ГЛАВА III

ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО n ИЗМЕРЕНИЙ

§ 39. Понятие о евклидовом пространстве

Мы уже упоминали о том, что аффинная геометрия может быть построена на основе евклидовой путем отвлечения от метрических свойств пространства. Однако мы идем обратным путем: аффинную геометрию мы построили на основе самостоятельной аксиоматики, а переход к евклидовой геометрии совершим путем дополнительного включения метрических свойств. Это проще всего сделать, введя в n-мерном аффинном пространстве *скалярное произведение* векторов, что повлечет за собой и все другие метрические свойства и будет означать превращение нашего пространства в евклидово.

Для этой цели зададимся в n-мерном аффинном пространстве некоторой билинейной скалярной функцией $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ двух векторных аргументов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ (§ 26). Мы потребуем, чтобы эта функция удовлетворяла *условию симметрии*

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{y},\mathbf{x}) \tag{39.1}$$

и условию невырожденности, которое заключается в том, что *для каждого вектора* $\mathbf{x} \neq 0$ *можно найти такой вектор* $\mathbf{y}$, *что*

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) \neq 0. \tag{39.2}$$

В остальном функцию $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ мы выбираем произвольно, но затем уже раз навсегда присваиваем ее нашему пространству и в дальнейшем менять не будем.

Евклидовым пространством n измерений мы будем называть n-мерное аффинное пространство, в котором задана раз навсегда фиксированная билинейная скалярная функция двух векторных аргументов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, *удовлетворяющая условиям симметрии и невырожденности.*

Эту функцию векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ мы будем называть их *скалярным произведением* и обозначать просто $\mathbf{xy}$ или $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ (вместо $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$).

Скалярный квадрат вектора $\mathbf{x}$ определяется формулой

$$\mathbf{x}^2=\mathbf{x}\mathbf{x}. \tag{39.3}$$

Два вектора $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ будут называться *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю:

$$\mathbf{x}\mathbf{y}=0. \tag{39.4}$$

Длиной вектора $\mathbf{x}$ мы будем называть $\sqrt{\mathbf{x}^2}$ и обозначать ее будем $|\mathbf{x}|$:

$$|\mathbf{x}|=\sqrt{\mathbf{x}^2}. \tag{39.5}$$

Расстоянием между двумя точками A, B мы будем называть длину вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$AB=\sqrt{\mathbf{x}^2},\text{ где }\mathbf{x}=\overrightarrow{AB}. \tag{39.6}$$

Вообще, как мы увидим, из факта существования скалярного произведения векторов можно вывести метрические свойства n-мерного евклидова пространства, причем в одном частном случае мы получим в точности обычное пространство.

Скалярное произведение, как и всякая билинейная функция двух векторов, обладает свойствами

$$(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2,\mathbf{y})=(\mathbf{x}_1,\mathbf{y})+(\mathbf{x}_2,\mathbf{y}),\qquad (\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})=\alpha(\mathbf{x},\mathbf{y}),$$

которыми мы будем широко пользоваться. Конечно, относительно второго аргумента оно обладает такими же свойствами.

Евклидовы пространства распадаются на два больших класса: *вещественные и комплексные*. В самом деле, евклидово пространство можно строить как на базе *вещественного* аффинного пространства, так и *комплексного*. Соответствующие обозначения: R_n и R_n^+, где n-размерность.

В первом случае мы сохраняем прежнее соглашение, по которому в теории вещественного аффинного пространства все рассматриваемые числа считаются вещественными. В частности, и скалярное произведение $\mathbf{x}\mathbf{y}$ двух векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, как мы будем подразумевать, принимает лишь вещественные численные значения. Полученное при этом евклидово пространство также будет называться *вещественным*. *Вещественные евклидовы пространства* в свою очередь разделяются на два класса: *собственно евклидовы*, в которых для любого вектора $\mathbf{x}\neq\theta$:

$$\mathbf{x}^2>0, \tag{39.7}$$

и *псевдоевклидовы*, в которых $\mathbf{x}^2$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Собственно евклидовы пространства по своей геометрии вполне аналогичны обычному пространству и отличаются от него лишь числом измерений: при $n=3$ мы получаем в точности обычную стереометрию, равно как при $n=2$ — обычную планиметрию, а при $n=1$ — геометрию на обычной прямой.

Псевдоевклидовы пространства по характеру своей метрики обладают весьма своеобразными чертами, не имеющими аналогов в обычной геометрии. Укажем уже сейчас, что, хотя подкоренное выражение $\mathbf{x}^2$ в (39.5) и вещественное, но может принимать в псевдоевклидовом случае и положительные, и отрицательные, и нулевые значения, а значит, *длина вектора* $|\mathbf{x}|$ *может быть и вещественной, и чисто мнимой, и нулем.* Мы условимся, между прочим, в первом случае брать $|\mathbf{x}|$ положительной, а во втором случае — с положительным коэффициентом при i. Тогда умножение вектора $\mathbf{x}$ на *положительное* число означает умножение $|\mathbf{x}|$ на то же число. Таким образом, отрезки AB в псевдоевклидовом пространстве будут трех сортов: *вещественной, чисто мнимой и нулевой* длины (причем последний случай, как мы увидим, возможен и без совпадения точек A, B). Заметим, что наличие мнимых длин (расстояний) в псевдоевклидовом пространстве будет являться *единственным* нарушением нашего общего соглашения о том, что в вещественном пространстве рассматриваются лишь вещественные численные значения.

Псевдоевклидово пространство играет основную роль в теории относительности, причем разнотипность отрезков вещественной и чисто мнимой длины отражает разнотипность пространственных и временных «расстояний».

При данном числе измерений n собственно евклидово пространство будет по существу *единственным*, т. е. все другие будут с ним изоморфны. Напротив, псевдоевклидовых пространств будет целых n, различных по своим свойствам.

Во втором, комплексном, случае евклидово пространство строится на базе *комплексного* аффинного пространства. Рассматриваемые числа считаются комплексными, причем тогда, конечно, и функция $\mathbf{xy}$ принимает комплексные значения; евклидово пространство называется в этом случае *комплексным*. Расстояния AB будут комплексными числами (определенными с точностью до знака). Комплексное евклидово пространство при данном числе измерений n будет, как мы увидим, единственным (с точностью до изоморфизма).

Возвращаемся к общему случаю. Вообще задание билинейной скалярной функции $\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ равносильно, как мы знаем, заданию дважды ковариантного тензора φ_{ij} ее коэффициентов

$$\varphi_{ij}=\varphi(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j), \qquad \varphi(\mathbf{x},\mathbf{y})=\varphi_{ij}x^iy^j.$$

В частности, в случае скалярного произведения $\mathbf{xy}$ тензор коэффициентов мы будем обозначать g_{ij} и называть *метрическим тензором* нашего евклидова пространства. Тогда соответственно

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \tag{39.8}$$

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = g_{ij} x^i y^j. \tag{39.9}$$

Координаты метрического тензора представляют собой, таким образом, попарные скалярные произведения векторов репера. В частности, в случае $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ мы получаем скалярный квадрат вектора $\mathbf{x}$, который выражается *квадратичной формой*

$$\mathbf{x}^2 = g_{ij} x^i x^j. \tag{39.10}$$

Условие *симметрии*, наложенное нами на скалярное произведение

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{x},$$

равносильно, как мы знаем, симметричности тензора коэффициентов, в данном случае

$$g_{ij} = g_{ji}. \tag{39.11}$$

Условие *невырожденности*, как оно было нами формулировано, заключается в том, что для каждого вектора $\mathbf{x} \neq 0$ найдется неортогональный ему вектор $\mathbf{y}$, т. е. *не существует векторов* $\mathbf{x} \neq 0$, *ортогональных ко всем векторам пространства.*

Если на минуту допустить, что это условие не соблюдается (т. е., как мы будем говорить, происходит вырождение метрики), то существует такой вектор $\mathbf{x} \neq 0$, что

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = 0 \tag{39.12}$$

при любом $\mathbf{y}$; или в координатной записи:

$$g_{ij} x^i y^j = 0 \tag{39.13}$$

при любых $y^1, \ldots y^n$. Это значит, что коэффициенты при y^j должны по отдельности обращаться в нуль:

$$g_{ij} x^i = 0. \tag{39.14}$$

Так как $\mathbf{x} \neq 0$ и, значит, все x^i одновременно в нуль не обращаются, то система n однородных линейных уравнений (39.14) с n неизвестными x^i имеет ненулевые решения, а значит,

$$\mathrm{Det}\,|g_{ij}| = 0. \tag{39.15}$$

Обратно, если имеет место последнее равенство, то можно найти ненулевое решение $x^1, \ldots, x^n$ системы (39.14), для которого, очевидно, при любых $y^1, \ldots, y^n$ имеет место (39.13). В результате вектор $\mathbf{x}$ будет ортогонален ко всем $\mathbf{y}$, и происходит вырождение метрики.

Итак, для вырождения метрики необходимо и достаточно обращение в нуль $\mathrm{Det}\,|g_{ij}|$.

Тем самым условие невырожденности равносильно условию

$$\mathrm{Det}\,|g_{ij}| \neq 0. \tag{39.16}$$

Мы можем теперь разюмировать: *внесение в n-мерное аффинное пространство операции скалярного умножения векторов равносильно заданию в нем метрического тензора g_{ij}, удовлетворяющего условиям симметрии* (37.11) *и невырожденности* (39.16) (а в остальном выбранного произвольно).

Заметим, что достаточно потребовать соблюдения условия (39.16) в *одной* координатной системе; из нашего рассуждения видно, что отсюда следует невырожденность скалярного произведения, а тем самым соблюдение условия (39.16) в *любой* координатной системе. Впрочем, это нетрудно проверить и прямой выкладкой. В самом деле, закон преобразования g_{ij} имеет вид

$$g_{i'j'} = A^i_{i'} A^j_{j'} g_{ij}.$$

Если считать номером строки в матрицах g_{ij}, $g_{i'j'}$ первый индекс, в матрице $A^i_{i'}$ — нижний индекс, а в матрице $A^j_{j'}$ — верхний индекс, то можно сказать, что матрица $\|g_{i'j'}\|$ получена умножением матриц $\|A^i_{i'}\|$, $\|g_{ij}\|$, $\|A^j_{j'}\|$ в порядке их записи. Но отсюда следует, что определители матриц также перемножаются, причем определители матриц $\|A^i_{i'}\|$, $\|A^j_{j'}\|$, конечно, равны. В результате

$$\mathrm{Det}\,|g_{i'j'}| = (\mathrm{Det}\,|A^i_{i'}|)^2 \cdot \mathrm{Det}\,|g_{ij}|. \tag{39.17}$$

Другими словами, $\mathrm{Det}\,|g_{ij}|$ *есть относительный инвариант веса* 2. Ясно, что обращение его в нуль (или, наоборот, неравенство нулю) *в одной координатной системе* влечет тот же самый результат *в любой координатной системе.*

§ 40. Тензорная алгебра в евклидовом пространстве

Все, что было сказано о тензорных операциях в аффинном пространстве, остается, разумеется, верным и для евклидова пространства. При этом появляется, однако, и кое-что новое, а именно, исчезает принципиальная разница между ковариантными и контравариантными индексами и возникает возможность переводить одни в другие.

Составим прежде всего в каждой координатной системе матрицу величин g^{ij}, обратную матрице координат g_{ij} метрического тензора. В силу условия невырожденности обратная матрица существует, а в силу условия симметрии будет симметрической вместе с матрицей g_{ij}.