во всей области Ω^* $\Gamma^i_{jk}=\Gamma^i_{kj}$; *всегда ли можно истолковать переменные* $x^1, \ldots, x^n$ *как криволинейные координаты в некоторой области* Ω *аффинного пространства так, чтобы наперед заданные функции* $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$ *выражали коэффициенты связности в области* Ω?

Ответ на этот вопрос будет, как мы позже увидим, *отрицательным*, даже если вместо всей области Ω^* брать сколь угодно малые ее куски. Требуемое истолкование возможно лишь в весьма частном случае, когда Γ^i_{jk} удовлетворяют определенной системе дифференциальных уравнений в частных производных. Заметим, что этот отрицательный результат не противоречит доказанной теореме: действительно, возможность истолковать функции $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$ как коэффициенты связности в криволинейных координатах x^i *входила в условие теоремы.*

Теперь возникает следующий вопрос: мы знаем, что в некоторых частных случаях функции $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$, заданные в области изменения переменных x^i, *определяют в этой области аффинную геометрию* (именно, если истолкование Γ^i_{jk} как коэффициентов связности в криволинейных координатах x^i удается). *Нельзя ли считать, что и в общем случае функции* $\Gamma^i_{jk}(x^1, \ldots, x^n)$ *все-таки определяют в рассматриваемой области некоторую геометрию, которая, естественно, является обобщением аффинной?* Ответом на этот вопрос служит понятие *о пространстве аффинной связности*, которым мы будем заниматься в главе VII (§ 89).

§ 79. Криволинейные координаты в евклидовом пространстве

Так как евклидово пространство получается из аффинного лишь дополнительным введением метрики (в форме скалярного произведения векторов; § 39), то все сказанное о криволинейных координатах в §§ 75—78 остается верным, и повторять этого мы не будем. В частности, за *объект связности евклидова пространства* мы принимаем объект связности Γ^k_{ij} аффинного пространства, на базе которого оно построено. Но наличие метрики означает появление дополнительных вопросов, которые мы также хотим рассмотреть в криволинейных координатах. Как мы знаем, задание метрики сводится к заданию метрического тензора g_{ij}, который можно относить к любому аффинному реперу. При этом имеет место формула

$$g_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j. \tag{79.1}$$

В соответствии с общим соглашением (§ 76) мы, рассматривая тензор g_{ij} *в криволинейных координатах* x^i, относим его в каждой точке M к соответствующему локальному реперу $\{M, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$. Его координаты будут при этом выражаться скалярными произведениями

$$g_{ij}(M) = \mathbf{x}_i(M)\,\mathbf{x}_j(M) \tag{79.2}$$

согласно (79.1).

В этой трактовке метрический тензор нужно рассматривать уже как тензорное поле; его координаты будут являться функциями точки

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n), \tag{79.3}$$

хотя по существу в каждой точке задается все-таки один и тот же тензор. При переходе к новым криволинейным координатам g_{ij} преобразуются по закону

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}.$$

Мы вскоре увидим, что задание в криволинейных координатах x^i метрического тензора $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ играет для евклидова пространства такую же роль, как задание объекта связности $\Gamma^k_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ для аффинного пространства, т. е. полностью определяет его геометрию. Но пока мы просто выведем некоторые свойства евклидова пространства на основе задания метрического тензора g_{ij} в криволинейных координатах. При этом ясно само собой, что для локального репера в произвольной точке M и соответствующего метрического тензора $g_{ij}(M)$ можно повторить все сказанное в §§ 39—41.

Рассмотрим прежде всего параметрически заданную кривую (см. 77.1)):

$$x^i = x^i(t), \qquad t_1 \leqslant t \leqslant t_2. \tag{79.4}$$

Радиус-вектор любой точки выражается функцией ее криволинейных координат

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(x^1, \ldots, x^n),$$

причем вдоль кривой сами $x^1, \ldots, x^n$ зависят от t. Отсюда касательный вектор $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ в произвольной точке M нашей кривой имеет вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{dt} \mathbf{x}_i, \tag{79.5}$$

а значит, обладает в локальном репере координатами $\frac{dx^i}{dt}$. Эти координаты образуют, следовательно, один раз контравариантный тензор, что легко проверяется и непосредственно: при переходе к новым криволинейным координатам $x^{i'}$ получаем:

$$\frac{dx^{i'}}{dt} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{dx^i}{dt}$$

по правилу дифференцирования сложной функции. Но это выражает в то же время тензорный закон преобразования для $\frac{dx^i}{dt}$.

Аналогично, рассматривая вместо производной дифференциал радиуса-вектора при бесконечно малом смещении по нашей кривой, получаем по формуле полного дифференциала:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_i dx^i. \tag{79.6}$$

Мы видим, что координатами $d\mathbf{x}$ служат dx^i. Следовательно, dx^i образуют один раз контравариантный тензор, и это легко проверяется непосредственно:

$$dx^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} dx^i.$$

Все дифференциалы берутся при бесконечно малом смещении. Здесь и в дальнейшем *мы будем понимать под этим, что они берутся как дифференциалы функций от параметра t при его бесконечно малом приращении dt.*

Скалярный квадрат вектора $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ можно вычислить по общей формуле (39.9), пользуясь ею в локальном репере:

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2 = g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}. \tag{79.7}$$

Отсюда

$$\left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2} = \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}. \tag{79.8}$$

Мы знаем, что длина кривой определяется формулой (65.7):

$$\overset{\frown}{M_1 M_2} = \int_{M_1}^{M_2} |d\mathbf{x}| = \int_{t_1}^{t_2} \left|\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right| dt$$

и, следовательно,

$$\overset{\frown}{M_1 M_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}}\, dt. \tag{79.9}$$

Не нужно забывать, что в подынтегральном выражении g_{ij} — функции от $x^1, \ldots, x^n$ согласно (79.3), а $x^1, \ldots, x^n$ — функции от t согласно (79.4), так что подынтегральное выражение зависит в конечном счете от t.

Итак, если в криволинейных координатах x^i *в области* Ω *нам задан метрический тензор* $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, *то длину любой кривой* (79.4) *можно вычислить по формуле* (79.9).

Вместо того чтобы задавать длину дуги интегралом, можно выразить ее дифференциал, совпадающий, конечно, с подынтегральным выражением:

$$ds = |d\mathbf{x}| = \sqrt{g_{ij}dx^i dx^j},$$

или, что то же,

$$ds^2 = g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)\,dx^i dx^j. \tag{79.10}$$

Квадрат дифференциала дуги при любом бесконечно малом смещении по любой кривой выражается дифференциальной квадратичной формой (79.10) *от криволинейных координат* (вообще дифференциальной квадратичной формой от переменных $x^1, \ldots, x^n$ называется квадратичная форма от их дифференциалов $dx^1, \ldots, dx^n$ с коэффициентами — функциями от $x^1, \ldots, x^n$).

Эту квадратичную форму мы будем называть *метрической*. Она инвариантна относительно преобразования криволинейных координат x^i; это видно как по ее геометрическому смыслу, так и по алгебраической структуре: она представляет результат двойного свертывания метрического тензора g_{ij} с контравариантным тензором dx^i.

Покажем теперь — и это важный факт, — что *объект связности* $\Gamma^i_{jk}(M)$ *евклидова пространства можно вычислить, зная метрический тензор* $g_{ij}(M)$ *в какой-нибудь криволинейной системе координат.*

Согласно (77.6) коэффициенты связности подсчитываются из разложения

$$\mathbf{x}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\mathbf{x}_k. \tag{79.11}$$

Теперь, имея в пространстве евклидову метрику, мы можем по-новому подойти к этому подсчету. Умножая (79.11) на $\mathbf{x}_l$ скалярно, получим:

$$\mathbf{x}_l\mathbf{x}_{ij} = \Gamma^k_{ij}\,g_{lk}, \tag{79.12}$$

так как

$$\mathbf{x}_l\mathbf{x}_k = g_{lk}. \tag{79.13}$$

Мы видим, что правая часть (79.12) получается из Γ^k_{ij} опусканием верхнего индекса (правда, опускание индексов мы рассматривали лишь для тензоров, в то время как Γ^k_{ij} — не тензор; однако формальная сторона дела от этого не меняется). Соответственно этому обозначим:

$$\Gamma_{l,ij}=g_{lk}\Gamma_{ij}^{k}. \tag{79.14}$$

Обратно, Γ_{ij}^{k} получаются из $\Gamma_{l,ij}$ поднятием первого нижнего индекса:

$$\Gamma_{ij}^{k}=g^{kl}\Gamma_{l,ij}. \tag{79.15}$$

Ясно, что для вычисления Γ_{ij}^{k} достаточно вычислить $\Gamma_{l,ij}$. Согласно (79.12)

$$\Gamma_{l,ij}=\mathbf{x}_{l}\mathbf{x}_{ij}. \tag{79.16}$$

При этом, очевидно,

$$\Gamma_{l,ij}=\Gamma_{l,ji}.$$

Эти величины и есть те неизвестные, которые требуется выразить посредством метрического тензора g_{ij}. Для этой цели дифференцируем равенство (79.13) по x^m почленно. Получим:

$$\mathbf{x}_{lm}\mathbf{x}_{k}+\mathbf{x}_{l}\mathbf{x}_{km}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{m}},$$

т. е.

$$\Gamma_{k,lm}+\Gamma_{l,km}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{m}}. \tag{79.17}$$

Мы имеем здесь (при фиксированных k, l, m) одно уравнение с двумя неизвестными. Однако, если переписать это уравнение, сделав над k, l, m круговую подстановку, сначала один раз, а потом еще раз, то уравнений будет уже три, а неизвестное добавится лишь одно. Получаем:

$$\Gamma_{l,mk}+\Gamma_{m,lk}=\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^{k}},$$

$$\Gamma_{m,kl}+\Gamma_{k,ml}=\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{l}}.$$

Учитывая симметрию $\Gamma_{l,ij}$ по индексам i, j, мы замечаем, что в левых частях у нас имеется фактически лишь три неизвестные величины, попарные суммы которых заданы:

$$\Gamma_{k,lm}+\Gamma_{l,mk}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{m}},$$

$$\Gamma_{l,mk}+\Gamma_{m,kl}=\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^{k}},$$

$$\Gamma_{m,kl}+\Gamma_{k,lm}=\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^{l}}.$$

Такую систему можно решить элементарным приемом, складывая почленно первые два уравнения и вычитая третье. Получим:

$$2\Gamma_{l,mk}=\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}$$

и окончательно

$$\Gamma_{l,mk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^m}+\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k}-\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^l}\right). \tag{79.18}$$

Вставляя этот результат в (79.15), мы приходим к решению нашей задачи:

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}+\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right). \tag{79.19}$$

Полученные выражения для $\Gamma_{l,mk}$ и Γ_{ij}^k называются *Христоффелями (символами Христоффеля) соответственно 1-го и 2-го рода.*

Если, в частности, x^i — аффинные координаты, то

$$\mathbf{x}=x^i\mathbf{e}_i, \quad \mathbf{x}_i=\mathbf{e}_i=\text{const}, \quad g_{kl}=\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l=\mathbf{e}_k\mathbf{e}_l=\text{const},$$

все частные производные $\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^m}$ обращаются в нуль. Этим еще раз подтверждается, что в аффинных координатах $\Gamma_{kj}^l=0$.

Докажем теперь теорему, показывающую фундаментальную роль метрического тензора g_{ij} для евклидовой геометрии.

Пусть нам известно, что переменные $x^1, \ldots, x^n$, пробегающие данную связную область изменения Ω^*, служат криволинейными координатами в какой-то (неизвестной) области Ω евклидова пространства, причем координаты метрического тензора в этой системе криволинейных координат нам заданы:

$$g_{ij}=g_{ij}(x^1, \ldots, x^n). \tag{79.20}$$

Тогда мы можем восстановить всю геометрию области Ω.

В самом деле, пользуясь (79.19), мы находим коэффициенты связности Γ_{ij}^k тоже как функции $x^1, \ldots, x^n$ и, исходя отсюда, совершаем переход в какую-нибудь аффинную координатную систему $x^{i'}$ так же, как в § 78. В этой координатной системе находим координаты метрического тензора по формуле преобразования

$$g_{i'j'}=\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}g_{ij}.$$

Так как $x^{i'}$ — аффинные координаты, то $g_{i'j'}=\text{const}$, т. е. от выбора точки не зависят. В результате мы нашли в области Ω аффинную координатную систему $x^{i'}$ (что позволяет восстановить всю аффинную геометрию области Ω) и метрический тензор $g_{i'j'}$ в ней, что позволяет выразить скалярное произведение любых двух векторов, а тем самым полностью восстановить евклидову метрику области Ω. Теорема доказана.

Снова возникает вопрос: *пусть в области изменения переменных* x^i *каким-либо образом заданы функции* $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$, $g_{ij} = g_{ji}$, $\mathrm{Det}\,|g_{ij}| \neq 0$. *Всегда ли можно истолковать* x^i *как криволинейные координаты в некоторой области* Ω *евклидова пространства так, чтобы* $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ *выражали координаты метрического тензора в этой области в криволинейных координатах* x^i?

Ответ снова будет отрицательным: такое истолкование возможно лишь в очень частном случае, именно, когда функции $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ удовлетворяют определенной системе дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка (которой мы будем заниматься позже). Лишь тогда задание $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ позволяет установить евклидову геометрию в области изменения x^i. Но здесь естественно спросить: нельзя ли и в общем случае задания функций $g_{ij}(x^1, \ldots, x^n)$ связать с ними определенную геометрию в области изменения переменных x^i наподобие этой евклидовой геометрии?

Ответом на этот вопрос служит понятие *римановой геометрии*, которой мы будем заниматься в главе VII.