Лекция 5

5.1. Орбиты планет и прецессия Меркурия

Поскольку мы уже достигли некоторого прогресса в развитии более сложных теорий, мы должны взглянуть на более тонкие детали наших предсказаний для того, чтобы иметь критерии для оценки нашей теории. У нас есть полевая теория, которая сводится к ньютоновской теории в статическом пределе и включает в себя полное содержание энергии, и оказывается способной правильно предсказывать "падение" фотонов в поле звезды. Экспериментальное свидетельство, которое заставит нас отказаться от ньютоновского приближения, касается прецессии перигелия планеты Меркурий. Мы продолжаем вычисление орбит планет. Начнем с уравнения

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \left(\frac{K^2 - 1 - \phi}{1+\phi}\right)\left(\frac{1-\psi}{L^2}\right),$$

$$u = \frac{1}{r}, \quad K = (1+\phi)\frac{dt}{ds}, \quad r\left(\frac{d\theta}{ds}\right) = L = (1-\psi)r^2\frac{d\theta}{ds}, \qquad (5.1.1)$$

где символы ψ и ϕ представляют собой диагональные элементы тензора $h_{\mu\nu}$, $\phi = 2\lambda h_{44}$ и $\psi = 2\lambda h_{ii}$, $i = 1,2,3$. Согласно нашей теории, которую мы разработали к настоящему времени, мы имеем $\phi = \psi = -2GM/r = -2GMu$. Однако, как мы вскоре увидим, наша теория неверна, и, чтобы не проделывать всю работу вновь после исправления теории, мы запишем

$$\phi = \alpha(-2GMu) + a(-2GMu)^2 + ...,$$

$$\psi = \beta(-2GMu) + b(-2GMu)^2 + ..., \qquad (5.1.2)$$

в наших уравнениях, но для того, чтобы найти следствия нашей существующей теории, мы должны положить $a = b = 0$ и $\alpha = \beta = 1$ в этих формулах в самом конце. В случае нашей скалярной теории $\alpha = \beta = 1$ и $\phi = -2GM/r$. Предположим, что потенциал ϕ в естественных единицах нашей задачи mc^2 много меньше 1, так что мы можем разложить множитель $1/(1+\phi)$ в ряд по ϕ; тогда уравнение движения принимает следующий вид:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{L^2}(K^2 - 1 - \phi)(1 - \phi + \phi^2 - ...)(1-\psi). \qquad (5.1.3)$$

Перепишем теперь правую часть этого уравнения как ряд по степеням u. Сохраняя только первый и второй степени малого потенциала, $2GMu$ и $K^2 - 1$, мы имеем

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 = A + Bu + Cu^2 + ..., \qquad (5.1.4)$$

где
$$A = \frac{1}{L^2}\left(K^2 - 1\right); \quad B = \frac{2GM}{L^2}\left[(K^2-1)(\alpha+\beta)+\alpha\right];$$
$$C = \frac{(2GM)^2}{L^2}\left[K^2\alpha^2 + K^2\alpha\beta - K^2a - (K^2-1)b\right].$$
Продифференцируем по переменной θ; после сокращения общих множителей уравнение принимает такой вид, для которого довольно просто найти возмущенные решения
$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{1}{2}B + Cu + \dots \,. \tag{5.1.5}$$
Когда $C = 0$, это уравнение имеет решения типа простых конических сечений ньютоновских теорий. Переменная u испытывает гармонические осцилляции около точки $B/2$ как функция θ. Для эллиптических орбит частота равна 1, так что радиальная координата r возвращается к своему начальному значению при изменении значения угла θ на 2π; движение в точности циклическое. Когда C не равно нулю, частота равна $\omega = \sqrt{1-C}$. Угловой период в этом случае больше, так что перигелий поворачивается при угловом изменении $T = 2\pi/\omega = 2\pi(1 + C/2 + \dots)$. Угол πC представляет прецессию перигелия за один планетарный год, так как $C \ll 1$.

Для нерелятивистской планеты мы получаем значение прецессии довольно просто; нерелятивистский предел имеет место, когда общая энергия K близка к 1 (в естественных единицах mc^2). В этом случае легко показывается, что уравнение (5.1.5) сводится в точности к ньютоновскому уравнению, как это и должно быть. То, что наша теория должна иметь правильный нерелятивистский предел, является более важным, чем то, что она даст правильное значение для прецессии! Когда $K^2 - 1 \approx 0$, прецессия за планетарный год равна
$$\pi C = (\alpha^2 - a + \alpha\beta)4\pi M^2G^2L^{-2}. \tag{5.1.6}$$
При существующей теории $\alpha = \beta = 1$, $a = 0$, эта величина получается равной 57 секунд дуги в столетие (в земных годах) для планеты Меркурия. Для других планет эти значения значительно меньше, как например, 4 секунды дуги в столетие для случая рассмотрения орбиты Земли. Астрономические наблюдения для прецессии перигелия Меркурия дают значение $5270''$ дуги в столетие. Однако, почти вся эта величина может быть объяснена влиянием возмущений вследствие влияния других планет. Когда же аккуратно делаются поправки (с использованием чисто ньютоновской теории), отличие между наблюдаемой и вычисленной прецессией оказывается равным 41 ± 2 секунд. Наша теория дает ответ, который, очевидно, слишком велик (по сравнению с отличием между наблюдаемым значением прецессии и вычисленной величиной в рамках ньютоновской теории), и множитель, который характеризует различие между отличием наблюдаемой

и вычисленной (в рамках ньютоновской теории) прецессией и вычисленным нами в рамках слабого приближения эйнштейновской теории гравитации смещением перигелия, имеет значение порядка 4/3.[1]

Результаты оказались настолько близки, что перед тем, как заняться уточнением нашей теории, мы могли бы тщательно проверить наблюдательные данные и вычисления для того, чтобы быть уверенными в том, что эти различия действительно имеют место. Такая проверка была проводилась неоднократно, и величина для отличия наблюдаемой и предсказываемой в рамках ньютоновской теории прецессии Меркурия осталась прежней (т.е. равной $41 \pm 2''$). Мы могли бы рассмотреть возможность физических объяснений. Если бы имелась ненаблюдаемая до сих пор планета внутри орбиты Меркурия, или если бы Солнце имело существенно квадрупольное распределение массы, так что оно было бы более сплюснуто, то дополнительная прецессия могла бы иметь место. Когда мы действительно делаем оценки для того, чтобы понять, насколько же велика должна быть такая деформация, мы приходим к величинам, которые много больше тех, которые могли бы быть приняты как физически разумные. Солнце вращается слишком медленно для того, чтобы иметь квадрупольный момент достаточной величины. Были сделаны также оценки для того, чтобы объяснить расхождение наличием внутренних планет, и было показано, что подобное объяснение также не является удовлетворительным. Отсюда мы должны заключить, что наша теория неверна.

Перед обсуждением того, что неверно в нашей нынешней теории, мы можем использовать анализ орбит для того, чтобы получить количественный результат для отклонения очень быстрых частиц при прохождении их вблизи Солнца. Релятивистский предел получается, когда $K^2 \gg 1$, т.е. полная энергия много больше, чем энергия покоя. Импульс равен $p = \sqrt{K^2 - 1}$. В пределе $K \gg 1$ можно показать, что уравнения могут быть приведены к виду, аналогичному тому, который имеет место в ньютоновской теории, за исключением того, что потенциал умножается на величину $(\beta + \alpha)$. Так как $\beta = \alpha$, то наши предсказания для угла отклонения в общем случае дают величину, которая в два раза больше, чем величина угла, получаемая в ньютоновской теории.

Численное предсказание состоит в том, что очень быстрые ча-

---

[1] В последнее время достигнуто существенно более точное соответствие предсказаний ОТО и наблюдений. Так, например, в книге Вейнберга [Wein 72] приведены следующие данные: предсказание в рамках ОТО дает значение $43.03''$/столетие, а различие наблюдений и предсказания в рамках ньютоновской теории гравитации дает результат $43.11 \pm 0.45''$/столетие. (*(Прим. перев.)*)

стицы ($v = c$), проходящие вблизи поверхности Солнца, должны бы отклоняться на угол $1.75''$. Были проведены измерения отклонения лучей света, испускаемого звездами, при прохождении лучей вблизи поверхности Солнца, и полученные результаты оказались обнадеживающе близки к теоретическим предсказаниям. Наблюдения в принципе являются прямыми, но достаточно сложно увидеть какие бы то ни было звезды, когда на небо выходит Солнце, не говоря о том, что оно должно быть достаточно близко к этим звездам. Для анализа берутся изображения областей неба и сравниваются с изображениями, которые получаются в течение полного солнечного затмения. Когда поле звезд, наблюдаемое во время солнечного затмения, налагается на исходное поле звезд, наблюдаемое тогда, когда Солнце находится вдали от этого поля звезд, то можно определить сдвиг от Солнца положений звезд, который тем больше, чем ближе было исходное положение к солнечному диску (на небесной сфере). Анализ данных может быть достаточно продолжительным; два таких эксперимента давали значения, соответствующие отклонениям 2.01 и 1.70 секунд дуги для света, проходящего вблизи поверхности Солнца, так что предсказание для угла отклонения, равного 1.75 секундам, вообще говоря, согласуется с этими наблюдениями.[1]

5.2. Замедление времени в гравитационном поле

На настоящий момент у нас имеется теория, которая, очевидно, согласуется с наблюдениями за исключением того, что мы переоценили величину прецессии орбит планет на множитель порядка 4/3. Мы можем представить, как и венерианские теоретики, что пока идет обсуждение остаточных возмущений или пока делаются более точные измерения, разумно продолжить развитие теории в ее нынешней форме для того, чтобы обнаружить некоторые новые эффекты, которые могли бы быть проверены, или обнаружить скрытые противоречия теории.

Если мы сравниваем дифференциальные уравнения движения частиц в электрическом и гравитационном полях, мы обнаруживаем, что уравнения движения в гравитационном поле имеет качественно отличный новый признак; не только градиенты, но и сами потенциа-

[1]Наблюдения с помощью методов радиоинтерферометрии подтвердили формулу Эйнштейна для отклонения лучей света с точностью до 1% [Заха 97*, Coun 74*, Foma 76*]. (*Прим. перев.*)

лы появляются в уравнениях движения

$$\text{Электромагнетизм}: \quad \frac{d^2x^\mu}{ds^2} = -\frac{e}{m_0}\left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}\right)\frac{dx^\nu}{ds},$$

$$\text{Гравитация}: \quad \frac{d}{ds}\left(g_{\alpha\beta}\frac{dx^\beta}{ds}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}. \tag{5.2.1}$$

Таким образом, даже хотя дифференциальные уравнения для самих полей весьма близки, существует различие в их интерпретации. Например, эти уравнения не говорят одно и то же в области с постоянным потенциалом и в области с нулевым потенциалом, хотя ускорения в обоих случаях равны нулю. Во вселенной вклад в потенциал, обусловленный удаленными скоплениями,[1] должен быть практически постоянным по большим областям пространства, так что используем такое приближение.

Вернемся к формулировке теории в терминах лагранжиана и вариационного принципа для того, чтобы увидеть новые соотношения с величайшей простотой и общностью. Будем предполагать, что в некоторой подобласти пространства гравитационный тензор $g_{\mu\nu}$ не зависит от координат и имеет следующее значение

$$g_{44} = 1 + \epsilon; \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1. \tag{5.2.2}$$

Мы предполагаем отрицательный потенциал, обусловленный влиянием удаленных масс, $\epsilon < 0$. Имеем следующее выражение для действия

$$-\frac{m_0}{2}\int d\alpha\; g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\alpha}\frac{dx^\nu}{d\alpha} = -\frac{m_0}{2}\int d\alpha\;\left[(1+\epsilon)\left(\frac{dt}{d\alpha}\right)^2 - \left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 - \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2 - \left(\frac{dz}{d\alpha}\right)^2\right]. \tag{5.2.3}$$

Очевидно, что простая подстановка $t' = t\sqrt{1+\epsilon}$ восстанавливает выражение для интервала в его предыдущей алгебраической форме. Ясно, что влияние постоянного потенциала подобно изменению масштаба времени так, чтобы заставить физические процессы протекать более медленно в областях более низкого гравитационного потенциала.

Аргумент на языке только свободных частиц не является значимым, поскольку мы не можем утверждать, что скорость, при которой ничего не происходит, может меняться. Мы должны взглянуть

[1] Мы будем пользоваться термином "скопления" наряду с используемым Фейнманом словом "nebulae" – "туманности", что ранее обозначало всякий неподвижный на небе объект. (*Прим. перев.*)

на поведение взаимодействующих частиц. С этой целью мы продолжаем использование нашей теории скалярного вещества; интеграл действия равен

$$\frac{1}{2}\int d^4x(\phi^{,\sigma}\phi_{,\sigma} - m^2\phi^2) - \lambda\int d^4x\ h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}, \tag{5.2.4}$$

где

$$T^{\mu\nu} = \phi^{,\mu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{,\nu}} - \eta^{\mu\nu}\mathcal{L}. \tag{5.2.4$'$}$$

Мы можем явно разделить пространственные производные и производные по времени в градиентах и также выделить время в элементе объема d^4x. Мы предполагаем, что поправки ϵ меньше 1, так что разложение разрешено, и мы получаем следующее выражение для интеграла действия

$$\frac{1}{2}\int d^3x dt\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2(1-\epsilon/2) - (\nabla\phi)^2(1+\epsilon/2) - m^2\phi^2(1+\epsilon/2)\right]. \tag{5.2.5}$$

Снова оказывается, что при $dt' = dt = \sqrt{1+\epsilon} \approx dt(1+\epsilon/2)$ действие возвращается к своей первоначальной алгебраической форме. Ясно, что замедление времени имеет место для наших скалярных мезонов, представляемых ϕ. Можно показать, что замедление времени должно иметь место для всех взаимодействий, безотносительно к точной природе лагранжиана. Мы можем доказать с помощью формулы Вентцеля (5.2.4$'$) для $T^{\mu\nu}$. Гравитационное взаимодействие может быть явно отделено от остальной части лагранжиана, какой бы он ни был

$$\mathcal{L}(\text{общ}) = \mathcal{L}_0 - \lambda h_{\mu\nu}T^{\mu\nu}. \tag{5.2.6}$$

При использовании выражение (5.2.4$'$) и $g_{\mu\nu}$ из (5.2.2) так, что $\lambda h_{44} = \epsilon/2$, полный лагранжиан равен $\mathcal{L} - (\epsilon/2)T_{44}$ или

$$\mathcal{L}(\text{общ}) = \mathcal{L}(1+\epsilon/2) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{,t}}\psi_{,t}(\epsilon/2). \tag{5.2.7}$$

Предположим поэтому, что полный лагранжиан (включающий наш постоянный гравитационный потенциал) включает в себя только поле ψ и его градиенты. Интеграл действия, выраженный через переменную t', по крайней мере, в первом порядке по ϵ, равен

$$\text{Действие} = \int d^3x\ dt'\mathcal{L}(\psi_{,t'},\psi,\psi_{,x}), \tag{5.2.8}$$

так как $\psi_{,t'} = (1+\epsilon)^{-1/2}\psi_{,t}$,

$$\text{Действие} = \int d^3x\,(1+\epsilon)^{1/2}dt\ \mathcal{L}((1+\epsilon)^{-1/2}\psi_{,t},\psi,\psi_{,x}).$$

Результат всего этого состоит в том, что любые члены в лагранжиане, в которые включены градиенты по времени $\psi_{,t}$, имеют свои собственные множители $\sqrt{1+\epsilon}$, так что подстановка $t' = t\sqrt{1+\epsilon}$ в точности воспроизводит влияние постоянного гравитационного поля. Следовательно, вся физика остается той же самой, за исключением замедления времени.

Гравитационные потенциалы отрицательны, так что часы должны были бы идти медленнее в том случае, если они приближаются ближе к массивному объекту, такому как звезда. Можно было бы задать вопрос о том, имеется ли возможность того, что величина $(1+\epsilon)$ будет отрицательной, так как $\epsilon = -2GM/r$. Практически такой вопрос никогда не возникает, поскольку величина G очень мала. Для звезды с солнечной массой мы бы имели $\epsilon = -1$, только если эта масса была бы сосредоточена внутри сферы с радиусом порядка 1.5 километров. Тем не менее, математическая возможность $\epsilon < -1$ имеется в нашей теории, и мы будем обсуждать ниже возможность того, как даже в улучшенной теории возникают подобные трудности.

Таким образом, мы имеем новое предсказание наших гравитационных теорий, часы должны были бы идти более медленно в областях с более низким гравитационным потенциалом. Земляне провели такой эксперимент, в котором производилось испускание фотонов вблизи поверхности Земли с высоты 24 метров. Фотоны испускались на вершине и поглощались на дне; использовались предельно узкие линии, открытые Мессбауэром, связанные с ядерными переходами в кристаллах. Небольшое изменение в частоте, связанное с падением фотонов в гравитационном поле (1 часть из 10^{15}), компенсируется искусственным эффектом Допплера. Когда поглощение, как функция относительных скоростей кристаллов, используется для того, чтобы определить сдвиг частоты, то результаты согласуются с теоретическими предсказаниями в пределах экспериментальной неопределенности порядка десяти процентов. Часы, которые идут более медленно в этом случае, являются ядерным устройством, которое производит фотоны с определенными частотами; относительная разность в частотах часов на вершине и на дне есть $(\Delta\omega/\omega) = (\epsilon/2)=$ разность гравитационного потенциала, деленная на c^2.

Такое предсказание сдвига частоты в действительности не требует приведенной техники нашей теории гравитации, так как это подразумевается в экспериментальных результатах Этвеша, что гравитационные силы (потенциалы) пропорциональны величине энергии. Таким образом, сдвиг частоты соответствует доли гравитационной энергии в энергии фотона. Согласно Этвешу, возбужденное ядро тяжелее на величину $(E_0/c^2)g$, если E_0 – энергия возбуждения, поскольку, как мы знаем из ядерных экспериментов, его масса равна $M + E_0/c^2$, если M – масса в положении, когда ядро находится на поверхности Земли. Если возбужденное ядро поднимается на высоту h, оно содержит энергии на величину $E_0 + (E_0/c^2)gh + Mgh$ больше, чем невозбужденное ядро, находящееся на нулевой высоте. Если мы возбуждаем ядро, находящееся в более низком положении, требуется только энергия E_0. После того, как более высоко расположенное ядро совершило переход, его полная энергия должна была бы превосходить полную энергию более низко расположенного ядра только на величину Mgh. Так как частота фотона связана с энергией соотношением $E = \hbar\omega$, частота испущенного фотона есть $\omega = \omega_0(1 + gh/c^2)$. Таким образом, очевидно, что сдвиг частоты требуется из закона сохранения энергии. Если такого сдвига частоты не было бы в подобной ситуации, мы могли бы сконструировать вечный двигатель, используя такие ядерные переходы. Мы возбуждаем ядро на вершине башни фотонами с энергией E_0, но мы получаем механическую энергию $(M + E_0/c^2)gh$ при опускании возбужденного ядра. Так как поднятие невозбужденного ядра требует затраты энергии только Mgh, то мы получаем $(E_0/c^2)gh$ высвобождаемой энергии на каждом цикле! Тогда наша теория не является непротиворечивой, и это наводит на мысль, что сдвиг частоты, требуемый законом сохранения энергии, должен рассматриваться как общее свойство всех физических процессов, т.е. они протекают более медленно в областях с более низкими значениями гравитационного потенциала.

Здесь нет ничего похожего на "парадокс близнецов" в специальной теории относительности. Человек на вершине горы живет и стареет быстрее, чем мы, мы видим его движущимся быстрее. Когда он смотрит на нас, он видит нас, движущимися медленнее, чем он. Это не похоже на замедление времени при больших относительных скоростях, когда каждый наблюдатель видит другого движущимся медленнее. Однако не существует пути значительного увеличения нашего времени жизни, двигаясь в Долину Смерти, так как скорости изменения старения меняются очень мало. Тем не менее, мы должны были бы быть значительно более внимательными в будущем, говоря о возрасте объектов, таких как Земля, так как центр Земли должен бы быть на день или два моложе, чем ее поверхность.

5.3. Космологические эффекты, связанные с замедлением времени. Принцип Маха

Ранее мы заметили, что вселенная могла бы быть приближенно описана как сферически симметричное распределение массы, и чтобы гравитационные потенциалы были бы возможно такой величины, что значения гравитационной энергии были бы равны энергии покоя частиц вблизи центра. Если бы это было так, и если наша формула для замедления времени была бы правильной, то физические процессы должны были бы остановиться в центре вселенной, так как время там не шло бы совсем. Это не только физически неприемлемое предсказание; так как мы могли бы ожидать, что вещество вблизи края вселенной должно было бы взаимодействовать быстрее, то свет от удаленных галактик должен был бы иметь фиолетовое смещение. На самом деле, хорошо известно, что он сдвинут в сторону более низких, более красных частот. Таким образом, наша формула для замедления времени очевидно нуждается в том, чтобы быть обсужденной в дальнейшем в связи с анализом возможных моделей вселенной. Последующая дискуссия является чисто качественной и предназначена только для того, чтобы стимулировать более мудрые мысли по этому поводу.

Возможно, что поправки к нашей простой формуле могли бы придти от пространственных элементов тензора $h_{\mu\nu}$. Мы рассмотрели только компонент h_{44}; могло бы быть так, что если бы мы включили в рассмотрение h_{11} и h_{22} и h_{33}, мы могли бы предсказать не просто замедление времени, но и некоторое одновременное сжатие вдоль пространственных осей, что позволило бы разрешить каким-либо образом обсуждаемые трудности. Другая возможность состоит в том, что 1, которая появляется в формуле для замедления времени, есть ошибка в рассуждении. Мы записали формулу, которая применяется только в том случае, когда разности потенциалов ϕ много меньше 1, так что константа 1 может каким-либо образом представлять нормализованный вклад в распределение массы удаленных скоплений. Другими словами, мы вывели, что гравитационные поправки к общей энергии частицы есть поправки к ее инерции. Это предположение является концептуально простым обобщением того рассуждения, при котором предполагается, что возможно частицы не имеют собственной инерции, так что вся инерция представляет сумму гравитационных взаимодействий с остальной частью вселенной. Мы немедленно приходим к количественным трудностям. Предположим, что мы пытаемся сказать, что вблизи Солнца одиночная планета имеет полную потенциальную энергию, которая есть сумма потенциала Солнца и приближающегося к константе распределения, обусловленного влиянием оставшегося вещества

$$\phi = \phi(\text{Солнце}) + \phi(\text{вещество}). \tag{5.3.1}$$

У нас нет возможности идентификации ϕ(удаленное вещество) с 1, так как поправка ϕ(Солнце) может быть с противоположным знаком.

Хотя показано, что эта не слишком усложненная попытка обсуждения провалилась, может быть стоит обсудить этот вопрос более детально. Идея, что инерция представляет эффекты взаимодействия с распределением удаленного вещества, была впервые высказана Эрнстом Махом в XIX веке, и это была одна из тех мощных идей, которые Эйнштейн держал в голове при создании своей теории гравитации.

Мах чувствовал, что концепция абсолютного ускорения относительно "пространства" не имеет глубокого смысла; что вместо этой концепции обычные абсолютные ускорения классической физики должны быть перефразированы как ускорения относительно распределения удаленного вещества. Подобно этому, понятие вращения должно быть вращением относительно чего-либо, "абсолютное вращение" также является понятием, лишенным смысла. Когда мы рассматриваем это понятие, как фундаментальное предположение или постулат, оно известно как принцип Маха. Возможно, что эта концепция сама по себе может привести к глубоким физическим результатам, многие из которых могут быть получены на том же самом пути, что и принцип относительности, связывающий системы отсчета с постоянной относительной скоростью, который использовался Гюйгенсом как инструмент для того, чтобы вывести законы, описывающие столкновения биллиардных шаров. Предположим, что мы наблюдаем лобовое столкновение, так что биллиардные шары, имеющие равные и противоположно направленные импульсы, затем меняют значения своих импульсов на противоположное. Гюйгенс представил этот же самый эксперимент, как проводимый на лодке, имеющей постоянную скорость относительно берега. Используя принцип относительности, Гюйгенс получил правильный закон для столкновения гладких биллиардных шаров, имеющих произвольные начальные скорости.

Принцип Маха глубоко бы изменил законы механики, так как обычная механика предполагает, что неускоренное прямолинейное движение должно быть "естественным" движением в отсутствии сил. Когда ускорения определяются как ускорения относительно других объектов, траектория частицы при "отсутствии ускорения" зависит от распределения других объектов в пространстве, и определение сил между объектами изменялось бы всякий раз, когда бы мы меняли распределение других объектов в пространстве.

5.4. Принцип Маха в квантовой механике

Утверждение принципа Маха для квантовой теории включает в себя новые эффекты, так как мы не можем говорить о прямолинейных траекториях; мы увидим, что надлежащее утверждение включает в себя до некоторой степени развитие понятия "время".

У Маха была проблема, связанная с тем, как частица "знает", что она ускоряется. Мах думал, что это обусловлено влиянием распреде-

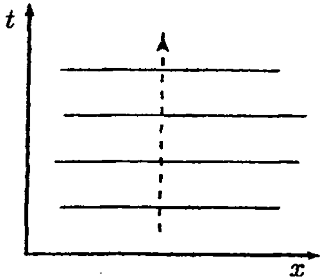

Рис. 5.1.

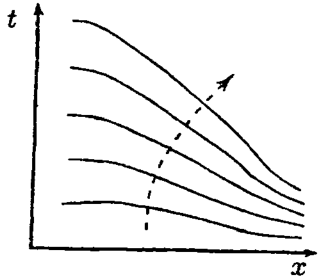

Рис. 5.2.

ления удаленных масс, таким влиянием, что ускорение относительно них требует силы. С появлением квантовой механики новый "абсолют" стал определимым; абсолютный масштаб длины или времени. 10^{24} атомов водорода при нулевой энергии в кубе имеют как раз некоторый определенный абсолютный размер, молекула NH_3 вращается с определенным временем между циклами.[1] В вакууме два одинаковых фотона, сталкивающихся друг с другом, не делают ничего особенного до тех пор, пока длина волны не станет меньше, чем $2\pi \cdot 3.68 \times 10^{-11}$ см, когда могут быть образованы пары электронов. Как фотоны "знают", каковы их длины волн в абсолютных единица с тем, чтобы решить, образовывать ли им пары? Каждый объем пространства должен содержать естественную меру размера (или времени).

Принимая философию Маха, мы могли бы сказать, что вышесказанное есть нонсенс, что размер не есть абсолют, если нет ничего, с чем можно было бы его сравнить. Это могло бы быть влияние "туманностей", которое определяет масштаб времени в каждой точке пространства. Скажем, комптоновская длина волны относительно размера Вселенной зависит от того, как много "туманностей" находится в ней. Если они частично удалены, то масштаб длины должен был бы предположительно меняться.

Мы предположим, следовательно, что естественный масштаб времени, скажем, величина $\hbar/mc^2$ (или любая другая комбинация для других фундаментальных частиц, а мы предполагаем, что все они пропорциональны некоторой единице длины) определяется некоторой удаленной "туманностью". Теперь мы покажем, что инерциальная система отсчета также автоматически определяется этой "туманностью", и феномен инерции для ускорений относительно этой "туманности" может быть понят, если принимается "определяющий длину принцип". Следовательно, принцип Маха эквивалентен утверждению, что фундаментальные единицы длины и времени в точке есть

---

[1]Обсуждение некоторых простейших свойств молекулы аммиака, основанное на квантово-механическом подходе, можно найти в "Фейнмановских лекциях по физике" [Feyn 63a] (т. 8 русского перевода, 1966, с. 145). (*Прим. перев.*)

результат влияния удаленной "туманности".

Предположим, что частица находится в покое, тогда в квантовой механике она характеризуется следующей зависимостью от времени $\exp(-imc^2t/\hbar)$. Принцип инерции есть утверждение о том, что временной масштаб не зависит от координаты x; классические траектории интерпретируются так, чтобы следовать нормальным линиям постоянной фазы. В пространстве двух измерений мы рисуем линии постоянной фазы перпендикулярно оси времени, как на рис. 5.1.

Если временные масштабы в различных частях пространства не являются теми же самыми, то линии постоянной фазы в таких диаграммах являются кривыми и соответствующие классические траектории – кривые, соответствующие ускоренному движению по направлению к области с меньшим масштабом, как показано на рис. 5.2. Так как звезды производят такое уменьшение характерного времени для фазы, они должны вызывать ускорения. В квантовой механике плоско-параллельные решения существуют, когда поверхности постоянной фазы параллельны; если этого нет, то волновые пакеты будут стремиться следовать градиенту фазы. Теперь, если удаленная "туманность" определяет в основном этот масштаб и если нет ближайших звезд, масштаб $\hbar/mc^2$ будет почти равным в двух ближайших точках 1 и 2, потому что 1 и 2 находятся практически на одинаковом расстоянии от всех "туманностей". Следовательно, естественная частота (разделение линий постоянной фазы) в точках 1 и 2 была бы практически равной. Таким образом, если частица первоначально имела бы равную фазу в точках 1 и 2, это всегда было бы так, и это состояние оставалось бы в покое, не ускорялось бы (более точно, длинный волновой пакет оставался бы в покое). Неравные начальные фазы дают наклонные линии, постоянная наклона по времени связана с постоянной скоростью. Отсутствие ускорения есть следствие наличия естественной временной шкалы, которая одинакова во всех точках в области пространства. Это постоянство понятно, если "туманности" определяют естественную шкалу для области пространства очень малой по сравнению с размерами распределения влияющих "галактик" (размерами вселенной), никаких вариаций в масштабе не могло бы ожидаться.

Имеются некоторые числовые совпадения, которые мы можем упомянуть здесь для того, чтобы навести на мысль о том, как "естественные" масштабы длины могут быть в некотором смысле извлечены из космологии. Такое совпадение не содержит в себе "теорию", как таковую, оно просто используется для того, чтобы проиллюстрировать связь, которая могла бы быть в конце концов предсказана подробной теорией. Мы предполагаем, что в некоторой системе временных единиц, которые "естественны" для вселенной, соответствующий инвариант (элемент длины) для частицы, находящейся в покое, есть

$$(ds)^2 = g_{44}(dt)^2. \tag{5.4.1}$$

Координатная временная единица t должна быть (R/c), где R – радиус вселенной. Мы предполагаем, что атомные единицы определяются ds, *мы серьезно берем в качестве абсолютного размера* $g_{\mu\nu}$, тогда одна единица ds является фундаментальной длиной. Какова фундаментальная длина? Все масштабы длины пропорциональны, но мы попробуем использовать комптоновскую длину волны $\hbar/Mc$. Тогда s от 1 означает одну осцилляцию волновой функции протона, а t от 1 – масштаб, равный размеру Вселенной.

Предположим затем, что вклад в величину g_{44}, обусловленный каждым протоном, есть просто $1/r$ (r есть в координатных единицах радиус вселенной). Тогда удаленные "туманности", которые имеют N_0 протонов и которые удалены на характерное расстояние $R = 1$, дают вклад в величину g_{44} порядка N_0. В окрестности звезды на расстоянии r, содержащей n протонов, элемент дуги имеет следующий квадрат:

$$(ds)^2 = \left(N_0 + \frac{n}{r}\right)(dt)^2. \tag{5.4.2}$$

Совпадение состоит в том, что если T – возраст вселенной, то он численно связан со временем протона $(\hbar/M_pc^2) \approx T/\sqrt{N_0}$. Вместе с другим совпадением, о котором уже было упомянуто, что $2M_{\text{всел}}G/R \approx 1$, когда мы вновь переходим к произвольной системе единиц, такой как сантиметры и секунды, получаем

$$(ds)^2 = \left(N_0 + \frac{2mG}{r}\right)(cdt)^2, \tag{5.4.3}$$

где m – масса звезды, грубо говоря $m = nM_p$. За исключением катастрофического появления знака $(+)$ вместо знака $(-)$, этот результат идентичен "правильному" выражению для длины дуги. Мы преуспели в получении правильных размеров путем жонглирования космологическими числами.

Вероятно, в таком совпадении нет какого-либо глубокого значения. Одно положение, которое неверно, состоит в том, что мы предположили вклад $(1/r)$ от каждой протонной массы, но зависимость $(1/r)$ есть правильное выражение для поправок к полной энергии, обусловленной влиянием близких частиц, и это выражение, возможно, неверно для частиц в удаленных галактиках. Другая серьезная трудность состоит в том, что мы не пытались учесть эффекты, связанные с другими членами тензора $h_{\mu\nu}$, например h_{11}. Однако такое жонглирование служит тому, чтобы показать, как теории гравитации неизбежно приводят к рассмотрению вовлеченных в теорию времени и инерции; мы получаем представление о том, как взаимодействие, выраженное через число удаленных частиц, может привести к наблюдаемой инерции такого объекта, как протон. Во всяком случае, делается намек на то, что абсолютная величина тензора $g_{\mu\nu}$ взята серьезно; эта величина может иметь смысл. Плоское пространство может быть $g_{44} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = \xi$, где ξ - имеющее глубокий смысл число, которое не берется просто равным 1.

5.5. Собственная энергия гравитационного поля

Вернемся к менее спекулятивной и более точной материи. При развитии и проведении модификаций нашей полевой теории мы пренебрегали тем, чтобы проверить, является ли наша теория внутренне непротиворечивой. Мы написали полный лагранжиан, имеющий полевой член, член, описывающий материю, и член, характеризующий взаимодействие. Мы получили полевое уравнение, используя условие, что дивергенция тензора энергии-импульса должна быть равна нулю. Такая процедура очевидно некорректна, так как мы написали тензор давления, который не включал в себя энергию самого гравитационного поля. Таким образом, наша нынешняя теория не выдерживает критики с точки зрения физики, так как энергия вещества не сохраняется.

Мы попробуем исправить этот теоретический недостаток путем поиска нового тензора, который складывается со старым тензором $T^{\mu\nu}$, который мог бы разрешить эту проблему, так что

$$(T^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu})_{,\nu} = 0, \tag{5.5.1}$$

и в то же самое время полная энергия поля правильно учтена. Как мы найдем этот член? Мы могли бы попытаться построить правильный полный тензор, используя формулу Вентцеля и полный лагранжиан. Результат дает несимметричный тензор, если мы проведем его симметризацию, проведем также вычисления, то оказывается, что выражение для прецессии перигелия Меркурия получается неверным. Это другой пример эмпирического определения физических теорий: теории, не возникающие из некоторого рода вариационного принципа, такого как принцип минимального действия, могут в конечном счете приводить к волнениям и противоречиям.

Сделаем попытку другого рода согласно общей линии нашего построения, заключающегося в испытаниях различных теорий в последовательном порядке увеличения сложности. Физически мы знаем, что мы пытаемся описать нелинейный эффект: гравитационное поле образовано энергией, энергия этого поля есть источник других полей. Здесь мы можем приступить к получению важного результата. Конечно возможно, что такая нелинейность может приниматься в расчет для малого остаточного отличия в прецессии перигелия Меркурия. Мы будем требовать, чтобы полевые уравнения получались из вариации некоторого действия, и будем задавать себе вопрос о том, какого вида член должен быть добавлен к лагранжиану для того, чтобы получить член, похожий на член $\chi^{\mu\nu}$, чтобы придти к уравнению движения

$$h^{\mu\nu,\sigma}{}_{,\sigma} - 2\overline{h}^{\mu}{}_{\sigma}{}^{,\nu\sigma} = -\lambda(\overline{T}^{\mu\nu} + \overline{\chi}^{\mu\nu}), \tag{5.5.2}$$

и такого, что соотношение (5.5.1) оказывается выполненным? Как может выглядеть выражение $\chi^{\mu\nu}$, если оно представляет вид гравитационной энергии? Несомненно, что, по крайней мере, частично эта величина пропорциональна квадратам полевых сил; это есть произведение двух градиентов потенциалов. Возможно, поэтому, $\chi^{\mu\nu}$ есть сумма членов, похожих на $h^{\mu\sigma}{}_{,\lambda}h^{\nu\lambda}{}_{,\sigma}$ + т.д., каждый из которых с двумя компонентами h и двумя производными.

Мы будем требовать, чтобы наши уравнения были выводимы из вариационного принципа такого, как наименьшее действие. Когда мы вариируем эти произведения, мы уменьшаем число компонент h, так что для лагранжиана, который используется для вычисления вариации действия, требуется связывающий член третьего порядка по $h_{\mu\nu}$, который будем называть F^3; мы будем пытаться сделать преобразования так, что вариация F^3 приводит к члену $\chi^{\mu\nu}$

$$\frac{\delta F^3}{\delta h_{\mu\nu}} = \lambda\chi^{\mu\nu}. \tag{5.5.3}$$

Алгебраическое выражение F^3 должно быть таким, чтобы оно включало в себя произведения трех компонентов h и имело два индекса, по которым берется производная. Типичный член F^3 может быть вида

$$F^3 = ah_{\mu\nu}h^{\mu\sigma,\lambda}h_{\sigma\lambda}{}^{,\nu} + \ldots . \tag{5.5.4}$$

Когда мы записываем все возможные такие произведения, мы находим, что их 24. Мы могли бы в дальнейшем уменьшить это число, замечая, что некоторые члены могут быть сведены к комбинациям других интегрированием дважды по частям, эти соображения приводят нас к тому, чтобы записать 18 различных и независимых выражений. Следовательно, мы приходим к выражению для $\chi^{\mu\nu}$ через компоненты h и 18 независимых констант.

Дальнейшая процедура очевидна. Мы пытаемся определить константы, исходя их условия, что

$$(T^{\mu\nu} + \chi^{\mu\nu})_{,\nu} = 0. \tag{5.5.5}$$

Эти условия дают множество более, чем 18 уравнений для 18 констант. Тем не менее, оказывается, что все уравнения совместны и 18 констант определяются однозначно. Когда мы сделаем это, у нас будет уточненная теория, которая правильно учитывает энергию самого гравитационного поля во втором порядке по $h_{\mu\nu}$.