произвольное число, и составим детерминант из координат нового двухвалентного тензора

$$\mathrm{Det}\,|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix}.$$

Мы получаем снова инвариант преобразования координатной системы.

Если развернуть определитель и собрать члены с одинаковыми степенями λ, то получится, очевидно, кубический многочлен относительно λ

$$\mathrm{Det}\,|a_{ij}-\lambda\delta_{ij}| = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3, \tag{6.15}$$

где

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \sum_i a_{ii}, \tag{6.16}$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix}, \tag{6.17}$$

$$I_3 = \mathrm{Det}\,|a_{ij}|. \tag{6.18}$$

Так как (6.15) представляет собой инвариант *при любом значении* λ, то коэффициенты I_1, I_2, I_3 по отдельности также должны являться инвариантами.

При этом инвариант I_1 нам уже встречался ранее (см. (4.18)), а инвариант I_3 был нами получен в этом параграфе.

Таковы основные *инварианты тензора* a_{ij}. Что же касается добавка $-\lambda\delta_{ij}$, то он уже сыграл свою роль и в окончательном результате, как мы видим, не участвует.

§ 7. Симметрический аффинор

Для приложений тензорного исчисления исключительно важную роль играет понятие симметрического аффинора.

Аффинор $\mathfrak{A}$ называется *симметрическим*, если для любых двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ имеет место соотношение

$$\mathbf{x}\mathfrak{A}\mathbf{x}' = \mathbf{x}'\mathfrak{A}\mathbf{x}. \tag{7.1}$$

Другими словами, скалярное произведение одного вектора на функцию $\mathfrak{A}$ от другого вектора не меняется при перестановке этих векторов между собой.

Необходимым и достаточным признаком симметричности аффинора служит симметричность матрицы его координат. В самом деле, пусть аффинор $\mathfrak{A}$ симметрический. Согласно (3.9)

$$a_{pq} = \mathbf{e}_p \mathfrak{A} \mathbf{e}_q, \qquad a_{qp} = \mathbf{e}_q \mathfrak{A} \mathbf{e}_p, \tag{7.2}$$

а в силу симметричности аффинора правые части равны и, следовательно,

$$a_{pq} = a_{qp}, \tag{7.3}$$

т. е. матрица координат аффинора симметрическая.

Обратно, пусть соблюдаются соотношения (7.3). Тогда в силу формул (7.2) получаем:

$$\mathbf{e}_p \mathfrak{A} \mathbf{e}_q = \mathbf{e}_q \mathfrak{A} \mathbf{e}_p. \tag{7.4}$$

Тем самым соотношение (7.1) проверено для ортов. Но тогда оно будет справедливым и для любых двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$. Чтобы убедиться в этом, достаточно помножить равенство (7.4) почленно на $x_p x'_q$ (где x_p — координаты $\mathbf{x}$, а x'_q — координаты $\mathbf{x}'$) и просуммировать почленно по p и q. Так как

$$\sum_p x_p \mathbf{e}_p = \mathbf{x}, \qquad \sum_q x'_q \mathbf{e}_q = \mathbf{x}',$$

то в результате мы получим соотношение (7.1).

Важнейшее свойство симметрического аффинора — наличие у него трех взаимно ортогональных собственных направлений. Вообще *собственным направлением аффинора* $\mathfrak{A}$ (не обязательно симметрического) называется направление, все векторы которого $\mathbf{x}$ при действии на них аффинора $\mathfrak{A}$ умножаются на некоторое число λ:

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}. \tag{7.5}$$

Для того чтобы направление было собственным, достаточно, чтобы хоть один его вектор $\mathbf{x}$ обладал свойством (7.5); тогда и все векторы этого направления обладают этим свойством, причем λ имеет для всех них одно и то же значение. Для проверки этого достаточно умножить (7.5) почленно на произвольное число $\alpha \neq 0$ и внести α в левой части равенства под знак $\mathfrak{A}$. Тогда оказывается, что вектор $\alpha\mathbf{x}$, т. е. любой вектор, коллинеарный с $\mathbf{x}$, также обладает свойством (7.5).

Число α может быть и отрицательным: собственное направление всегда рассматривается с точностью до замены на обратное.

Коэффициент λ называется *собственным значением* аффинора $\mathfrak{A}$ для данного собственного направления.

Запишем условие (7.5) в координатах, обозначая через y_p координаты $\mathfrak{A}\mathbf{x}$:

$$y_p = \lambda x_p \qquad (p = 1,\ 2,\ 3).$$

Пользуясь формулами (3.13), получим:

$$\sum_q a_{pq}x_q = \lambda x_p \qquad (p = 1,\ 2,\ 3). \tag{7.6}$$

Выписывая каждое из трех равенств отдельно в развернутом виде и перенося все члены налево, получим:

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)\,x_1 + \qquad a_{12}x_2 + \qquad a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)\,x_2 + \qquad a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{31}x_1 + \qquad a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)\,x_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

Для отыскания собственных направлений и собственных значений достаточно решить эту систему относительно неизвестных λ, x_1, x_2, x_3. При этом x_1, x_2, x_3 не должны одновременно обращаться в нуль (иначе вектор не укажет направления!) и ищутся они, как вытекает и из смысла задачи и из однородного характера уравнений (7.6), с точностью до умножения на общий множитель.

Чтобы система линейных однородных уравнений (7.7) относительно x_1, x_2, x_3 имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель равнялся нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{7.8}$$

Таким образом, чтобы удовлетворить системе (7.7), необходимо брать в качестве λ корень кубического уравнения (7.8) (которое называется *характеристическим уравнением* аффинора $\mathfrak{A}$). Обратно, если в качестве λ взят корень уравнения (7.8), то система (7.7) имеет ненулевое решение x_1, x_2, x_3.

Однако это не всегда означает отыскание собственного направления, так как взятый нами корень λ может оказаться комплексным.

До сих пор мы говорили о произвольном аффиноре $\mathfrak{A}$. *Теперь предположим, что он симметрический*, а следовательно,

$$a_{pq} = a_{qp}. \tag{7.9}$$

В этом случае все три корня уравнения (7.8) *обязательно вещественные*. Действительно, возьмем какой-нибудь корень λ уравнения (7.8), подставим его в систему (7.7) и найдем ненулевые x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие (7.7), а следовательно, и (7.6). При этом мы не предрешаем вопроса, будут ли значения λ, x_1, x_2, x_3 вещественными или существенно комплексными. Во всяком случае мы не ошибемся, считая их комплексными, так как вещественные числа есть частный случай комплексных.

Умножим обе части равенства (7.6) на $\overset{*}{x}_p$, где $\overset{*}{x}_p$ комплексно сопряжено с x_p, и просуммируем почленно по $p=1, 2, 3$. Получим:

$$\sum_p \sum_q a_{pq} \overset{*}{x}_p x_q = \lambda \sum_p x_p \overset{*}{x}_p. \tag{7.10}$$

Произведения вида $x_p \overset{*}{x}_p$ — вещественные (и даже неотрицательные) числа. Поэтому те члены суммы в левой части, для которых $p=q$, будут вещественными. Те же члены, для которых $p \neq q$, мы будем рассматривать попарно, объединяя, например, члены с $p=1$, $q=2$ и с $p=2$, $q=1$. Получим (пользуясь затем (7.9)):

$$a_{12} \overset{*}{x}_1 x_2 + a_{21} \overset{*}{x}_2 x_1 = a_{12} (\overset{*}{x}_1 x_2 + \overset{*}{x}_2 x_1).$$

Выражение в скобках есть сумма двух комплексно сопряженных чисел, и следовательно, число вещественное. Тем самым левая часть (7.10) есть число вещественное, равно как и коэффициент при λ в правой части (который, кроме того, не равен нулю, так как x_p не обращаются в нуль одновременно). Отсюда и λ всегда оказывается числом вещественным, а следовательно, ему отвечает определяемое из (7.7) собственное направление нашего симметрического аффинора $\mathfrak{A}$, для которого λ, таким образом, является собственным значением.

Теперь мы можем показать существование трех взаимно ортогональных собственных направлений. Возьмем какой-нибудь корень λ_1 уравнения (7.8) и отвечающее ему собственное направление, представленное, например, единичным вектором $\mathbf{e}'_1$. Таким образом,

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}'_1 = \lambda_1 \mathbf{e}'_1. \tag{7.11}$$

Рассмотрим плоскость E_2, ортогональную к $\mathbf{e}'_1$. Мы утверждаем, что векторы этой плоскости под действием аффинора $\mathfrak{A}$ переходят в векторы этой же плоскости. В самом деле, пусть $\mathbf{x}$ — вектор плоскости E_2, так что $\mathbf{x} \perp \mathbf{e}'_1$:

$$\mathbf{e}'_1 \mathbf{x} = 0. \tag{7.12}$$

Умножая скалярно обе части равенства (7.11) на $\mathbf{x}$, получим:

$$\mathbf{x}\mathfrak{A}\mathbf{e}'_1 = \lambda_1 \mathbf{e}'_1 \mathbf{x} = 0.$$

Пользуясь свойством (7.1), можем переписать это в виде

$$\mathbf{e}_1 \mathfrak{A}\mathbf{x} = 0. \tag{7.13}$$

Другими словами, $\mathfrak{A}\mathbf{x}$ ортогонален к $\mathbf{e}'_1$ и, следовательно, тоже принадлежит плоскости E_2 (точнее, может быть в ней отложен).

Мы можем теперь рассматривать наш симметрический аффинор $\mathfrak{A}$ на плоскости E_2, поскольку он переводит векторы этой плоскости в векторы этой же плоскости. Вводим на плоскости E_2 прямоугольные декартовы координаты и ищем собственные направления и собственные значения аффинора $\mathfrak{A}$ совершенно так же, как и ранее с тем лишь упрощением, что вместо трехмерного пространства у нас будет двумерное, и вместо трех координат x_1, x_2, x_3 будут лишь две x_1, x_2. Матрица координат аффинора $\mathfrak{A}$ будет иметь теперь вид

$$\begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{Vmatrix}, \qquad a'_{12} = a'_{21},$$

а вместо уравнения (7.8) мы получим:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} - \lambda & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Мы снова обнаружим наличие собственного направления, которое зададим некоторым единичным вектором $\mathbf{e}'_2$; соответствующее собственное значение обозначим λ_2. Так как $\mathbf{e}'_2$ принадлежит E_2, то $\mathbf{e}'_2 \perp \mathbf{e}'_1$.

Наконец, построим единичный вектор $\mathbf{e}'_3$, ортогональный и к $\mathbf{e}'_1$, и к $\mathbf{e}'_2$. Так как из (7.12) следует (7.13), то $\mathfrak{A}\mathbf{e}'_3$ тоже будет ортогонален к $\mathbf{e}'_1$ и аналогично к $\mathbf{e}'_2$. Другими словами, $\mathfrak{A}\mathbf{e}'_3$ оказывается коллинеарным $\mathbf{e}'_3$, а следовательно, определяет собственное направление. Соответствующее собственное значение обозначим λ_3.

Итак, у нас построены три взаимно ортогональных собственных направления $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ *с собственными значениями* λ_1, λ_2, λ_3:

$$\mathfrak{A}\mathbf{e}'_1 = \lambda_1 \mathbf{e}'_1, \qquad \mathfrak{A}\mathbf{e}'_2 = \lambda_2 \mathbf{e}'_2, \qquad \mathfrak{A}\mathbf{e}'_3 = \lambda_3 \mathbf{e}'_3. \tag{7.14}$$

Возникает вопрос, почему мы не построили сразу всех этих собственных направлений, используя поочередно все три корня уравнения (7.8) (подобно тому как мы построили $\mathbf{e}'_1$, используя корень λ_1). И действительно, это было бы самым простым способом доказательства, но лишь для случая *различных* корней уравнения (7.8). Для случая же, когда два или даже все три корня равны между собой, этот способ не годится. Поэтому мы пошли другим путем, пригодным во всех случаях.

Мы уже давали (§ 3) истолкование аффинора как центроаффинного преобразования пространства. В случае симметрического аффинора это истолкование принимает особенно простой вид, а именно, так как векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ взаимно ортогональны, то согласно (7.14) симметрический аффинор производит растяжение (сжатие) пространства по трем взаимно ортогональным направлениям в отношениях λ_1, λ_2, λ_3.

Примем $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, $\mathbf{e}'_3$ за орты новой координатной системы. Тогда каждая точка с координатами (x'_1, x'_2, x'_3) переходит, очевидно, в точку (y'_1, y'_2, y'_3) по формулам:

$$y'_1 = \lambda_1 x'_1, \quad y'_2 = \lambda_2 x'_2, \quad y'_3 = \lambda_3 x'_3. \tag{7.15}$$

Если среди λ_1, λ_2, λ_3 нет нулей, то получающееся таким образом специального вида центроаффинное преобразование пространства называется *чистой деформацией*. При отрицательном знаке, например у λ_1, в растяжение (сжатие) по оси X'_1 нужно включить и ее «перепрокидывание» в обратную сторону (т. е. зеркальное отражение пространства относительно плоскости $X'_2X'_3$).

В случае, когда, например, $\lambda_1 = 0$, преобразование (7.15) вырождается: все точки пространства переходят в точки плоскости $X'_2X'_3$.

Строго формально соотношения (7.15) можно получить так. Сравнивая (7.14) с (3.7), мы видим, что в новой координатной системе координаты нашего аффинора имеют вид

$$\begin{Vmatrix} a'_{11} & a'_{21} & a'_{31} \\ a'_{12} & a'_{22} & a'_{32} \\ a'_{13} & a'_{23} & a'_{33} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}. \tag{7.16}$$

Отсюда координатная запись аффинора (3.13) принимает вид

$$y'_p = \sum_q a'_{pq} x'_q = \lambda_p x'_p,$$

т. е. мы снова получим (7.15).

Если λ_1, λ_2, λ_3 все различны, то аффинор не имеет собственных направлений кроме трех найденных. Действительно, из формул (7.15) легко следует, что всякий вектор, не направленный по одной из осей, под действием аффинора уклоняется в сторону от своего первоначального направления.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то всякий вектор *в плоскости* $X'_1X'_2$ (т. е. при $x'_3 = 0$) под действием аффинора, как видно из (7.15), умножается на $\lambda\ (= \lambda_1 = \lambda_2)$:

$$y'_1 = \lambda x'_1, \quad y'_2 = \lambda x'_2, \quad y'_3 = 0. \tag{7.17}$$

Поэтому двойному собственному значению $\lambda\ (= \lambda_1 = \lambda_2)$ будет отвечать целая собственная плоскость $X'_1X'_2$, любое направление которой будет собственным. Направления, не принадлежащие ни этой плоскости, ни оси X'_3, очевидно, собственными быть не могут.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$, то (7.15) принимают вид

$$y'_1 = \lambda x'_1, \quad y'_2 = \lambda x'_2, \quad y'_3 = \lambda x'_3. \tag{7.18}$$

т. е. для *любого* вектора $\mathbf{x}$

$$\mathfrak{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x},$$

и аффинор $\mathfrak{A}$ вообще сводится к умножению на данное число λ. Любое направление является собственным.

Мы разобрали все возможные случаи расположения собственных направлений. Нам нужно показать, наконец, что корни уравнения (7.8) (с учетом их кратности) совпадают с нашими собственными значениями λ_1, λ_2, λ_3.

Прежде всего в осях X'_1, X'_2, X'_3 уравнение (7.8) принимает вид (согласно (7.16)):

$$\begin{vmatrix} \lambda_1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, действительно, видно, что в этом случае его корни совпадают с собственными значениями λ_1, λ_2, λ_3, а так как коэффициенты уравнения (7.8) суть инварианты преобразования координатной системы (см. (6.15)), то корни этого уравнения суть тоже инварианты и, следовательно, вычисленные в любых координатных осях дают наши собственные значения λ_1, λ_2, λ_3.

Пример. *Тензор моментов инерции.* Дано твердое тело, вращающееся около закрепленной точки O. Эту точку мы примем за начало координат. Будем для простоты записи считать, что тело состоит из конечного числа n материальных точек, жестко скрепленных между собой. Массы этих точек обозначим $m^{(1)}$, $m^{(2)}$, ..., $m^{(n)}$, а координаты их (в данный момент) через $x_i^{(1)}$, $x_i^{(2)}$, ..., $x_i^{(n)}$ $(i=1, 2, 3)$.

Составим матрицу

$$a_{ij} = -\sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} x_i^{(\alpha)} x_j^{(\alpha)} + \delta_{ij} \sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \mathbf{x}^{(\alpha)2}. \qquad (7.19)$$

Нетрудно убедиться, что эта матрица, построенная в любой координатной системе, дает координаты одного и того же симметрического тензора. В самом деле, в первом слагаемом при умножении тензора $x_i^{(\alpha)}$ на $x_j^{(\alpha)}$ (т. е. на себя) получается симметрический двухвалентный тензор; дальнейшее умножение на инвариант $m^{(\alpha)}$ и сложение полученных результатов дают тензор той же валентности. Второе слагаемое представляет собой единичный тензор δ_{ij}, умноженный на инвариант; действительно, как $m^{(\alpha)}$, так и

$$\mathbf{x}^{(\alpha)^2} = x_1^{(\alpha)^2} + x_2^{(\alpha)^2} + x_3^{(\alpha)^2}, \qquad (7.20)$$

т. е. квадрат расстояния данной точки от начала O, суть инварианты преобразования координатной системы.

Полученный симметрический тензор a_{ij} называется *тензором моментов инерции* данного твердого тела. Физический смысл этого тензора следующий. Пусть через точку O проведена некоторая ось с единичным направляющим вектором $\mathbf{l}$ (l_1, l_2, l_3). Вычислим инвариант $\sum_i \sum_j a_{ij} l_i l_j$, полученный в результате полного свертывания тензора a_{ij} с дважды взятым тензором l_i:

$$\sum_i \sum_j a_{ij} l_i l_j = -\sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \sum_i x_i^{(\alpha)} l_i \sum_j x_j^{(\alpha)} l_j + \sum_i \sum_j \delta_{ij} l_i l_j \sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \mathbf{x}^{(\alpha)^2}.$$

Так как $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$, то $\sum_i \sum_j \delta_{ij} l_i l_j = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$; кроме того, $\sum_i x_i^{(\alpha)} l_i = \mathbf{x}^{(\alpha)} \mathbf{l}$, и мы получаем:

$$\sum_i \sum_j a_{ij} l_i l_j = \sum_{\alpha=1}^{n} m^{(\alpha)} \left\{ -(\mathbf{x}^{(\alpha)} \mathbf{l})^2 + \mathbf{x}^{(\alpha)^2} \right\}. \qquad (7.21)$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, дает квадрат расстояния точки с массой $m^{(\alpha)}$ до выбранной нами оси, и мы получаем момент инерции относительно этой оси.

Момент инерции данного твердого тела относительно произвольной оси вращения, проходящей через точку O, получается путем свертывания тензора момента инерции с дважды взятым тензором l_i (направляющие косинусы оси). Собственные направления аффинора $\mathfrak{A}$ с координатами a_{ij} параллельны так называемым главным осям инерции. В них тензор моментов инерции принимает вид (7.16).

§ 8. Разложение аффинора на симметрическую и кососимметрическую части

Рассмотрим произвольный аффинор

$$\mathbf{y} = \mathfrak{A}\mathbf{x}. \qquad (8.1)$$

Соответствующая координатная запись имеет вид (3.13):

$$y_p = \sum_q a_{pq} x_q. \qquad (8.2)$$

Здесь a_{pq} — координаты аффинора, образующие двухвалентный тензор. В правой части (8.2) происходит тензорная операция умножения этого тензора на тензор x_q с последующим свертыванием по двум последним индексам. В результате получается снова тензор, именно, y_p.

Мы хотим теперь детальнее представить себе структуру аффинора $\mathfrak{A}$, разложив его на симметрическую и кососимметрическую части. Для этой цели произведем альтернацию над тензором a_{ij}, т. е. составим новый тензор c_{ij} согласно (6.4):

$$c_{ij} = a_{[ij]} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}). \qquad (8.3)$$