к оси X. Тогда на единицу площади этой площадки согласно (14.10) действует сила

$$\mathbf{P}(f_{11},\ f_{12},\ f_{13}), \tag{71.26}$$

а на всю площадку — сила $\mathbf{P}\,dS\,(f_{11}\,dS,\ f_{12}\,dS,\ f_{13}\,dS)$. Точнее, эта сила действует через площадку на часть тела, расположенную за площадкой (т. е. в сторону $-X$). За время ε этой части тела будет сообщен тем самым импульс

$$\mathbf{P}\,dS\varepsilon\,(f_{11}\,dS\varepsilon,\ f_{12}\,dS\varepsilon,\ f_{13}\,dS\varepsilon),$$

который, таким образом, протек через площадку в сторону $-X$. Чтобы установить *плотность потока импульса* в направлении $-X$, достаточно отнести протекший импульс к единице площади и к единице времени, т. е. поделить на dS и ε. Получаем снова (71.26). Таким образом, напряжения f_{11}, f_{12}, f_{13} равны плотностям потока трех проекций импульса в направлении $-X$, а следовательно, лишь знаком отличаются от T^{11}, T^{12}, T^{13}, которые выражают то же самое, но в направлении $+X$. Это же справедливо и для других координатных осей, так что окончательно

$$T^{\nu\lambda} = -f_{\nu\lambda} \quad (\nu,\ \lambda = 1,\ 2,\ 3). \tag{71.27}$$

Конечно, мы предполагали в этом рассуждении, что, кроме напряжений в теле, нет других причин для появления потока импульса.

Если перейти в другую инерциальную систему S', то тензор энергии-импульса пересчитывается по закону (71.20). Как отсюда можно заключить, на плотность энергии и импульса, наблюдаемых в системе S', имеет влияние не только плотность энергии, наблюдавшаяся в системе S (плотность импульса была равна нулю), *но и напряжения, наблюдавшиеся в системе* S. Если в системе S покоятся два тела с одинаковой плотностью энергии (и нулевой плотностью импульса), но одно находящееся в напряженном состоянии, а другое нет, то в системе S' они будут обладать различными (вообще говоря) плотностями энергии и импульса.

Таким образом, объединение плотностей энергии, импульса и потока импульса в один четырехмерный тензор не является лишь формальностью; совокупность этих величин образует единую физическую сущность, и это проявляется в том, что одни из них способны «переходить» в другие, когда мы меняем инерциальную систему.

§ 72. Закон сохранения энергии и импульса

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос, каким образом обеспечиваются законы сохранения энергии и импульса, когда распределение и перемещение энергии и импульса задается тензором T^{ij}. Будем вести рассмотрение относительно какой-либо инерциальной системы S, пользуясь соответствующими ей ортонормированными координатами x^i в пространстве событий. Выделим покоящуюся относительно системы S трехмерную область ω, ограниченную поверхностью П. Будем наблюдать втекание и вытекание энергии через поверхность П, причем говорить будем только о вытекании (втекание оцениваем как отрицательное вытекание). Согласно (71.16) скорость этого вытекания будет равна:

$$q^0 = c \iint\limits_{\Pi} \sum_{\lambda=1}^{3} T^{0\lambda} n_\lambda \, dS. \tag{72.1}$$

Преобразуем это выражение по теореме Остроградского (18.2):

$$q^0 = c \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{0\lambda}}{\partial x^\lambda} \, d\omega. \tag{72.2}$$

За бесконечно малый промежуток времени ε количество вытекшей через П энергии будет равно:

$$q^0 \varepsilon = \varepsilon c \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{0\lambda}}{\partial x^\lambda} \, d\omega. \tag{72.3}$$

Здесь и в дальнейшем бесконечно малыми высшего порядка мы пренебрегаем. С другой стороны, увеличение количества энергии в области ω за время ε можно подсчитать следующим образом. Общее количество энергии в пределах области ω выражается в каждый момент времени t интегралом

$$\iiint\limits_{\omega} T^{00} \, d\omega, \tag{72.4}$$

так как T^{00} есть плотность энергии. При этом не нужно забывать, что тензор энергии импульса T^{ij} образует поле в пространстве событий, так что, в частности, T^{00} есть функция от x^i, т. е. от x, y, z и времени t. Но по x, y, z в (72.4) произведено интегрирование, так что интеграл есть функция только от времени t. Увеличение количества энергии за время ε можно подсчитать как дифференциал этой функции:

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \iiint\limits_{\omega} T^{00} \, d\omega = \varepsilon \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} \, d\omega. \tag{72.5}$$

Таким образом, за время ε внутри области ω появилось дополнительное количество энергии (72.5), и еще некоторое количество энергии (72.3) вытекло за пределы области. Складывая эти два выражения, мы получаем *то количество энергии, которое возникло за время ε внутри области* ω:

$$\varepsilon c \iiint\limits_{\omega} \left(\sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{0\lambda}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial T^{00}}{c\, \partial t} \right) d\omega. \tag{72.6}$$

Учитывая, что $\frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} = \frac{\partial T^{00}}{\partial x^0}$, так как $ct = x^0$, получаем окончательно:

$$\varepsilon c \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{0j}}{\partial x^j} d\omega, \tag{72.7}$$

где под знаком интеграла происходит суммирование по $j = 0, 1, 2, 3$. Спрашивается, каким образом возникла энергия (72.7)?

Если рассматриваемый нами тензор энергии-импульса является *частичным*, т. е. связан с одним лишь видом явлений (например, электромагнитным полем), то такое возникновение энергии *данного вида* возможно за счет исчезновения энергии *другого вида* (например, механической) и означает лишь переход одного вида энергии в другой. Если же T^{ij} есть *полный* тензор энергии-импульса, т. е. исчерпывает всю картину *распределения и перемещения энергии-импульса*, то посторонние источники энергии отсутствуют и *количество возникшей энергии* (72.7) *должно всегда равняться нулю (закон сохранения энергии).*

Итак, в случае *полного тензора энергии-импульса*

$$\varepsilon c \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{0j}}{\partial x^j} d\omega = 0$$

при любом выборе области ω и в любой момент времени. Это возможно только в случае тождественного обращения в нуль подынтегрального выражения

$$\frac{\partial T^{0j}}{\partial x^j} = 0. \tag{72.8}$$

Так записывается закон сохранения энергии с точки зрения данной инерциальной системы S.

То, что сделано сейчас для *энергии*, мы дословно повторим для импульса. Согласно (71.18) скорость вытекания ν-й проекции импульса через поверхность Π, ограничивающую область ω, выражается формулой

$$q^{\nu} = \iint\limits_{\Pi} \sum_{\lambda=1}^{3} T^{\nu\lambda} n_{\lambda}\, dS = \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{\nu\lambda}}{\partial x^{\lambda}} d\omega.$$

Последнее выражение получено по теореме Остроградского. Следовательно, скорость вытекания самого импульса равна:

$$\sum_{\nu=1}^{3} q^{\nu}\mathbf{e}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{\nu\lambda}}{\partial x^{\lambda}}\, d\omega.$$

За бесконечно малое время ε через П вытечет импульс

$$\varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} q^{\nu}\mathbf{e}_{\nu} = \varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{\partial T^{\nu\lambda}}{\partial x^{\lambda}}\, d\omega. \tag{72.9}$$

С другой стороны, импульс, заключенный в ω в данный момент времени t, равен:

$$\frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} T^{\nu 0}\, d\omega,$$

так как ν-я проекция плотности импульса ($\nu = 1, 2, 3$) равна $\frac{1}{c} T^{\nu 0}$, а значит, сама плотность импульса имеет вид $\frac{1}{c} \sum\limits_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} T^{\nu 0}$. Увеличение импульса в области ω за время ε можно подсчитать аналогично (72.5). Получаем:

$$\varepsilon \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{c} \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} T^{\nu 0}\, d\omega\right) = \frac{\varepsilon}{c} \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{\nu 0}}{\partial t}\, d\omega =$$

$$= \varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{\nu 0}}{\partial x^{0}}\, d\omega. \tag{72.10}$$

Объединяя (72.9) и (72.10), т. е. импульс, вытекший через П, и импульс, дополнительно обнаруженный в ω, получаем *общее количество импульса, возникшего в области* ω *за время* ε:

$$\varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_{\nu} \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{\nu j}}{\partial x^{j}}\, d\omega. \tag{72.11}$$

Здесь по $j = 0, 1, 2, 3$ происходит суммирование. Как и в случае энергии, возникший в области ω импульс (72.11) может быть отличен от нуля, только если T^{ij} — частичный тензор энергии-импульса и речь идет об импульсе частного вида. Если же T^{ij} — полный тензор энергии-импульса, то импульс, возникший в области ω, должен равняться нулю (закон сохранения импульса). Мы получаем, следовательно:

$$\sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_\nu \iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{\nu j}}{\partial x^j}\, d\omega = 0.$$

Отсюда коэффициенты при $\mathbf{e}_\nu$ по отдельности равны нулю:

$$\iiint\limits_{\omega} \frac{\partial T^{\nu j}}{\partial x^j} = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3).$$

А так как это равенство верно для любой области ω и любого момента времени t, то подынтегральное выражение тождественно равно нулю:

$$\frac{\partial T^{\nu j}}{\partial x^j} = 0 \qquad (\nu = 1,\ 2,\ 3). \tag{72.12}$$

Так выглядит *закон сохранения импульса* с точки зрения инерциальной системы S. Объединяя его с законом сохранения энергии (72.8), пишем:

$$\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j} = 0 \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3). \tag{72.13}$$

В этой форме закон *сохранения энергии-импульса имеет вид инвариантного тензорного соотношения в пространстве событий.*

В самом деле, совокупность частных производных $\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k}$ для любого дважды контравариантного тензорного поля T^{ij} образует, как мы знаем (§ 38), поле тензора, дважды контравариантного и один раз ковариантного. Тогда $\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}$, где по j происходит свертывание, дает снова тензор (один раз контравариантный), который мы обозначим T^i:

$$T^i = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^j}. \tag{72.14}$$

Этот тензор естественно назвать *дивергенцией тензора T^{ij} в четырехмерном пространстве событий.* Теперь (72.13) принимает вид

$$T^i = 0. \tag{72.15}$$

Таким образом, закон сохранения энергии-импульса записывается в виде обращения в нуль дивергенции полного тензора энергии-импульса. Ясно, что если координаты тензора T^i равны нулю в одной координатной системе, то то же имеет место и в любой другой. Поэтому и закон сохранения энергии-импульса имеет инвариантный характер и, будучи установлен в одной инерциальной системе S, соблюдается и в любой другой S'. Закон сохранения энергии-импульса (72.13), как мы видим, накладывает существенное ограничение на допустимый выбор полного тензора энергии-импульса. Разумеется, если тензор энергии-импульса является частичным, то его дивергенция T^i не обязана обращаться в нуль.

§ 73. Дивергенция тензора энергии-импульса электромагнитного поля

Пусть теперь T^{ij} является *частичным* тензором энергии-импульса, а именно, отвечает электромагнитному полю согласно (71.19):

$$T^{ij} = -\frac{g^{ij}}{16\pi} F^{pq} F_{pq} + \frac{1}{4\pi} F^{ip} F^{jq} g_{pq}. \qquad (73.1)$$

Тогда в области ω за время ε возникают (за счет перехода из других форм) некоторые количества энергии и импульса электромагнитного поля, которые выражаются согласно (72.7) и (72.11). Пользуясь дивергенцией тензора энергии-импульса (72.14), эти выражения энергии и импульса можно переписать в виде

$$\varepsilon c \iiint_{\omega} T^0 \, d\omega, \qquad \varepsilon \sum_{\nu=1}^{3} \mathbf{e}_\nu \iiint_{\omega} T^\nu \, d\omega. \qquad (73.2)$$

Подсчитаем теперь дивергенцию тензора (73.1). Заметим предварительно, что при дифференцировании выражения $F^{pq}F_{pq}$ можно дифференцировать лишь второй множитель и затем результат удваивать. В самом деле, дифференцирование первого множителя дает тот же результат, что и дифференцирование второго

$$\frac{\partial F^{pq}}{\partial x^k} F_{pq} = F^{pq} \frac{\partial F_{pq}}{\partial x^k}. \qquad (73.3)$$

Чтобы убедиться в этом, выражаем F^{pq} как результат поднятия индексов у F_{ij}:

$$F^{pq} = g^{pi} g^{qj} F_{ij}$$

и вставляем в обе части проверяемого равенства (73.3). Получим (учитывая, что g_{ij} и g^{ij} — константы):

$$g^{pi} g^{qj} \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^k} F_{pq} = g^{pi} g^{qj} F_{ij} \frac{\partial F_{pq}}{\partial x^k},$$

а это — тождество, в чем легко убедиться, переставляя в одной из частей равенства обозначения индексов суммирования p, i и q, j.