Лекция 4

4.1. Связь между рангом тензора и знаком поля

Мы хотели бы вывести некоторые полезные общие свойства полей, используя свойства лагранжевой плотности. Для гравитационного поля мы определим в данном месте константу взаимодействия и нормализацию плоских волн, которые мы будем отныне использовать. Мы положим

$$\lambda = \sqrt{8\pi G}. \tag{4.1.1}$$

Здесь, G – обычная гравитационная постоянная в естественных единицах ($\hbar = c = 1$); квадратный корень включается в определение с тем, чтобы константа λ стала аналогична заряду электрона e в электродинамике, что предпочтительнее того, чтобы подобная величина была пропорциональна квадрату заряда. Множитель $\sqrt{8\pi}$ служит для того, чтобы исключить не относящиеся к делу множители из большей части полезных соотношений. Для того, чтобы представить плоско-волновые гравитоны, мы будем использовать поля

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp{(ik \cdot x)}, \tag{4.1.2}$$

с вектором поляризации $e_{\mu\nu}$, нормализованным таким образом, что

$$e_{\mu\nu}\overline{e}^{\mu\nu} = 1. \tag{4.1.3}$$

Действие, которое описывает общую энергию полей гравитации, вещество и взаимодействие между веществом и гравитонами, имеет следующий вид

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}\int dV \left(h^{\mu\nu,\lambda}\overline{h}_{\mu\nu,\lambda} - 2\overline{h}^{\mu\lambda}{}_{,\lambda}\overline{h}_{\mu\nu}{}^{,\nu} \right) \quad &(\text{поля}) \\ + \int dV (h_{\mu\nu}T_{\mu\nu}) \quad &(\text{член взаимодействия}) \\ + S_M \quad &(\text{материя}). \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Мы можем вывести из лагранжианов полей некоторые важные свойства, например, мы можем понять, почему гравитация притягивает как частицы, так и античастицы, в то время как в электричестве одинаковые заряды отталкиваются, а противоположные притягиваются. Может быть показано, что это свойство связано со знаком лагранжиана, так что если мы изменим знак лагранжиана $S \longrightarrow -S$, сила

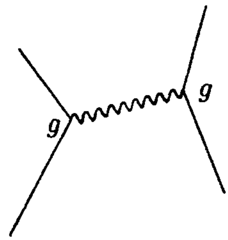

Рис. 4.1.

меняет знак. Знак констант взаимодействия λ или e, или g не дает отличий в теории, так как он появляется в квадрате в любой диаграмме, которая представляет поправку к энергии; всегда вовлечены две вершины. Мы можем поменять знак энергии, соответствующей диаграмме такой, как изображенной на рис. 4.1, только, если мы можем ввести множитель i в каждой вершине, например, если мы должны использовать поля $i\phi$ вместо ϕ.

Тем не менее, поля ϕ должны представлять соответствующие плоские волны, которые согласовано определены так, что установившиеся волны в большой коробке имеют положительные значения энергии и квантово-механические осцилляторы, которые представляют эти установившиеся волны, ведут себя правильно. Скалярные поля имеют плоские волны

$$\phi = a \exp{(ik \cdot x)}. \tag{4.1.5}$$

Амплитуда a для квантового поля появляется как координата квантово-механического осциллятора. Если значения кинетической энергии таких осцилляторов, которые пропорциональна $\dot{a}^2$, должны представлять положительные значения энергии, мы обязаны записать нашу теорию последовательным образом, и замена $\phi \longrightarrow i\phi$ была бы ошибкой.

Для электромагнитных волн именно компоненты в трансверсальном направлении, перпендикулярном направлению распространения, ограничиваются при подобном рассмотрении. Отрицательный знак появляется в связанной энергии потому, что энергия включает в себя пространственные индексы в скалярное произведение двух векторов, которое мы определили как

$$A_\mu B^\mu = A_4 B_4 - (A_3 B_3 + A_2 B_2 + A_1 B_1). \tag{4.1.6}$$

Знак кулоновских сил связан со знаком временных компонент в лагранжиане. Для гравитационных волн также имеются трансверсальные компоненты, которые заключены в определенные пределы, а при свертке по двум индексам (или даже по четному числу индексов) знаки сокращаются, знак временных компонентов h_{44} противоположен случаю, рассматриваемому в случае электричества, и мы имеем притяжение.

4.2. Тензор энергии-импульса для скалярной материи

Прежде, чем мы сможем вычислять наблюдаемые эффекты и делать предсказания другие, чем закон "обратных квадратов", и то, что "одинаковые тела" притягиваются с силой, пропорциональной его энергии, мы должны определить, как материя определяет тензор давления $T_{\mu\nu}$. Сначала мы проведем в некоторых деталях вычисления, основанные на простейшем предположении, что материя может быть представлена скалярной функцией ϕ. Позднее нам понадобится рассматривать функции более высокого ранга; возможно в конце курса мы рассмотрим вещество со спином 1/2, поскольку такое вещество имеет свойства, существенно отличающиеся от вещества, характеризующегося целым спином. Для исследования свойств материи с целыми значениями спина 1 и 2 требуются более сложные алгебраические преобразования, однако никаких принципиальных нововведений привлекать не требуется.

Как сделать обобщение плотности энергии-импульса для скалярного поля ϕ. Если заглянуть в книгу Вентцеля [Went 49] по теории поля, мы обнаружим, что предлагается следующая процедура. Предположим, что лагранжиан зависит от полей и их производных

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi^i, \psi^i_{,\nu}). \tag{4.2.1}$$

Компонент с индексами $\{44\}$ тензора энергии-импульса должен представлять плотность энергии, которая есть гамильтониан. Поэтому используя обычное классическое описание для выражения гамильтониана из лагранжиана

$$H = \dot{q}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - L, \tag{4.2.2}$$

получаем следующее соотношение

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \psi^i{}_{,\nu}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi^i{}_{,\mu}} - \delta^{\mu}{}_{\nu}\,\mathcal{L}. \tag{4.2.3}$$

Это правило не является корректным в общем случае. Во-первых, оно не обязательно приводит к выражению, симметричному по индексам μ и ν. Если тензор $T_{\mu\nu}$ – несимметричен, то результирующая

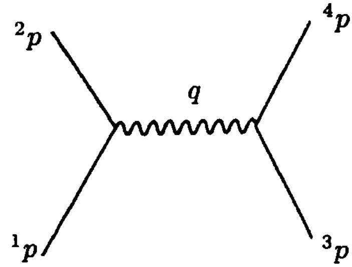

Рис. 4.2.

теория – патологическая (например, нет способа определить угловой момент в таком поле). Закон сохранения энергии в общем случае не выполняется, поскольку в дивергенцию включены члены, которые не являются больше равными

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} \neq T^{\nu\mu}{}_{,\nu}. \tag{4.2.4}$$

В нашем частном скалярном случае правило (4.2.3) действительно приводит к тому, чтобы получить удовлетворительную симметричную форму. Мы получаем лагранжиан и действие

$$S(\text{Скалярная материя}) = \frac{1}{2}\int dV(\phi^{,\sigma}\phi_{,\sigma} - m^2\phi^2), \tag{4.2.5}$$

который дает следующее выражение для тензора давления

$$T_{\mu\nu} = \phi_{,\nu}\phi_{,\mu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\,\phi^{,\sigma}\phi_{,\sigma} + \frac{1}{2}m^2\phi^2\eta_{\mu\nu}. \tag{4.2.6}$$

С учетом тензора давления для скалярной материи (4.2.6) член, описывающий взаимодействие в лагранжиане, имеет следующий вид:

$$-\lambda h^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -\lambda\left[h^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}h^{\mu\nu}\eta_{\mu\nu}(\phi^{,\sigma}\phi_{,\sigma} - m^2\phi^2)\right]. \tag{4.2.7}$$

В наших компактных обозначениях, использующих оператор "черта", последнее соотношение может быть переписано следующим образом:

$$-\lambda\left[\overline{h}^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \frac{1}{2}h\,m^2\phi^2\right]. \tag{4.2.8}$$

Теперь мы можем использовать член, описывающий взаимодействие, для того, чтобы получить амплитуды для рассеяния при обмене гравитоном.

4.3. Амплитуды для рассеяния (скалярная теория)

Амплитуда рассеяния, соответствующая обмену одним гравитоном, представлена на диаграмме, изображенной на рисунке 4.2, и может быть записана из исследования диаграммы, так как мы знаем форму пропагатора и для каждой вершины у нас есть член, описывающий взаимодействие, задаваемое лагранжианом (4.2.7). Заменим градиенты компонентами 4-импульса в импульсном представлении

$$i\phi_{,\nu} = p_\nu, \tag{4.3.1}$$

так что член, описывающий взаимодействие, становится следующим для одной из вершин

$$2\lambda\left[\underline{{}^1p_\mu\,{}^2p_\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}({}^1p^\sigma\,{}^2p_\sigma - m^2)\right]. \tag{4.3.2}$$

Мы пишем подчеркивание под произведением $p_\mu p_\nu$ для того, чтобы напомнить, что мы должны использовать соответствующим образом симметризованную версию, так как $h_{\mu\nu}$ – симметричен. Более точно,

$$\underline{A_\mu B_\nu} \equiv \frac{1}{2}\,[A_\mu B_\nu + A_\nu B_\mu]. \tag{4.3.3}$$

Для второй вершины нам также необходима "черта" для выражения, которое имеет следующий вид

$$2\lambda\left[\underline{{}^3p_\mu\,{}^4p_\nu} - \frac{1}{2}\,m^2\,\eta_{\mu\nu}\right]. \tag{4.3.4}$$

Тогда полное выражение для амплитуды есть следующее

$$4\lambda^2\left[\underline{{}^3p_\mu\,{}^4p_\nu} - \frac{1}{2}\,m^2\eta_{\mu\nu}\right]\frac{1}{q^2}\left[\underline{{}^1p_\mu\,{}^2p_\nu} - \frac{1}{2}\,\eta_{\mu\nu}({}^1p^\sigma\,{}^2p_\sigma - m^2)\right] \tag{4.3.5}$$

Выбранные обозначения ("черты", "подчеркивания" и т.п.) приведут к упрощениям в алгебраических манипуляциях в более сложных вычислениях, которые необходимо будет выполнять, так что стоит ими воспользоваться.

Наша теория дала нам выражение для амплитуды гравитационного рассеяния одной частицы другой. Для того, чтобы вычислить что-нибудь, что имеет измеримую величину, мы должны придти к очень большим значениям массы, и для того, чтобы наблюдать эффект, который не определяется ньютоновским законом, нам необходимо использовать движения со скоростями, близкими к скорости света. Мы можем, например, вычислить угол отклонения тела малой массы, движущегося с очень большой скоростью ($v \approx c$), которое отклоняется звездой, такой как Солнце. Здесь нам необходимо обосновать замену суммы амплитуд от всех частиц в звезде одной амплитудой, соответствующей массе M; подобная замена является аппроксимацией, но она дает правильный ответ в первом порядке некоторого типа. Такой угол больше, чем его величина в рамках ньютоновской теории, и отличается на множитель $(1 + v^2/c^2)$.

Нельзя говорить о том, что этот результат соответствует отклонению света Солнца, потому что фотон не является скалярной частицей, отсюда следует, что он не может представляться скалярным массовым полем ϕ. Для рассеяния двух идентичных частиц такая амплитуда должна содержать обменный член, но для случая звезды – частицы, очевидно, не идентичны.

В нашей теории до сих пор не рассматривалась возможность того, что мы могли бы добавить член с нулевой дивергенцией к нашему тензору давления $T_{\mu\nu}$; это соответствовало бы другому распределению в пространстве масс и давлений. Этот и связанные с ним вопросы в дальнейшем будут подробно обсуждаться. Даже для скалярной материи, как мы увидим, у нас есть действительная двусмысленность при определении тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$. Эта трудность также возникает в электродинамике, когда мы пытаемся записать взаимодействие фотонов с заряженными векторными мезонами.

4.4. Подробные свойства плоских волн. Эффект Комптона

Мы можем изучить свойства гравитационных волн в отсутствии материи; варьируя лагранжиан, получим уравнение

$$h_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda} - 2\overline{h}_{\mu\sigma,\nu}{}^{,\sigma} = 0, \tag{4.4.1}$$

которое аналогично уравнению Максвелла в пустом пространстве. Если мы используем решения типа плоских волн

$$h_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} \exp{(iq \cdot x)}, \tag{4.4.2}$$

то уравнение принимает следующий вид

$$q^2 e_{\mu\nu} - q_\nu q^\sigma \overline{e}_{\sigma\mu} - q_\mu q^\sigma \overline{e}_{\sigma\nu} = 0. \tag{4.4.3}$$

Мы интересуемся случаями, когда $q^2 \neq 0$ и $q^2 = 0$. Если $q^2 \neq 0$, мы можем разделить на q^2 и переставить члены уравнения так, что

$$e_{\mu\nu} = q_\nu \left(\frac{1}{q^2} q^\sigma \overline{e}_{\sigma\mu}\right) + q_\mu \left(\frac{1}{q^2} q^\sigma \overline{e}_{\sigma\nu}\right). \tag{4.4.4}$$

Такое разделение вектора на два слагаемых в точности выражает вектор $e_{\mu\nu}$ как симметризованный градиент

$$e_{\mu\nu} = \chi_{\mu,\nu} + \chi_{\nu,\mu}. \tag{4.4.5}$$

Ранее мы обсудили, как калибровочная инвариантность гравитационного поля означает, что добавление члена такого вида не приводит к отличиям в физике явления. Отсюда следует, что всегда можно добавить некоторый член к $e_{\mu\nu}$ так, что $e_{\mu\nu} = 0$. Мы будем называть такие волны с $q^2 \neq 0$ "калибровочными волнами"; эти волны не связаны ни с какими физическими эффектами и могут быть всегда устранены калибровочным преобразованием.

Если $q^2 = 0$, то из уравнения (4.3.3) следует, что

$$q^\sigma \overline{e}_{\mu\nu} = 0. \tag{4.4.6}$$

Это так называемые свободные волны *должны* удовлетворять лоренцеву калибровочному условию. Дело не только в выборе

$$\overline{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0 \tag{4.4.7}$$

для удобства в случаях, в которых волна не свободна. Этот факт имеет свой электромагнитный аналог, для фотонов величина $q^\mu e_\mu$ должна быть равна нулю.

Мы можем вывести действительный вид тензора поляризации $e_{\mu\nu}$ в системе координат такой, что 4-вектор импульса равен

$$q^\mu = (\omega, \omega, 0, 0). \tag{4.4.8}$$

Если мы выбираем

$$e'_{\mu\nu} = e_{\mu\nu} + q_\mu \chi_\nu + q_\nu \chi_\mu \tag{4.4.9}$$

и требуем, что $e'_{\mu\nu}$ должна иметь компоненты только в трансверсальном направлении, мы получаем систему уравнений, которая может быть разрешена и получен ответ

$$e'_{11} = -e'_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e'_{12} = e'_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{4.4.10}$$

Для того, чтобы получить соотношения (4.4.10), заметим, что из уравнения (4.4.6) следует, что $\overline{e}_{\mu 4} = -\overline{e}_{\mu 3}$, так что только компоненты с индексами 4, 1 и 2 являются независимыми. Компоненты с индексом 4 могут быть удалены, если требуется, с помощью

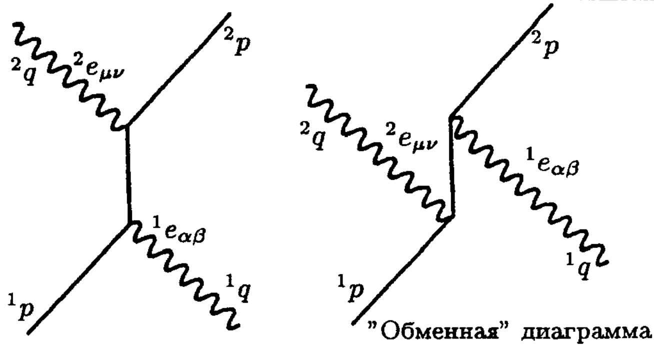

Рис. 4.3.

преобразования (4.4.9). Например, $e'_{14} = e_{14} + \omega\chi_1$, тогда выберем $\chi_1 = -e_{14}/\omega$, $\chi_2 = e_{24}/\omega$. Тогда $e'_{43} = e_{43} + \omega\chi_4 - \omega\chi_3$, выберем $\chi_3 - \chi_4 = -e_{34}/\omega$, тогда $e'_{43} = \bar{e}'_{43} = \bar{e}'_{44} = \bar{e}'_{33} = 0$. Выбирая $\chi_4 = -e_{44}/2\omega$, сделаем следующую величину равной нулю $e'_{44} = e_{44} + 2\omega\chi_4 = 0$. Тогда, так как величина $\bar{e}'_{44}$ также равна нулю, то след $e'^{\sigma}{}_{\sigma}$ равен нулю, следовательно, равны нулю также и e'_{33} и $e'_{11} + e'_{22}$. Поэтому остались ненулевыми среди величин $e'_{\mu\nu}$ только компоненты с индексами $\mu, \nu = 1$ или 2 и для них $e'_{11} = -e'_{22}$. Имеется только две линейно независимые нормализованные комбинации (4.4.10).

Амплитуда для комптоновского рассеяния гравитона частицей массы m соответствует диаграммам, изображенным на рис. 4.3. Поляризации гравитона представляются тензором $e_{\mu\nu}$; для скалярной массы компоненты импульса в каждой вершине – ${}^1p_\mu$, $({}^1p_\nu + {}^1q_\nu) = ({}^2p_\nu + {}^2q_\nu)$ и ${}^2p_\mu$. На языке этих величин мы имеем для первой диаграммы

$$4\lambda^2\, {}^2\bar{e}^{\mu\nu}\left[{}^2p_\mu({}^2p_\nu + {}^2q_\nu) - \frac{1}{2}\, m^2\,\eta_{\mu\nu}\right]\frac{1}{({}^1p + {}^1q)^2 - m^2}$$
$$\times\, {}^1\bar{e}^{\alpha\beta}\left[{}^1p_\alpha({}^2p_\beta + {}^2q_\beta) - \frac{1}{2}\, m^2\,\eta_{\alpha\beta}\right]. \qquad (4.4.11)$$

Пропагатор написан таким образом, что подходит для скалярной частицы. Некоторые ограничения в этой формуле следуют из ограничения для плоских волн $q^2 = 0$ и $q^\nu \bar{e}_{\nu\mu} = 0$.

4.5. Нелинейные диаграммы для гравитонов

Из калибровочной инвариантности мы ожидаем, что замена ${}^1e_{\mu\nu}$ на ${}^1e_{\mu\nu} + {}^1q_\mu a_\nu + {}^1q_\nu a_\mu$ не должна бы влиять на комптоновскую амплитуду. Однако прямая подстановка показывает, что это утверждение не является верным. Что же ошибочно в наших рассуждениях?

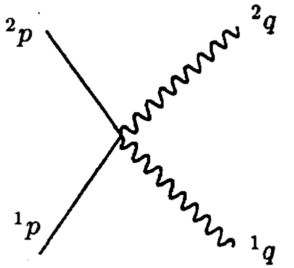

Рис. 4.4.

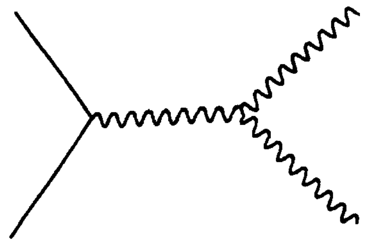

Рис. 4.5.

При комптоновском рассеянии фотонов электронами имеется третья диаграмма, изображенная на рис. 4.4, которая неаналогична ни одной из диаграмм, изображенных на рис. 4.3. Эта диаграмма соответствует квадратичному взаимодействию в A^2, которое появляется в лагранжиане для того, чтобы сделать теорию калибровочно инвариантной. По аналогии с ситуацией в электродинамике мы могли бы полагать, что при рассмотрении только пары диаграмм, изображенных на рис. 4.3, мы делали приближение к правильному описанию путем линеаризации. Существование амплитуды с квадратичным взаимодействием, соответствующим диаграмме, изображенной на рис. 4.3, может быть выведено в электродинамике требованием того, чтобы калибровочная подстановка

$$e'_1 = e_1 + qa \tag{4.5.1}$$

не должна была бы приводить к изменению в амплитуде в заданном порядке. Такая процедура состоит просто в приравнивании членов одного и того же порядка амплитуд, полученных из e_1 и e'_1, с коэффициентами перед каждым членом, которые должны быть определены. Может быть возможно вывести форму квадратичного члена гравитона аналогичным способом, но это пока еще не было сделано, поскольку самовзаимодействие гравитона делает анализ довольно сложным во втором порядке, и мы получим правильные выражения, используя другой подход.

Может быть интересным попытаться вывести эти члены, применяя прямой подход, так что сделаем несколько замечаний об этом.

Если мы рассматриваем добавление к комптоновскому рассеянию не только амплитуд, таких, какие представлены на рис. 4.4, но также амплитуд, соответствующих диаграмме, изображенной на рис. 4.5, у нас вероятно не будет условий для того, чтобы определить все неизвестные параметры более полной теории. Если мы рассмотрим взамен нашей задачи комптоновское рассеяние виртуального гравитона, мы можем увеличить число регулируемых величин, и может быть

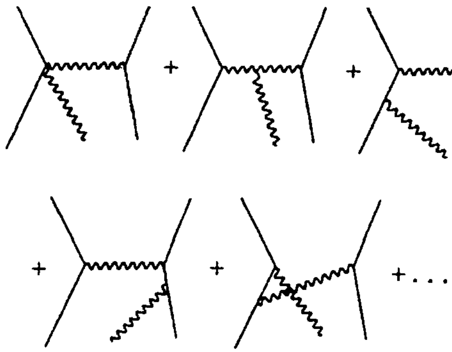

Рис. 4.6.

возможно вновь получить правильную теорию. Включенные в анализ диаграммы могут быть типа изображенных на рис. 4.6, и мы могли бы попытаться сделать сумму калибровочно инвариантной. На самом деле, мы будем решать эти проблемы другим способом, тем не менее, такой подход может быть полезным для того, чтобы изучить детали нашей полевой теории, подходя к решению различными путями.

4.6. Классические уравнения движения гравитирующей частицы

Для того, чтобы вычислить некоторые классические эффекты в нашей теории, например, орбиты планет, движущихся вокруг звезды, нам необходимо свести нашу квантовую теорию к ее классической форме. Это возможно сделать, выписывая классическую теорию, как результат вариационного принципа на интеграле по траекториям, который заключает в себя действия или временной интеграл от лагранжиана. Движение, описываемое частицей, задается минимумом интеграла по траекториям, например, для свободной частицы это минимум интеграла

$$-\int \sqrt{(ds)^2} = -\int \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = -\int \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx_\mu}{d\alpha}}\, d\alpha. \qquad (4.6.1)$$

Что-то должно быть добавлено к интегральному выражению для того, чтобы представить гравитационные эффекты. Имеется более, чем один вариационный принцип, который может дать классическую теорию, так что мы будем использовать вариационный принцип, который дает более удобные интегралы по траекториям (фактически, принцип, приводящий к уравнению Клейна – Гордона методом интегрирования по траекториям в квантовой механике). Для заряженных частиц мы можем получить уравнения движения, варьируя интеграл

$$-\frac{m}{2}\int d\alpha \left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx_\mu}{d\alpha}\right) - e\int d\alpha\, A_\mu(x)\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right). \tag{4.6.2}$$

После того, как мы проделаем некоторые преобразования, приходим к следующему соотношению

$$m\,\frac{d^2x_\mu}{d\alpha^2} = eF_{\mu\nu}\left(\frac{dx^\nu}{d\alpha}\right), \tag{4.6.3}$$

где $F_{\mu\nu}$ есть ротор от вектора A_μ. Из этого уравнения, умножая на $dx_\mu/d\alpha$, так как тензор $F_{\mu\nu}$ – антисимметричен, мы находим, что

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx_\mu}{d\alpha}\right)$$

обращается в нуль, или

$$\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx_\mu}{d\alpha} = \left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2$$

есть константа, так что величина α пропорциональна собственному времени (и мы можем взять ее равным собственному времени, если m_0 есть масса покоя частицы). Далее мы должны включить наш тензор $T_{\mu\nu}$ в подынтегральное выражение соответствующим образом для того, чтобы получить правильные гравитационные уравнения. В электродинамике вектор, связанный с полем, есть просто производная смещения по отношению к 4-скаляру, т.е. скорость $(dx^\mu/d\alpha)$. Мы предполагаем, что тензор $T_{\mu\nu}$ есть не что иное, как тензор, порожденный двумя такими скоростями, и подбираем мультипликативную константу так, что компонента с индексами 44 правильно описывает плотность энергии. Мы полагаем

$$T^{\mu\nu} = m_0\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx^\nu}{d\alpha}\right), \tag{4.6.4}$$

где $\alpha = s =$ "собственное время". Компонент с индексами 44 есть на самом деле плотность энергии; он имеет множитель $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ для того, чтобы учесть увеличение энергии со скоростью, и другой множитель для того, чтобы учесть одновременное сокращение объема из-за лоренцева сжатия.

Следовательно, интеграл от лагранжиана или действие, которое должно быть проварьировано, имеет следующий вид:

$$m_0\left[-\frac{1}{2}\int d\alpha\,\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx_\mu}{d\alpha}\right) - \lambda\int d\alpha\, h_{\mu\nu}(x)\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right)\left(\frac{dx^\mu}{d\alpha}\right)\right]. \tag{4.6.5}$$

Введем новый тензор для того, чтобы записать действие в более компактном виде

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + 2\lambda h_{\mu\nu}(x), \tag{4.6.6}$$

так что действие может быть записано в виде

$$m_0 \left[-\frac{1}{2} \int d\alpha \; g_{\mu\nu}(x) x'^{\mu} x'^{\nu} \right]. \tag{4.6.7}$$

Начиная с последнего соотношения и ниже, обозначаем производную по отношению к параметру α знаком "штрих". Поскольку мы варьируем функционал (действие) по отношению к координатам траектории, мы получаем два равных члена от каждого из множителей x'^{μ}, x'^{ν} и один от тензора $g_{\mu\nu}$; уравнение движения имеет вид

$$-\frac{d}{d\alpha}\left(g_{\sigma\nu} x'^{\nu}\right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} x'^{\mu} x'\nu = 0. \tag{4.6.8}$$

Существуют другие способы записи уравнений, которые могут быть иногда полезны. Сначала мы перегруппируем члены, в которых имеются две скорости, с одной стороны равенства

$$g_{\sigma\nu} x''^{\nu} = \left[\frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^{\mu}} \right] x'^{\mu} x'^{\nu}. \tag{4.6.9}$$

Теперь мы расщепляем второй член на две равные части и переобозначаем индексы суммирования $\mu \leftrightarrow \nu$ в одной части для того, чтобы получить комбинацию, которая задается специальным символом, поскольку он часто повторяется

$$[\mu\nu, \sigma] = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right]. \tag{4.6.10}$$

Уравнение движения, выраженное через такую скобку (называемую ковариантными коэффициентами связности), становится довольно простым

$$g_{\sigma\nu} x''^{\nu} = -[\mu\nu, \sigma] x'^{\mu} x'^{\nu}. \tag{4.6.11}$$

Имеется одно следствие этого уравнения, которое немедленно получается дифференцированием по параметру α произведения $g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu}$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu}) = 2 g_{\mu\nu}\, x'^{\mu} x''^{\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}}\, x'^{\mu} x'^{\nu} x'^{\sigma}. \tag{4.6.12}$$

Если мы перепишем произведение $g_{\mu\nu}x''^{\nu}$ в первом члене в правой части его выражением (4.6.9) и переобозначим индексы суммирования, мы находим, что производная тождественно равна нулю. Таким образом, произведение $g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu}$ есть скалярная константа. Если мы определим новый параметр s следующим соотношением

$$g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu} = \left(\frac{ds}{d\alpha}\right)^2,$$

то s – аналог собственного времени для задач гравитации. Так как $ds/d\alpha$ есть константа, мы выберем ее равной единице и обозначим ниже все производные по переменной s точкой. В частности, тогда

$$g_{\mu\nu}\,\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 1. \tag{4.6.13}$$

4.7. Орбитальное движение частицы вокруг звезды

Уравнение движения может быть записано через полевой тензор следующим образом (что следует из соотношения (4.6.8))

$$\frac{d}{ds}(\eta_{\sigma\nu}\dot{x}^{\sigma} + 2\lambda\, h_{\sigma\nu}\dot{x}^{\sigma}) = \lambda\,\frac{\partial h_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}}\,\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\sigma}. \tag{4.7.1}$$

Перед решением уравнения движения следует заметить, что нам необходимы соответствующие выражения для гравитационных полей. Мы интересуемся этими выражениями в области, где нет источников массы. Таким образом, полевое уравнение

$$h_{\mu\nu,\lambda}{}^{,\lambda} - 2\overline{h}_{\mu\lambda,\nu}{}^{,\lambda} = \lambda\overline{T}_{\mu\nu} \tag{4.7.2}$$

может быть решено способом, аналогичным решению уравнения Максвелла, если мы используем лоренцеву калибровку $\overline{h}_{\mu\lambda}{}^{,\lambda} = 0$. Вспоминая определение даламбертиана $\Box = (\partial/\partial t)^2 - \nabla^2$, получаем

$$\Box\, h_{\mu\nu} = -\lambda\overline{T}_{\mu\nu}. \tag{4.7.3}$$

Для гравистатического случая, когда временная зависимость имеет нулевую частоту, мы должны иметь ньютоновский закон для силы; компонент T_{44} пропорционален массе. Другие компоненты равны нулю. Полевой тензор есть

$$\overline{h}_{44} = -\frac{\lambda M}{4\pi r}, \quad \overline{h} = 0, \quad (\nu, \mu \neq 4, 4). \tag{4.7.4}$$

Тензор без черты получается вычислением оператора "черты" от обеих частей

$$h_{\mu\nu} = \overline{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\overline{h}^{\sigma}{}_{\sigma}\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -\dfrac{\lambda}{8\pi}\dfrac{M}{r} & \text{если } \mu = \nu, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4.7.5}$$

Подставляем такой полевой тензор в уравнения движения и используем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \phi &= 2\lambda h_{44}, \\ \psi &= 2\lambda h_{33} = 2\lambda h_{22} = 2\lambda h_{11}. \end{aligned} \tag{4.7.6}$$

Для данного случая ясно, что $\phi = \psi = -2MG/r$, но в последней лекции мы будем иметь возможность рассмотреть случай, для которого это неверно, так что мы останавливаемся на таком различии в выражении, но предполагаем, что величины ϕ и ψ являются функциями только r.

Процедура решения уравнений, описывающих орбиты, аналогична методу решения уравнений для ньютоновского поля. Мы разделяем уравнения на пространственные координаты и временные координаты, исключаем время и параметр α для того, чтобы получить дифференциальное уравнение, связывающее бесконечно малые перемещения по радиальной и угловой координате. Мы исходим из четырехмерного уравнения (4.7.1). Пространственные координаты ($\nu = 3, 2, 1$) ведут себя согласно следующему уравнению

$$\frac{d}{ds}\left(-\dot{x} + \psi\,\dot{x}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\dot{t}^2 + \frac{\partial\psi}{\partial x}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{y}^2\right)\right]. \tag{4.7.7}$$

Уравнение для времени имеет вид

$$\frac{d}{ds}\left(\dot{t} + \phi\,\dot{t}\right) = 0. \tag{4.7.8}$$

Мы имеем интеграл движения, следующий из уравнения (4.6.13)

$$\dot{x}^{\mu}\dot{x}_{\mu} + 2\lambda h_{\mu\nu}\,\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 1, \tag{4.7.9}$$

которое приводит для нашего случая к следующему соотношению

$$\dot{t}^2(1+\phi) - (1-\psi)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 1. \tag{4.7.10}$$

Из уравнения для времени (4.7.8) следует, что

$$(1+\phi)\frac{dt}{ds} = K, \tag{4.7.11}$$

где K есть константа (пропорциональная энергии). Это соотношение используется для исключения производной dt/ds из уравнения для пространственных компонент (4.7.7). Так как величины ϕ, ψ зависят только от r, правая часть уравнения (4.7.7) ориентирована по оси x. Из этого следует, что

$$\frac{d}{ds}\left[(1-\psi)(\dot{x}y-\dot{y}x)\right]=0.$$

Таким образом, если мы предполагаем, что движение происходит полностью в плоскости $z = 0$ и используем полярные координаты r, θ в плоскости xy, мы имеем дополнительную константу движения L, связанную с угловым моментом

$$(1-\psi)r^2\dot{\theta}=L. \tag{4.7.12}$$

Уравнение для радиального движения может быть получено из уравнения (4.7.10), записанного в полярных координатах

$$\frac{K^2}{1+\phi}-(1-\psi)\left(r^2\dot{\theta}^2+\dot{r}^2\right)=1. \tag{4.7.13}$$

Меняя производную $(dr/d\theta)$ на отношение (dr/ds) и $(d\theta/ds)$, мы получаем дифференциальное уравнение для орбиты

$$\frac{K^2}{1+\phi}-\frac{L^2}{(1-\psi)r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2\right]=1. \tag{4.7.14}$$

Традиционная подстановка $u = 1/r$ приводит к уравнению, которое можно удобно рассмотреть, анализируя малые возмущения ньютоновских уравнений

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2=\left(\frac{K^2}{1+\phi^2}-1\right)\frac{1-\psi}{L^2}. \tag{4.7.15}$$

Мы полагаем, что $\phi = \psi = -2MG/r = -2MGu$. Для нерелятивистских движений K близка к 1 и $K^2/(1+\phi)-1 = K^2-1+2MGu$, если величина ϕ предполагается малой, так что в пределе малых значений ϕ, ψ правая часть уравнения (4.7.15) как раз и есть $L^{-2}(K^2 - 1 + 2MGu)$. Это выражение такое же, как и в ньютоновской теории, где правая часть уравнения равна $(E + 2MGu)L^{-2}$, где E – энергия частицы. В релятивистском случае имеются модификации, где мы не пренебрегаем членами более высокого порядка. Их мы обсудим в следующей лекции.