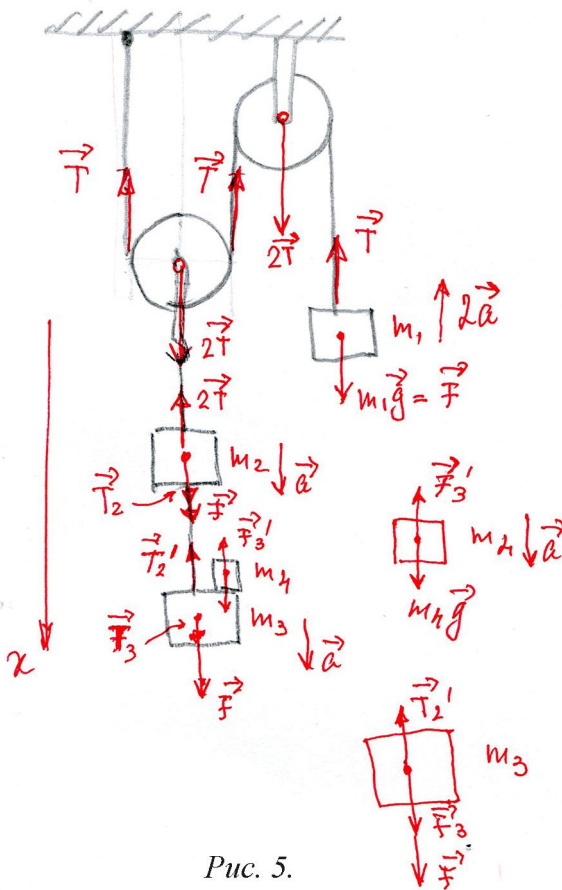


Рис. 5.

Найти:

a, T, T_2, F_3, F_4 .

Дано:

$m_1 = m_2 = m_3 = m = 5 \text{ кг}$,

$m_4 = 0,5 \text{ кг}$,

$g = 9,81 \text{ м/с}^2$.

Решение задачи. Свяжем ИСО с потолком, к которому прикреплён неподвижный блок. Выполним чертёж и учитывая невесомость нити и блоков изобразим приложенные к грузам силы (рис. 5). Как известно, применение подвижного блока даёт вы-

игрыш в силе в два раза. Это значит, что если к правой нити неподвижного блока приложить силу F , тогда на крюке подвижного блока мы получим силу $2F$. Данная конструкция позволяет с меньшим усилием поднимать грузы. Маленький перегрузок нарушает равновесие и вся конструкция начинает двигаться. Груз m_1 движется вверх с ускорением a_1 , подвижный блок, грузы m_2 , m_3 и перегрузок m_4 — вниз с ускорением a_2 . Найдём соотношение между этими ускорениями. Пусть подвижный блок вместе с прикрепленными к нему грузами опустился на высоту h , тогда груз m_1 поднялся на высоту $2h$. $2h = \frac{a_1 t^2}{2}$ а $h = \frac{a_2 t^2}{2}$, откуда следует, что $a_1 = 2a_2$. Будем считать, что груз m_1 движется вверх с ускорением $2a$, а подвижный блок и прикрепленные к нему грузы — вниз с ускорением a , $F = mg$. По третьему закону Ньютона $T_2 = -T_2'$ и $F_3 = -F_3'$.

Составим уравнения движения всех тел в проекции на ось x :

$$T - mg = 2ma ; \quad (1)$$

$$mg + T_2 - 2T = ma ; \quad (2)$$

$$mg + F_3 - T_2 = ma ; \quad (3)$$

$$m_4 g - F_3 = m_4 a . \quad (4)$$

Складывая равенства (2) — (4) получим:

$$2mg + m_4 g - 2T = (2m + m_4) a . \quad (5)$$

Решая (1) и (5) имеем

$$a = \frac{m_4}{6m + m_4} \cdot g = 0,16 \text{ м/с}^2.$$

Далее из (1), (2) и (4) получим:

$$T = 50,65 \text{ Н}; T_2 = 53,05 \text{ Н}; F_3 = 4,83 \text{ Н}; F_4 = 2T = 101,3 \text{ Н}.$$

Задача 6. *Через невесомый, вращающийся без трения блок перекинут нерастяжимый и невесомый шнур (рис. 6). На одном*

конце шнура привязан груз массой m_1 . По другому концу шнура скользит с постоянным относительно шнура ускорением a_2 кольцо массой m_2 . Найти ускорение a_1 груза массой m_1 и силу трения F_{tr} кольца о шнур.

Найти: $a_1, F_{tr} = T$.

Дано: m_1, m_2, a_2 .

Решение задачи. Свяжем ИСО с помещением, в котором размещена изучаемая система тел. В таких случаях говорят, что задана «лабораторная» ИСО. Ось x направим вертикально вниз.

На тело массой m_1 действует вниз сила тяжести $m_1 \vec{g}$ и вверх сила натяжения шнура \vec{T} . На кольцо действует вниз сила тяжести $m_2 \vec{g}$ и вверх сила трения

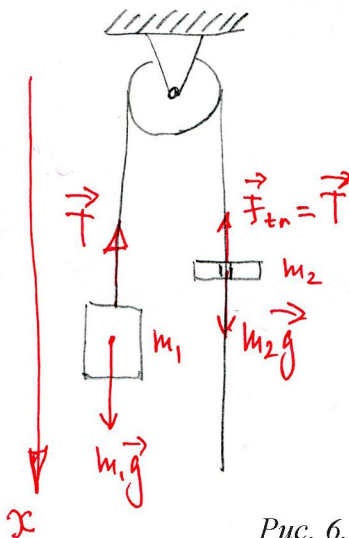


Рис. 6.

\vec{F}_{tr} , создающая натяжении шнура. Поэтому $F_{tr} = T$. Рассмотрим движение каждого из тел. Заметим, что ускорение \vec{a}'_2 кольца относительно «лаборатории» складывается из переносного ускорения \vec{a}_1 шнура относительно «лаборатории» и ускорения \vec{a}_2 относительно шнура:

$$\vec{a}'_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2.$$

Поскольку данные в задаче не конкретизированы, то возможны следующие случаи. Тело массой m_1 может двигаться как вниз, так и в верх. Допустим, что оно движется вниз. В этом случае ускорения a_1 и a_2 направлены в противоположные стороны: a_1 — вверх и a_2 — вниз. При этом возможны случаи:

- 1) $a_1 > a_2$; a'_2 направлено вверх;

2) $a_1 < a_2$; a'_2 направлено вниз;

3) $a_1 = a_2$; $a'_2 = 0$ (кольцо покоится относительно «лаборатории»).

Рассмотрим указанные выше случаи.

1) $a_1 > a_2$; a'_2 направлено вверх.

$$m_1 g - T = m_1 a_1, \quad (1)$$

$$m_2 g - T = -m_2 a'_2 = -m_2 (a_1 - a_2) \text{ или}$$

$$T - m_2 (g - a_2) = m_2 a_1. \quad (2)$$

Решая систему (1), (2) получим:

$$a_1 = \frac{m_1 g - m_2 (g - a_2)}{m_1 + m_2},$$

$$T = \frac{m_1 m_2 (2g - a_2)}{m_1 + m_2}.$$

2) $a_1 < a_2$; a'_2 направлено вниз.

$$m_1 g - T = m_1 a_1, \quad (3)$$

$$m_2 g - T = m_2 a'_2 = m_2 (a_1 - a_2) \text{ или}$$

$$m_2 (g + a_2) - T = m_2 a_1. \quad (4)$$

Откуда имеем:

$$a_1 = \frac{m_1 g - m_2 (g + a_2)}{m_1 - m_2},$$

$$T = \frac{m_1 m_2 (2g + a_2)}{m_1 - m_2}.$$

3) $a_1 = a_2$; $a'_2 = 0$ (кольцо покоится относительно «лаборатории»).

$$m_1 g - T = m_1 a_1, \quad (5)$$

$$m_2 g - T = m_2 a'_2 = 0 \text{ или}$$

$$T - m_2 g = 0. \quad (6)$$

Из (5) и (6) получим:

$$a_1 = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1},$$

$$T = m_2 g.$$

Если тело массой m_1 движется вверх, тогда кольцо может двигаться только вниз и $a'_2 = a_1 + a_2$.

$$m_1 g - T = -m_1 a_1, \quad (7)$$

$$m_2 g - T = m_2 (a_1 + a_2) \text{ или}$$

$$m_2 (g - a_2) - T = m_2 a_1. \quad (8)$$

Откуда:

$$a_1 = \frac{m_2 (g - a_2) - m_1 g}{m_1 + m_2},$$

$$T = \frac{m_1 m_2 a_2}{m_1 + m_2}.$$

Задача 7. Канат перекинут через невесомый блок, причём часть каната лежит на столе, а часть — на полу. После того как канат отпустили, он начал двигаться. Найти скорость установившегося равномерного движения каната. Высота стола h .

Найти: V .

Дано: h .

Решение задачи. Будем решать задачу в «лабораторной» ИСО. При равномерном движении каната за время Δt в движение вовлекается отрезок каната длины $\Delta l = V \Delta t$, (V — скорость каната), которому сила $F = \rho g h$ (канат движется под действием силы тяжести отрезка каната высотой h , ρ — линейная плотность каната) сообщает импульс

$$p = \rho (V \Delta t) V = \rho V^2 \Delta t.$$

Подставляя значение силы и импульса в формулу

$$F = \frac{p}{\Delta t},$$

получим

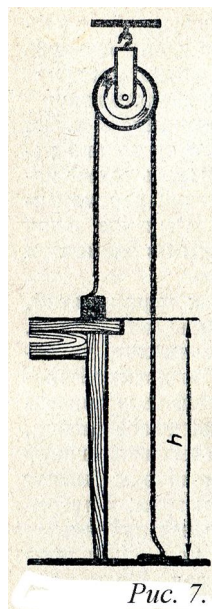


Рис. 7.

$$\rho gh\Delta t = \rho V^2 \Delta t,$$

откуда

$$V = \sqrt{gh},$$

Задача 8. На гладком горизонтальном столе лежит доска массой $M = 2$ кг, на которой находится брусок массой $m = 1$ кг. Тела соединены лёгкой, нерастяжимой нитью, перекинутой через блок, масса которого равна нулю. Какую силу F нужно приложить к доске, чтобы она начала двигаться от блока с постоянным ускорением $a = 0,5g$? Коэффициент трения между телами $k = 0,5$. Трением между столом и доской пренебречь. Считать $g = 10$ м/с².

Найти:

F .

Дано:

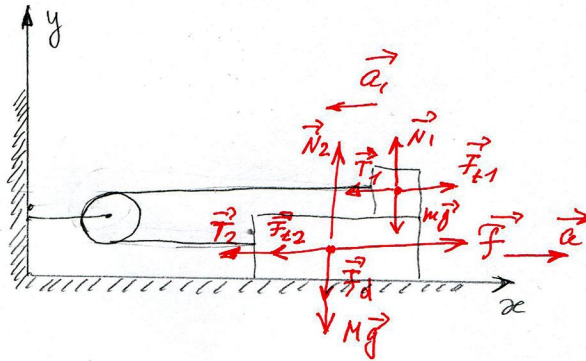
$M = 2$ кг,

$m = 1$ кг,

$a = 0,5g$,

$g = 10$ м/с²,

$k = 0,5$.



Решение задачи. Свяжем ИСО со столом. Выполним чертёж (рис. 8) и обозначим все необходимые силы, действующие на тела, участвующие в движении.

На брусок действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции \vec{N}_1 , сила натяжения нити \vec{T}_1 и сила трения \vec{F}_1 .

На доску действуют шесть сил: искомая сила \vec{F} , сила тяжести $M\vec{g}$, сила трения со стороны бруска \vec{F}_2 , сила давления со сто-

роны бруска $\vec{F}_d = -\vec{N}_1$, сила нормальной реакции \vec{N}_2 и сила натяжения нити \vec{T}_2 .

Запишем основной закон динамики для каждого тела:

$$\vec{N}_1 + \vec{F}_{t1} + m\vec{g} + \vec{T}_1 = m\vec{a}_1, \quad (1)$$

$$\vec{N}_2 + \vec{F}_d + M\vec{g} + \vec{F}_{t2} + \vec{T}_2 + \vec{F} = M\vec{a}. \quad (2)$$

Спроецируем данные уравнения на оси координат:

$$\text{на ось } x \quad F_{t1} - T_1 = -ma_1, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{на ось } y \quad N_1 - mg &= 0, \\ F_{t1} &= kN_1 = kmg. \end{aligned}$$

$$\text{на ось } x \quad -F_{t2} - T_2 + F = Ma, \quad (4)$$

$$\text{на ось } y \quad N_2 - F_d - Mg = 0.$$

По третьему закону Ньютона, с учетом нулевой массы блока

$$T_1 = T_2 \text{ и } F_{t1} = F_{t2},$$

а с учётом нерастяжимости нити $a = a_1$. Перепишем (3) и (4)

$$\begin{aligned} T - kmg &= ma, \\ -T - kmg + F &= Ma. \end{aligned}$$

Складывая эти уравнения, получим

$$F = 2kmg + (M + m)g = 25 \text{ Н.}$$

Относительно доски брусок движется с ускорением $2a$.

Литература

Каменский С. Е., Орехов В. П. Методика решения задач по физике в средней школе. Пособие для учителей. М., «Просвещение», 1971. 448 с.

Парфентьева Н. А., Фомина М. В. Решение задач по физике. В помощь поступающим в вузы. Часть I. М., Мир, 1993. 216 с.