§ 132. Вращение планетных орбит

Мы знаем, что $B \leqslant 0$. Рассмотрим особо случай, когда $B < 0$, т. е. когда в центрально симметрическом поле тяготения движется частица, обладающая ненулевой массой покоя. Сюда относится, например, движение планет в поле тяготения Солнца. Обозначая

$$-\frac{c^2}{kmB} = p > 0, \quad \alpha = \frac{3km}{c^2}, \tag{132.1}$$

перепишем (131.13) в виде

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \sigma + \alpha\sigma^2. \tag{132.2}$$

Член $\alpha\sigma^2$ весьма мал вследствие малости коэффициента α. Если его откинуть, то мы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = \frac{1}{p} - \sigma, \tag{132.3}$$

вытекающее из ньютоновой теории тяготения. Таким образом, уточнение, вносимое здесь теорией относительности, заключается в появлении дополнительного члена $\alpha\sigma^2$.

Мы будем интегрировать уравнение (132.2) приближенно. В качестве первого приближения мы берем решение уравнения (132.3), которое обозначаем $\sigma_0(\varphi)$. Очевидно,

$$\sigma_0(\varphi) = \frac{1}{p} + L\cos\varphi + M\sin\varphi,$$

где L и M — произвольные постоянные. Поворотом полярной оси всегда можно добиться, чтобы $M = 0$, $L > 0$, и тогда, обозначая Lp через e, получаем:

$$\sigma_0(\varphi) = \frac{1}{p}(1 + e\cos\varphi). \tag{132.4}$$

Так как $\sigma = \frac{1}{r}$, то полярное уравнение траектории будет:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}, \tag{132.5}$$

т. е. мы имеем коническое сечение с фокусом в начале, эксцентриситетом e и параметром p.

Переходя ко второму приближению, ищем решение уравнения (132.2) в виде

$$\sigma(\varphi) = \sigma_0(\varphi) + \sigma_1(\varphi).$$

При этом добавку $\sigma_1(\varphi)$ в решении, возникающую за счет малой добавки $\alpha\sigma^2$ в уравнении, считаем весьма малой сравнительно с $\sigma_0(\varphi)$. Вставляя $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ в (132.2) и учитывая, что σ_0

удовлетворяет уравнению (132.3), получаем:

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} = -\sigma_1 + \alpha\,(\sigma_0 + \sigma_1)^2.$$

Пренебрегая внутри круглой скобки σ_1 сравнительно с σ_0, мы приближенно ищем σ_1 из уравнения

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} = -\sigma_1 + \alpha\sigma_0^2,$$

которое перепишем в развернутом виде:

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\varphi^2} + \sigma_1 = \frac{\alpha}{p^2}\,(1 + 2e\cos\varphi + e^2\cos^2\varphi) = \\ = \frac{\alpha}{p^2}\left(1 + \frac{e^2}{2} + 2e\cos\varphi + \frac{e^2}{2}\cos 2\varphi\right). \qquad (132.6)$$

Предположим, что из скобки выкинут член $2e\cos\varphi$. В таком случае, как следует из элементарных выкладок, решение σ_1 будет периодическим (с периодом 2π), так что уточненная орбита планеты остается замкнутой (мы предполагаем, что $e < 1$, так что орбита, рассматриваемая в первом приближении (132.5), представляет собой эллипс). Что же касается члена $\frac{2\alpha e}{p^2}\cos\varphi$ в правой части (132.6), то ему отвечает непериодическое частное решение

$$\sigma_1(\varphi) = \frac{\alpha e}{p^2}\,\varphi\sin\varphi. \qquad (132.7)$$

Мы будем учитывать только эту добавку к первому приближению $\sigma = \sigma_0(\varphi)$, так как только она нарушает замкнутый характер орбиты, что выражается, как можно считать, в медленном вращении орбиты в ее плоскости. В самом деле, уточненная орбита согласно сказанному имеет вид

$$\sigma = \sigma_0(\varphi) + \sigma_1(\varphi) = \frac{1}{p}\,(1 + e\cos\varphi) + \frac{\alpha e}{p^2}\,\varphi\sin\varphi = \\ = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\left(\cos\varphi + \frac{\alpha}{p}\,\varphi\sin\varphi\right) \approx \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\left(1 - \frac{\alpha}{p}\right)\varphi.$$

Мы произвели замену по приближенной формуле $\cos\varphi - \Delta\varphi\,\sin\varphi \approx \approx \cos(\varphi + \Delta\varphi)$, считая $\Delta\varphi = -\frac{\alpha}{p}\,\varphi$ весьма малой величиной. Мы видим, что теперь прежнее значение σ будет повторяться не при полном обороте полярного радиуса, т. е. не при увеличении φ на 2π, а при повороте на немного больший угол, именно на угол

$$\frac{2\pi}{1 - \frac{\alpha}{p}} \approx 2\pi + \frac{2\pi\alpha}{p}.$$

Это можно понимать в том смысле, что за время обхода планетой своей орбиты сама орбита успевает повернуться в том же направлении на угол

$$\varepsilon = \frac{2\pi\alpha}{p}. \tag{132.8}$$

Этот угол (весьма малый для планет солнечной системы) составляет наиболее заметную величину для Меркурия; его значение, предсказываемое теорией относительности, хорошо согласуется с опытом. Заметим еще, что, прибавляя $\sigma_1(\varphi)$ к $\sigma_0(\varphi)$, мы откинули периодическую часть $\sigma_1(\varphi)$, но ввиду малости $\sigma_1(\varphi)$ сравнительно с $\sigma_0(\varphi)$ это дает при подсчете угла ε весьма малую относительную ошибку, которой мы пренебрегаем.

§ 133. Искривление световых лучей в поле тяготения

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение (131.13) в случае $B=0$, когда оно определяет, как мы знаем, траектории световых лучей:

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\sigma + \alpha\sigma^2, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{3km}{c^2}. \tag{133.1}$$

В порядке первого приближения мы отбрасываем член $\alpha\sigma^2$ и интегрируем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} = -\sigma.$$

Получаем:

$$\sigma_0(\varphi) = L\cos\varphi + M\sin\varphi, \tag{133.2}$$

где L и M — произвольные постоянные. За счет поворота полярной оси нетрудно добиться, чтобы решение имело вид $\sigma_0(\varphi) = L\cos\varphi$, $L > 0$, или, полагая $R = \frac{1}{L}$,

$$\sigma_0(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{R}. \tag{133.3}$$

Так как $\sigma = \frac{1}{r}$, то соответствующее полярное уравнение траектории будет:

$$r = \frac{1}{\sigma_0(\varphi)} = \frac{R}{\cos\varphi}.$$

Мы получаем «прямую», проходящую на расстоянии R от начала координат. Точнее, полученная траектория была бы прямой, если бы r, φ были полярными координатами на обычной евклидовой плоскости.