§ 107. Геометрический смысл тензора кривизны (окончание)

Мы будем рассматривать различные кусочно гладкие кривые, выходящие из какой-нибудь точки $M(x^i_M)$ пространства L_n. Эти кривые мы относим к параметру s, значение которого для каждой точки Q на кривой определяется по формуле

$$s = \int\limits_{\smile MQ} \sqrt{dx^{1^2} + dx^{2^2} + \ldots + dx^{n^2}}. \tag{107.1}$$

Здесь интеграл берется по отрезку кривой от точки M до точки Q. В точке M параметр s, очевидно, равен нулю, а по мере удаления точки Q от M он принимает возрастающие положительные значения. (Координатная система x^i в окрестности точки M временно фиксирована.) Мы будем рассматривать кривые, для которых s меняется в пределах

$$0 \leqslant s \leqslant S, \tag{107.2}$$

где значение S фиксировано. Такие кривые располагаются (при достаточно малом S) в некоторой окрестности точки M, именно определяемой условием

$$(x^1 - x^1_M)^2 + \ldots + (x^n - x^n_M)^2 < S^2. \tag{107.3}$$

Только эту область мы и будем рассматривать. Параметрические уравнения рассматриваемых кривых мы будем писать в виде

$$x^i = x^i(s),$$

причем под Q будем понимать в дальнейшем подвижную точку с координатами $x^i(s)$. Согласно (107.1)

$$ds = \sqrt{dx^{1^2} + \ldots + dx^{n^2}}. \tag{107.4}$$

Отметим, что отсюда следует:

$$\left| \frac{dx^i}{ds} \right| \leqslant 1. \tag{107.5}$$

Параметр s не обладает, конечно, инвариантностью относительно преобразования координат x^i. Однако было бы нетрудно показать, *что для точки Q, стремящейся в точку M, значение параметра s будет бесконечно малым всегда одного и того же порядка независимо от выбора координатной системы x^i.* Для дальнейшего будет иметь значение лишь это свойство параметра s.

Зададимся в точке M каким-либо вектором ξ^i_M и будем его параллельно переносить по какой-нибудь из рассматриваемых кривых. Координаты ξ^i параллельно переносимого вектора будут зависеть от точки его приложения, т. е. от параметра s:

$$\xi^i = \xi^i(s). \tag{107.6}$$

Мы хотим изучить поведение этих функций при s бесконечно малом с точностью 2-го порядка относительно s. Полученный результат мы применим затем к частному случаю замкнутого пути.

Функции $\xi^i(s)$ удовлетворяют закону параллельного перенесения

$$d\xi^i = -\Gamma^i_{kl}\xi^l\,dx^k, \text{или, что то же, } \frac{d\xi^i}{ds} = -\Gamma^i_{kl}\xi^l\frac{dx^k}{ds}, \tag{107.7}$$

а также начальным условиям

$$\xi^i(0) = \xi^i_M. \tag{107.8}$$

Вдоль всех рассматриваемых кривых сумма квадратов координат ξ^i, $\sigma = \sum_{i=1}^{n}\xi^i(s)^2$, остается ограниченной одной и той же константой C_1. Это почти очевидно; для интересующихся приводим детальный вывод. В самом деле,

$$\frac{d\sigma}{ds} = 2\sum_{i=1}^{n}\xi^i(s)\frac{d\xi^i(s)}{ds} = -2\sum_{i=1}^{n}\Gamma^i_{kl}\xi^l\xi^i\frac{dx^k}{ds}.$$

Так как функции $\Gamma^i_{kl}(x^1, \ldots, x^n)$ в рассматриваемой области (107.3) ограничены

$$|\Gamma^i_{kl}| \leqslant C_0, \tag{107.9}$$

то, учитывая (107.5), получаем:

$$\left|\Gamma^i_{kl}\frac{dx^k}{ds}\right| \leqslant nC_0,$$

так что

$$\left|\frac{d\sigma}{ds}\right| \leqslant 2nC_0\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|\xi^l||\xi^i| \leqslant 2n^2C_0\sigma. \tag{107.10}$$

Мы использовали здесь, что $|\xi^l||\xi^i| \leqslant \frac{1}{2}(\xi^{l^2}+\xi^{i^2})$, так что

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|\xi^l||\xi^i| \leqslant n\sum_{i=1}^{n}\xi^{i^2} = n\sigma.$$

Из (107.10) следует, что

$$\left|\frac{d\ln\sigma}{ds}\right| \leqslant 2n^2C_0, \text{ т. е. } \ln\sigma \leqslant \ln\sigma_M + 2n^2C_0s,$$

где σ_M — начальное значение σ в точке M при $s=0$. Учитывая (107.2), получаем окончательно:

$$\sigma \leqslant C_1,$$

где

$$C_1 = \sigma_M e^{2n^2C_0S}.$$

Константа C_1 не зависит от выбора кривой. Из полученного неравенства следует и подавно

$$|\xi^i(s)| \leqslant \sqrt{C_1} \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{107.11}$$

вдоль всех рассматриваемых кривых. Это мы и хотели получить.

Интегрируем (107.7) почленно:

$$\int_0^s \frac{d\xi^i}{ds}\,ds = -\int_0^s \Gamma^i_{kl}\xi^l \frac{dx^k}{ds}\,ds.$$

Левую часть можно записать в конечном виде

$$\Delta\xi^i = \xi^i(s) - \xi^i_M = -\int_0^s \Gamma^i_{kl}\xi^l \frac{dx^k}{ds}\,ds. \tag{107.12}$$

В силу (107.5), (107.9), (107.11) подынтегральная функция в правой части ограничена, так что

$$|\Delta\xi^i| \leqslant C_2 s, \tag{107.13}$$

где C_2 — одинаковая для всех кривых константа.

Подсчитаем $\Delta\xi^i$ из (107.12) сначала с точностью 1-го порядка относительно s. Для этого мы заменим Γ^i_{kl} его начальным значением $(\Gamma^i_{kl})_M$, а ξ^l — его начальным значением ξ^l_M. При этом мы допускаем в подынтегральном выражении ошибку, по модулю меньшую $\tilde{C}s$, где $\tilde{C}$ — некоторая константа, одинаковая для всех кривых. В самом деле, в множителе Γ^i_{kl} мы делаем ошибку

$$\Delta\Gamma^i_{kl} = (\Gamma^i_{kl})_Q - (\Gamma^i_{kl})_M = \left(\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}\right)_{M'} \Delta x^m. \tag{107.14}$$

Последнее выражение написано на основании теоремы о конечном приращении в применении к функции $\Gamma^i_{kl}(x^1, \ldots, x^m)$; точка M' — промежуточная между начальной точкой M и рассматриваемой точкой Q на кривой (вообще говоря, M' на кривой не лежит). Под Δx^m мы понимаем соответствующие приращения аргументов:

$$\Delta x^m = x^m(s) - x^m_M = \int_0^s \frac{dx^m}{ds}\,ds.$$

Учитывая (107.5), получаем отсюда

$$|\Delta x^m| < s.$$

Далее функции $\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}$ ограничены в рассматриваемой области (107.3):

$$\left|\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}\right| \leqslant C_3,$$

где C_3 — некоторая константа. В результате (107.14) дает

$$|\Delta \Gamma^i_{kl}| \leqslant C_3 s. \tag{107.15}$$

Таким образом, заменяя константами $(\Gamma^i_{kl})_M$ и ξ^i_M первые два множителя в подынтегральном выражении (107.12), мы делаем в них ошибки, допускающие оценки (107.13) и (107.15). Если принять во внимание еще (107.5), то легко получаем, что ошибка во всей подынтегральной функции также допускает по модулю оценку вида $\tilde{C}s$, где константа $\tilde{C}$ от выбора кривой не зависит. После указанной замены формулы (107.12) дают приближенно:

$$\Delta \xi^i \approx -\int_0^s (\Gamma^i_{kl})_M \xi^l_M \frac{dx^k}{ds}\, ds = -(\Gamma^i_{kl})_M \xi^l_M \Delta x^k. \tag{107.16}$$

Ошибка здесь возникает из ошибки в подынтегральной функции, по модулю меньшей $\tilde{C}s$, в результате умножения подынтегральной функции на ds и интегрирования в пределах от 0 до s. Следовательно, в полученном выражении для $\Delta \xi^i$ мы будем иметь ошибку, по модулю меньшую $\frac{1}{2}\tilde{C}s^2$. В связи с этим мы говорим, что формула (107.16) верна с точностью 1-го порядка относительно s.

Мы хотим сделать второй и последний шаг нашей выкладки: подсчитать $\Delta \xi^i$ с точностью 2-го порядка, т. е. так, чтобы ошибка была уже бесконечно малой 3-го порядка при $s \to 0$.

Для этого мы снова вставим под знак интегралов (107.12) приближенные значения множителей Γ^i_{kl}, ξ^i, однако не столь грубые, как ранее, когда мы просто брали их начальные значения; теперь, учитывая, что $\xi^l(s) = \xi^l_M + \Delta \xi^l$, и пользуясь формулой (107.16), мы полагаем:

$$\xi^l(s) \approx \xi^l_M - (\Gamma^l_{mp})_M \xi^p_M \Delta x^m, \tag{107.17}$$

$$\Gamma^i_{kl} \approx (\Gamma^i_{kl})_M + \left(\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}\right)_M \Delta x^m. \tag{107.18}$$

В первом из этих равенств допущена ошибка, меньшая по модулю $\frac{1}{2}\tilde{C}s^2$. Аналогичным образом во втором равенстве откинуты члены ряда Тейлора, начиная со второй степени относительно Δx^i. Учитывая, что $|\Delta x^m| < s$, легко получаем, что отброшенные члены по модулю $\leqslant C_4 s^2$, где константа C_4 с выбором кривой не связана. Очевидно, в подынтегральном выражении мы получим ошибку того же порядка, а именно, не превосходящую по модулю $C_5 s^2$, где C_5 — некоторая константа, не зависящая от выбора кривой.

Кроме того, перемножая (107.17) и (107.18), мы можем откинуть члены 2-й степени относительно Δx^m, так как возникающая при этом ошибка также допускает оценку вида Cs^2 и может быть включена в ранее допущенную ошибку.

Теперь (107.12) принимает вид

$$\Delta\xi^i \approx -\int_0^s \left\{(\Gamma^i_{kl}\xi^l)_M - (\Gamma^i_{kl}\Gamma^l_{mp}\xi^p)_M\,\Delta x^m + \left(\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m}\,\xi^l\right)_M \Delta x^m\right\}\frac{dx^k}{ds}\,ds.$$

В среднем члене фигурной скобки обозначения индексов суммирования p и l переставляем между собой, а интеграл от первого члена вычисляем фактически. Получаем:

$$\Delta\xi^i \approx -(\Gamma^i_{kl}\xi^l)_M\Delta x^k + \left[-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml}\right]_M \xi^l_M \int_0^s \Delta x^m\,\frac{dx^k}{ds}\,ds. \tag{107.19}$$

Так как в подынтегральной функции была допущена ошибка, по модулю меньшая $C_5 s^2$, то после умножения на ds и интегрирования от 0 до s *мы получаем ошибку, по модулю меньшую* $\frac{1}{3}C_5 s^3$. *В связи с этим мы говорим, что формула* (107.19) *верна с точностью* 2-*го порядка относительно* s.

Эта формула представляла собой нашу первую цель. Теперь нужно применить ее к случаю, когда рассматриваемая кривая при некотором значении $s = s_1$ возвращается в точку M и образует *замкнутый контур* (остальная часть этой кривой интересовать нас не будет). Тогда при $s = s_1$ (107.19) принимает вид

$$\Delta\xi^i \approx \left[-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml}\right]_M \xi^l_M \int_0^{s_1} \Delta x^m\,\frac{dx^k}{ds}\,ds, \tag{107.20}$$

так как при возвращении в прежнюю точку M приращение $\Delta x^k = 0$. При этом ошибка по модулю меньше $\frac{1}{3}C_5 s_1^3$. Специализируем несколько наше построение, а именно, предположим, что рассматриваемый контур расположен на двумерной поверхности $\mathfrak{M}_2$

$$x^i = x^i(u^1, u^2), \tag{107.21}$$

произвольным образом проведенной через точку M при обычных наших предположениях; в частности, матрица

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^2} \end{Vmatrix}$$

имеет ранг 2. Будем считать для определенности

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{107.22}$$

Контур предполагаем несамопересекающимся.

В таком случае параметрические уравнения контура на поверхности можно писать в виде

$$u^1 = u^1(s),$$
$$u^2 = u^2(s),$$

так что вдоль контура

$$\frac{dx^k}{ds} = \frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{du^1}{ds} + \frac{\partial x^k}{\partial u^2}\frac{du^2}{ds}. \tag{107.23}$$

Вставляя это выражение под знак интеграла в (107.20) и записывая этот интеграл как криволинейный интеграл по контуру, получим:

$$\Delta\xi^i \approx \left[-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml}\right]_M \xi^l_M \oint \Delta x^m \left(\frac{\partial x^k}{\partial u^1}du^1 + \frac{\partial x^k}{\partial u^2}du^2\right). \tag{107.24}$$

Параметры u^1, u^2 мы занумеруем таким образом, чтобы направление вращения от координатной линии u^1 к координатной линии u^2 (если брать положительные направления на этих линиях) совпадало бы с направлением обхода. Строго говоря, это значит, что нумерация u^1, u^2 выбирается так, чтобы интеграл $\oint u^1 du^2$ при обходе контура в данном направлении имел положительное значение. Этого всегда можно достичь, так как $\oint u^2 du^1 = -\oint u^1\, du^2$. По формуле Грина, которая в этом случае имеет вид:

$$\oint (P_1(u^1,\ u^2)\, du^1 + P_2(u^1,\ u^2)\, du^2) = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P_2}{\partial u^1} - \frac{\partial P_1}{\partial u^2} \right) du^1\, du^2$$

преобразуем в правой части (107.24) интеграл по контуру к двойному интегралу по области D, охваченной этим контуром. При этом подынтегральная функция будет иметь вид

$$\frac{\partial P_2}{\partial u^1} - \frac{\partial P_1}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\Delta x^m \frac{\partial x^k}{\partial u^2}\right) - \frac{\partial}{\partial u^2}\left(\Delta x^m \frac{\partial x^k}{\partial u^1}\right) = \frac{\partial x^m}{\partial u^1}\frac{\partial x^k}{\partial u^2} - \frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^m}{\partial u^2}.$$

Теперь (107.24) принимает вид:

$$\Delta \xi^i \approx \left[-\frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml} \right]_M \xi^l_M \iint\limits_D \left(\frac{\partial x^m}{\partial u^1}\frac{\partial x^k}{\partial u^2} - \frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^m}{\partial u^2} \right) du^1\, du^2. \tag{107.25}$$

Заставим теперь s_1 стремиться к нулю, так что контур стягивается в точку M, скользя по неизменной поверхности $\mathfrak{M}_2$. Выясним, как будет вести себя при этом «площадь»

$$\sigma = \iint\limits_D du^1\, du^2, \tag{107.26}$$

охваченная на поверхности $\mathfrak{M}_2$ стягивающимся контуром. Мы берем слово «площадь» в кавычки, так как введенная этим путем она не имеет инвариантного характера и зависит от выбора параметров u^1, u^2 на поверхности. Почти очевидно, что $\sigma \to 0$ как бесконечно малая второго или высшего порядка относительно s_1. Для интересующихся приводим детальный вывод. В силу (107.22) в некоторой окрестности точки M на поверхности $\mathfrak{M}_2$ можно принять за параметры x^1, x^2 вместо u^1, u^2. Преобразуя двойной интеграл к новым переменным, получаем:

$$\sigma = \iint\limits_D du^1\, du^2 = \iint\limits_D \left| \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(x^1, x^2)} \right| dx^1\, dx^2.$$

Так как непрерывная функция $\left| \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(x^1, x^2)} \right|$ остается ограниченной в некоторой окрестности точки M, т. е. $\leqslant C$, то

$$\sigma \leqslant C \iint\limits_D dx^1\, dx^2. \tag{107.27}$$

Поскольку при обходе всего контура параметр s получает приращение s_1, а $|dx^1| \leqslant ds$, $|dx^2| \leqslant ds$, то x^1 и x^2 в любой точке контура имеют приращения (сравнительно с x^1_M, x^2_M) тоже не превосходящие s_1. Тем самым и внутренность контура в плоскости переменных x^1, x^2 подчинена тем же условиям, т. е. располагается внутри «квадрата»

$$x^1_M - s_1 \leqslant x^1 \leqslant x^1_M + s_1,$$

$$x^2_M - s_1 \leqslant x^2 \leqslant x^2_M + s_1,$$

а так как $\iint dx^1\, dx^2$, распространенный по внутренности этого «квадрата», равен $4s_1^2$, то $\iint\limits_D dx^1\, dx^2 < 4s_1^2$ и (107.27) окончательно перепишется в виде

$$\sigma < 4Cs_1^2.$$

Итак, «площадь» σ области D стремится к нулю вместе с s_1 как бесконечно малая 2-го или высшего порядка относительно s_1. Мы будем предполагать, кроме того, что σ будет бесконечно малой точно 2-го порядка (не выше) относительно s_1. Более детальное исследование показало бы нам, что, как правило, это предположение оправдывается. Исключение представляют лишь искусственные случаи, когда, например, при стягивании контура в точку M он одновременно неограниченно сплющивается, так что размеры области D «в ширину» являются бесконечно малыми *высшего порядка* сравнительно с ее размерами «в длину». Тогда «площадь» σ будет бесконечно малой не 2-го, а более высокого порядка относительно s_1.

Возвращаемся к формуле (107.25). Допущенная в ней ошибка, как мы знаем, по модулю меньше $\frac{1}{3} C_5 s_1^3$ и, следовательно, представляет собой бесконечно малую высшего порядка сравнительно с «площадью» σ (ради этого мы и должны были предположить, что σ точно 2-го порядка малости относительно s_1). В дальнейшем мы так же будем учитывать в (107.25) лишь члены одного порядка малости сравнительно с σ и пренебрегать малыми высшего порядка. В связи с этим мы можем заменить подынтегральную функцию $\frac{\partial x^m}{\partial u^1}\frac{\partial x^k}{\partial u^2} - \frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^m}{\partial u^2}$ ее начальным значением в точке M. Действительно, ввиду непрерывности этой функции ее значения внутри данного контура уклоняются в ту или другую сторону от значения в точке M меньше чем на некоторое положительное число ε, где $\varepsilon \to 0$, когда контур стягивается в точку. Поэтому ошибка в интеграле будет по модулю меньше чем

$$\iint_D \varepsilon\, du^1\, du^2 = \varepsilon\sigma.$$

Эта ошибка будет, таким образом, бесконечно малой высшего порядка сравнительно с σ, и ею мы пренебрегаем.

Итак, заменив подынтегральную функцию ее значением в точке M и вынося эту постоянную за знак интеграла получим:

$$\Delta\xi^i \approx \left(-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml}\right)_M \xi^l_M \left(\frac{\partial x^m}{\partial u^1}\frac{\partial x^k}{\partial u^2} - \frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^m}{\partial u^2}\right)_M \iint_D du^1\, du^2.$$

Все выражения, стоящие за знаком интеграла, вычислены в точке M. В дальнейшем мы будем это подразумевать, не выписывая значки M явно. Итак:

$$\Delta\xi^i \approx \left(-\frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml}\right)\xi^l\, 2x^{mk}\sigma, \tag{107.28}$$

где

$$x^{mk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x^m}{\partial u^1}\frac{\partial x^k}{\partial u^2} - \frac{\partial x^k}{\partial u^1}\frac{\partial x^m}{\partial u^2}\right). \tag{107.29}$$

Простой бивектор x^{mk} представляет собой косое произведение векторов

$$a^i_{(1)} = \frac{\partial x^i}{\partial u^1}, \quad a^i_{(2)} = \frac{\partial x^i}{\partial u^2}.$$

Эти векторы заданы в касательном пространстве A_n в точке M и определяют касательную к $\mathfrak{M}_2$ плоскость A_2 (играя роль векторов (83.11) для поверхности $\mathfrak{M}_2$). Поэтому их косое произведение x^{mk} характеризует двумерное направление касательной плоскости A_2 и, обратно, определяется этим двумерным направлением с точностью до численного множителя (направляющий бивектор двумерной плоскости; § 34). Кроме того, бивектор x^{mk} определяет в плоскости A_2 ориентацию репера, образованного векторами $a^i_{(1)}$, $a^i_{(2)}$. Ориентацию в двумерной плоскости (§ 36) можно наглядно представлять себе как направление вращения по кратчайшему пути от первого ко второму вектору репера в данном случае от $a^i_{(1)}$ к $a^i_{(2)}$. Поскольку векторы $a^i_{(1)}$, $a^i_{(2)}$ направлены по координатным линиям u^1, u^2 в положительных направлениях, то в силу нашего соглашения это будет направление обхода контура.

Таким образом, бивектор x^{mk} характеризует и двумерное направление касательной плоскости A_2 в A_n, и направление обхода контура.

В скобке в (107.28) стоит как бы «кусок тензора кривизны». Однако на самом деле в полученном результате тензор кривизны присутствует полностью, что легко обнаружить, если учесть кососимметрический характер бивектора x^{mk}. А именно, перепишем наше равенство, поменяв между собой обозначения индексов суммирования m и k:

$$\Delta\xi^i \approx \left(-\frac{\partial\Gamma^i_{ml}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{mp}\Gamma^p_{kl}\right)\xi^l 2x^{km}\sigma.$$

Сложим полученные равенства и разделим их почленно на 2. Кроме того, во втором из них заменяем x^{km} на $-x^{mk}$. Мы приходим к следующему результату:

$$\Delta\xi^i \approx \left(\frac{\partial\Gamma^i_{ml}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{ml} - \frac{\partial\Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} - \Gamma^i_{mp}\Gamma^p_{kl}\right)\xi^l x^{mk}\sigma.$$

Сравнивая с (105.8), мы замечаем, что в скобке стоит тензор кривизны $R_{mk,\,l\cdot}^{\cdot\cdot\,\cdot i}$. Окончательно получаем:

$$\Delta\xi^i \approx R_{mk,\,l\cdot}^{\cdot\cdot\,\cdot i}\xi^l x^{mk}\sigma. \tag{107.30}$$

Итак, вектор ξ^i, параллельно обнесенный по бесконечно малому контуру, лежащему на какой-либо двумерной поверхности и стягивающемуся в точку M, уклоняется от своего первоначального значения ξ^i на вектор $\Delta\xi^i$. Этот вектор в своей главной части билинейно зависит от первоначального вектора ξ^i и от простого бивектора x^{mk}, характеризующего двумерное направление поверхности в точке M, а также направление обхода контура и убывает пропорционально «площади» σ, охваченной контуром на поверхности. Коэффициентами этой билинейной зависимости (от ξ^l и x^{mk}) служат координаты тензора кривизны в точке M. Главная часть вектора $\Delta\xi^i$ берется в том смысле, что мы пренебрегаем слагаемыми, бесконечно малыми высшего порядка сравнительно с σ, и сохраняем лишь члены, пропорциональные σ. В связи с этим приближенное равенство (107.30) всегда можно записать и в форме точного равенства

$$\Delta\xi^i = R_{mk,\,l\cdot}^{\cdot\cdot\,\cdot i}\, x^{mk}\xi^l\sigma + \varepsilon^i\sigma, \tag{107.31}$$

где ε^i стремится к нулю вместе с σ.

В случае пространства L_n с абсолютным параллелизмом параллельно обнесенный вектор не испытывает отклонения, и $\Delta\xi^i = 0$. Это соответствует обращению в нуль тензора кривизны в правой части равенства. Чем больше отличаются координаты тензора кривизны от нулевых значений, тем резче отклоняется параллельно обнесенный вектор $\xi^i + \Delta\xi^i$ от первоначального вектора ξ^i при прочих равных условиях. В этом смысле тензор кривизны характеризует в геометрии данного L_n степень нарушения абсолютного параллелизма.

Необходимо заметить еще, что разделение множителей x^{mk} и σ в полученной формуле является условным и зависит от выбора координат u^1, u^2 на поверхности. При переходе к другим координатам $u^{1'}$, $u^{2'}$ на той же поверхности бивектор приобретает некоторый численный множитель, причем «площадь» на этот множитель делится (если пренебречь изменениями, бесконечно малыми высшего порядка относительно σ). Инвариантным образованием является по существу лишь бесконечно малый простой бивектор σx^{mk}. Впоследствии в случае риманова пространства V_n мы сможем употребить в качестве множителя σ настоящую *площадь*, охватываемую контуром, а в качестве x^{mk} *единичный* простой бивектор. Тогда разделение множителей x^{mk} и σ приобретает инвариантный смысл.

§ 108. Тензор кривизны в L_n^0

В этом параграфе и далее до конца книги мы будем рассматривать исключительно пространства аффинной связности без кручения L_n^0, т. е. будем считать

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \tag{108.1}$$

Разумеется, все сделанное выше в пространстве L_n остается верным, в частности, и в L^0_n. Но тензор кривизны приобретает в этом случае и новые свойства, которыми мы и займемся. Напомним прежде всего результат, полученный в конце § 106, который можно формулировать так:

Для того чтобы пространство L^0_n *было (локально) аффинным, необходимо и достаточно тождественное обращение в нуль его тензора кривизны,*

$$R_{kl,\ \cdot p\cdot}^{\cdot\cdot\ \ \ \ i} = 0.$$

Действительно, в L_n^0 тензор кручения S_{ij}^k равен нулю, и если, кроме того, $R_{kl,\ \cdot p\cdot}^{\cdot\cdot\ \ \ \ i} = 0$, то согласно § 106 мы имеем (локально) аффинное пространство. Обратно, аффинное (или хотя бы локально аффинное) пространство представляет собой частный случай L_n^0, причем его тензор кривизны тождественно равен нулю.