Лекция 7

7.1. Принцип эквивалентности

В наших нынешних планах будет описание относительности и гравитации с точки зрения, которая в большей степени находится в согласии с подходом Эйнштейна. Мы надеемся, что, рассматривая теорию с различных выгодных точек зрения, мы лучше поймем теорию в целом. Теория гравитации, как она рассматривалась в рамках идей Эйнштейна, есть нечто настолько удивительно волнующее, что мы будем испытывать искушение попытаться сделать так, чтобы все остальные поля выглядели как гравитация, что является пожалуй предпочтительнее, чем продолжать исследование гравитации с венерианского направления, делающего гравитацию похожей на другие поля, которые нам привычны. Мы будем сопротивляться этому искушению.

Истоки подхода Эйнштейна должны быть найдены в физике, известной во время создания им теории гравитации, в электродинамике и ньютоновской механике. Чувствуется, что идея, преобладающая в мыслях Эйнштейна во время создания им его теорий, заключалась в том, что все разделы физики должны были бы быть согласованы; он нашел путь, чтобы уладить лоренц-инвариантность классической электродинамики с видимой галилеевой инвариантностью ньютоновской механики, и много новых физических результатов было достигнуто после этого. Аналогично, именно загадочный феномен гравитации привел Эйнштейна к теории гравитации, когда он преобразовал этот феномен в физический принцип.

Центральная идея гравитации, наиболее убедительный факт о том, как она действует, состоит в том, что вес и масса в точности пропорциональны, так что все объекты ускоряются гравитацией в точности с одной и той же скоростью независимо от состава вещества, из которого состоят эти тела. Эксперимент Этвеша показал, как центробежная сила добавляется к гравитационной силе так, что результат неотличим от чисто гравитационного эффекта. Возможно такие эксперименты навели Эйнштейна на мысль о том, что может быть такой физический принцип, который заставляет ускорения имитировать гравитацию во всех отношениях. Совершенно очевидно, что механические эксперименты, проводимые внутри ускоряющегося ящика, дают результаты, которые неотличимы от результатов, которые могли бы быть получены в том случае, если ящик находился в покое, но имелось бы гравитационного поле. Во времена Эйнштейна

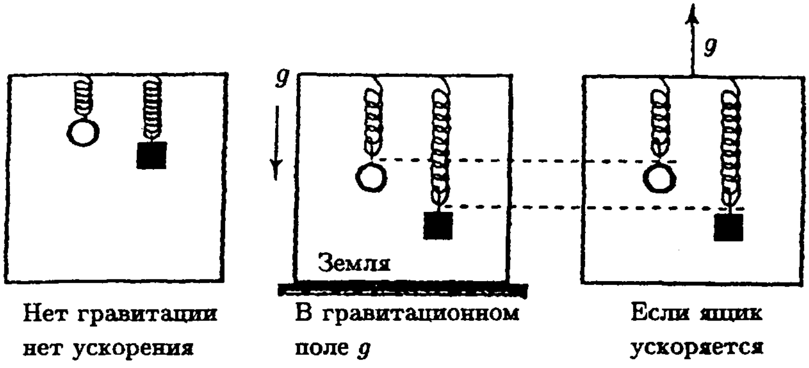

Рис. 7.1.

не было прямых проверок этого факта, но теперь нам хорошо знакома невесомость в спутниках, которая возникает вследствие того, что гравитационная сила и центробежная оказываются одинаковыми по абсолютной величине и противоположными по знаку. Возможность возникновения подобного рода невесомости есть суть принципа эквивалентности.

Перед тем, как мы извлечем полезную физику из этой идеи, мы должны иметь утверждение, которое является более точным и которое включает в себя определенные измеряемые величины. Более точное утверждение, которое имело бы смысл в рамках ньютоновской механики, могло бы включать в себя силы, действующие на стационарные объекты. Если мы осуществляем движение ящика с постоянным ускорением g, то на все тела, которые находятся в ящике, должна действовать сила, которая в точности пропорциональна весу; например, силы давления на подставки или силы натяжения пружины, поддерживающей эти тела внутри ящика, являются теми же самыми, что и силы, вызываемые однородным гравитационным полем, характеризуемым ускорением g. Так как сила давления на подставку не является напрямую измеряемой величиной, то возможно предпочтительнее рассуждать о весе тел, подвешенных на пружинах. Смещения от величины длины пружины в нерастянутом состоянии для заданных масс, подвешенных на заданных пружинах, должны быть в точности равны, когда (1) ящик находится в стационарном гравитационном поле, характеризуемом ускорением g, или (2) ящик ускоряется с постоянным ускорением g в области, где гравитационное поле равно нулю, как показано на рис. 7.1.

Это утверждение принципа эквивалентности является более физическим, но мы пока говорим на элементарном уровне без определения природы сил более точно. Возможно ли сделать физически значимые утверждения без определения природы сил? Мы можем напомнить ситуацию в механике Ньютона. Часто говорится, что второй закон Ньютона

$$F_x = m\ddot{x}, \tag{7.1.1}$$

есть просто определение сил, так что этот закон не несет в себе никакой реальной физики, поскольку содержит в себе рассуждение, проводимое по логическому кругу. Но очевидно, что теория Ньютона целиком не является логическим кругом, так как она правильно предсказывает орбиты Луны и планет. Что Ньютон имел в виду, говоря нам, что мы должны вычислять силы в соответствии с (7.1.1), было то, что если существует ускорение, мы должны оглядеться по сторонам в поисках какой-либо физической причины, которая вызывает такую силу. Будущее физики лежит в нахождении того, как окружение объекта связано с силами, которые мы подставляем в левую часть уравнения (7.1.1) так, чтобы соответствовать наблюдаемым ускорениям.

Когда Ньютон приходит к своему третьему закону

$$F(\text{действие}) = -F(\text{противодействие}), \tag{7.1.2}$$

он делает физическое утверждение, так как он приводит детальные характеристики связи между силами и физическими объектами. Ньютоновский закон гравитации есть другая детальная характеристика того, как окружение объекта связывается с его ускорениями. Второй закон Ньютона задается в духе "*cherchez la femme*": Если мы видим силу, то мы должны искать "виновный" объект, который вызывает эту силу.

Аналогичным способом наша простая формулировка принципа эквивалентности дает физическое утверждение о том, как окружение влияет на тела; оно не зависит от правильности второго закона Ньютона (7.1.1). Окружение в этом случае состоит из масс, которые образуют гравитационные поля, или внешние силы создают ускорения.

Невозможно полностью исключить гравитационные эффекты однородными ускорениями. Представим себе ящик на орбите земли, т.е. спутник. Так как гравитационное поле не является однородным, имеется только одна точка вблизи центра масс спутника, где гравитационные эффекты в точности скомпенсированы ускорением. Если мы удаляемся достаточно далеко от центра масс, гравитационное поле Земли меняет или свою величину, или направление, так что будут существовать малые нескомпенсированные компоненты гравитационных сил. Если ящик не очень велик, эти дополнительные силы очень

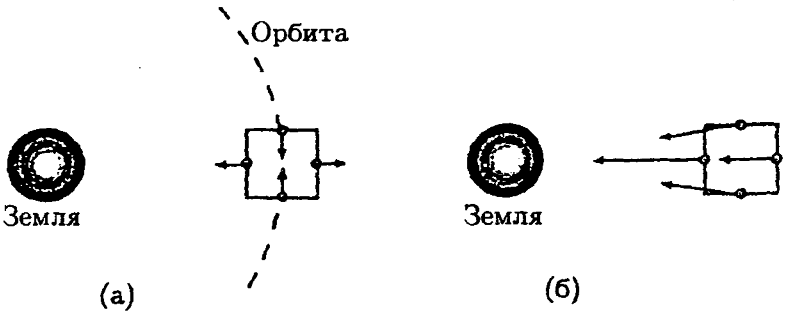

Рис. 7.2.

близки к пропорциональности расстоянию от центра этого ящика и имеют квадрупольный характер, как показано на рис.7.2(а). Силы, подобные этим, вызывают приливы на Земле, так что мы можем называть их приливными силами. Мы можем рассмотреть также ящик, который помещен в подобное неоднородное поле, но не ускоряется, как показано на рис.7.2(б). Принцип эквивалентности говорит нам теперь, что мы можем создать ситуацию, физически неотличимую от той, которая происходит внутри спутника, если мы поместим большие массы достаточно далеко, так что мы накладываем однородное поле, которое в точности компенсирует гравитацию в центре ящика.

Попробуем посмотреть, как мы могли бы сделать еще лучшее утверждение эквивалентности: одно гравитационное поле внутри ускоряемого ящика эквивалентно другому гравитационному полю и другому ускорению ящика. Мы можем исключить гравитацию в любой отдельной точке и в любой отдельный момент времени; в некоторой малой области, окружающей данную точку, остаточные отличия должны быть пропорциональны расстоянию от точки, где ускорения скомпенсированы. Становится очевидным, что при создании нашей теории мы будем рассматривать преобразования, которые можем символически записать как

$$(\text{гравитация})' = (\text{гравитация}) + (\text{ускорение}). \qquad (7.1.3)$$

Вследствие этой возможности, мы не будем способны сказать в любом абсолютном смысле, что один эффект является гравитационным или вызывается силами инерции; невозможно определить "истинную" гравитацию, так как мы не можем даже точно определить, какая часть наблюдаемой силы вызывается гравитацией и какая обусловлена действием сил инерции. Оказывается верным то, что мы не можем имитировать гравитацию ускорениями всюду, что проявляется в том случае, когда мы рассматриваем ящики больших размеров. Тем не менее, рассматривая преобразования (7.1.3) в инфинитезимальных областях, мы надеемся узнать, как описать эту ситуацию в дифференциальном виде; только затем мы будем беспокоиться о граничных условиях или описании гравитации в больших областях пространства.

В специальной теории относительности проводится интенсивное использование инерциальных систем отсчета, которые движутся друг относительно друга с постоянной скоростью и прямолинейно. Но, как только мы допускаем существование гравитирующих масс всюду во Вселенной, концепция такого истинного неускоренного движения становится невозможной, поскольку всюду будут гравитационные поля.

Если мы проводим эксперименты внутри ящика, который не находится в свободном падении, то будет возможно определить наличие сил типа гравитации, например, экспериментами с применением пружин. Тем не менее, мы не можем сказать, находясь внутри ящика, ускоряемся ли мы относительно "туманности", или эти силы обусловлены массами, находящимися в окрестности ящика. Именно этот характерный факт о гравитационных силах дает намек на постулат, который в конце концов приводит нас к полной теории.

Мы постулируем: будет невозможно посредством какого бы то ни было эксперимента, проводимого внутри такого ящика, детектировать различие между ускорением относительно "туманности" и гравитацией. Таким образом, ускоряющийся ящик в некотором гравитационном поле неотличим от покоящегося ящика в некотором другом гравитационном поле, если наблюдатель находится внутри ящика.

Это звучит так похоже на рассуждения Эйнштейна, так напоминает его постулат специальной теории относительности! Мы знаем, что принцип эквивалентности работает для пружин (как мы знали, что специальная теория относительности работает для электродинамики) и мы распространяем его *по соглашению* на какие бы то ни было эксперименты. Мы привыкли использовать такие процедуры к настоящему времени, но каким удивительным являлся этот принцип в 1911 году – таким удивительным человеком был Эйнштейн.

7.2. Некоторые следствия принципа эквивалентности

Принцип эквивалентности говорит нам о том, что свет отклоняется (от прямолинейного движения) в гравитационном поле. Величина этого отклонения, когда свет проходит заданное расстояние в области однородного гравитационного поля, может быть очень легко вычислена путем анализа движения света в ускоряемом ящике; если ящик ускоряется, то свет движется по прямой линии в неускоряемой системе отсчета, т. е. рассматривается простая кинематика для вычисления траектории света внутри ящика. Для такого эксперимента

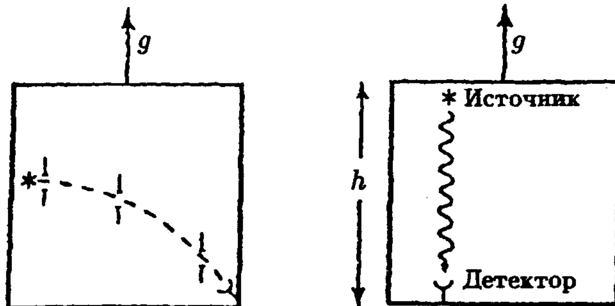

Рис. 7.3.

необходимы только источник света и детектор, и ряд разрезов для того, чтобы определить траекторию движения света, как проиллюстрировано на рис. 7.3.

Мы не можем использовать такие простые средства для вычисления отклонения света звездой, поскольку поле звезды неоднородно; подобное простое вычисление было бы неверным на множитель, равный 2, если мы просто используем ньютоновские потенциалы; для правильного вычисление необходимо использовать соответствующие релятивистские поля.

Принцип эквивалентности также говорит нам о том, что ход часов изменяется гравитацией. Свет, который испускается из вершины ускоряемого ящика, будет выглядеть смещенным в фиолетовую часть, если мы смотрим на него со дна ящика. Давайте проделаем некоторые вычисления, соответствующие малым скоростям. Время, за которое свет проходит от верха ящика до дна, составляет в первом приближении h/c, где h – высота ящика на рис. 7.3. В то же самое время дно ящика приобрело небольшую дополнительную скорость $v = gh/c$. Чистый эффект состоит в том, что приемник движется относительно излучателя, так что частота смещается

$$f_{\text{поглощ}} = f_{\text{испущ}}(1 + v/c) = f_{\text{испущ}}(1 + gh/c). \qquad (7.2.1)$$

Таким образом, приемник на дне получит фотон с частотой, отличной от частоты, с которой испускался фотон. Заметим, что это заключение не зависит от энергии $E = mc^2$ и существования энергетических уровней, что необходимо было постулировать в соответствии с аргументами, которые были приведены ранее. Это заключение основано на ожидаемом поведении классических объектов; вычисление следует из геометрии и кинематики и дает прямое физическое предсказание, следующее из постулата эквивалентности. Как и ранее, этот вывод не является парадоксом; часы выглядят более голубыми на вершине ящика, человек, живущий на вершине ящика, выглядит более голубым, чем человек, живущий на дне ящика. Аналогично предыдущему, мы можем вычислить сдвиг частоты для света, испускаемого человеком, живущим внизу. Так как в этом случае приемник удаляется от источника, человек, живущий внизу, выглядит краснее, когда его рассматривают сверху.

Один из способов описания этой ситуации состоит в том, чтобы сказать, что время течет быстрее на вершине ящика; течение времени различно при различных гравитационных потенциалах, так что течение времени не одинаково в различных частях нашего мира. Как велико это различие хода времени может быть в различных точках пространства? Для того, чтобы вычислить это различие, мы сравниваем ход времени с абсолютными временными интервалами, определенными через собственное время ds. Предположим, что имеется два события, происходящие на вершине, о которых сообщается, что они разделены временем dt, тогда

$$\phi = gh; \quad ds = dt(1 + \phi/c^2), \tag{7.2.2}$$

в пределе малых скоростей. Величина ϕ есть просто разность потенциалов между положением событий и точкой отсчета. Более точное вычисление дает нам выражение, которое может быть использовано при всех скоростях

$$ds = dt\sqrt{1 + 2\phi/c^2}. \tag{7.2.3}$$

Вновь мы должны напомнить, что мы не просто используем ньютоновские потенциалы в этом выражении; наше определение ϕ должно быть релятивистски точным.

7.3. Максимальные скорости хода часов в гравитационных полях

Теперь, поскольку мы заключили, что гравитационные эффекты приводят к тому, что часы идут быстрее в областях с более высоким потенциалом, мы можем поставить забавный вопрос. Мы знаем, что часы должны идти быстрее, если мы перемещаем их вверх от поверхности Земли. С другой стороны, когда мы перемещаем их, они должны замедляться, вследствие влияния эффектов специальной теории относительности. Вопрос состоит в том, как мы должны были бы передвигать часы вверх и вниз вблизи поверхности Земли, чтобы сделать эту разницу по времени как можно больше? Для простоты рассмотрим эту задачу в предположении, что Земля имеет однородное гравитационное поле и рассматривается движение только в одном

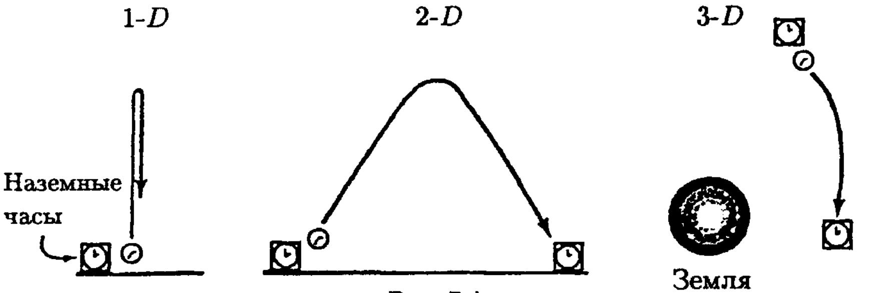

Рис. 7.4.

измерении. Ясно, что эта задача имеет решение. Если мы движемся очень быстро, со скоростью света, часы не обгоняют наземные часы вовсе, и мы получаем время меньшее, чем время наземных часов. Если мы поднимаем часы на очень небольшую высоту и держим их там, то будет некоторый избыток времени по сравнению с наземными часами. Ясно, что имеется некоторый оптимальный путь движения часов так, чтобы этот избыток времени был наибольшим для заданного интервала времени на Земле. Правила состоят в том, что мы должны принести часы назад для того, чтобы сравнить их с показаниями наземных стационарных часов.

Мы дадим ответ немедленно, хотя было бы хорошим упражнением проделать вычисление во всех деталях. Для того, чтобы сделать так, чтобы движущиеся часы ушли вперед наибольшим образом в заданный интервал наземного времени, скажем за один час, мы должны бросить их вверх с такой скоростью, чтобы они свободно падали все время и вернулись назад ровно через один час. См. рис. 7.4. Задача будет более сложной, если мы попытаемся проделать это в большем числе измерений, однако получается тот же самый ответ; если мы хотим сделать так, чтобы часы вернулись назад, но на другое место на Земле, мы должны осуществить движение часов по баллистической траектории. Такой же самый ответ получается для случая неоднородного гравитационного поля. Если мы должны "выстрелить" часами с одного спутника Земли на другой, то истинная орбита часов это та, которая соответствует максимальному собственному времени.

При работе с подобными задачами возникает некоторое беспокойство, поскольку мы не сделали точных определений. Например, решения типа свободного падения не обязательно являются единственными; задача о баллистическом движении "пушечного ядра" в общем случае имеет два решения, что означает, что два значения угла и два значения начальной скорости будут давать максимум (орбита спутника может проходить длинный путь вокруг Земли). Тем не менее, любое из этих решений соответствует максимуму времени пролета для движущихся часов. Имеется ли для этих траекторий относительный максимум или абсолютный не столь важно для наших целей, но что важно, так это то, что эти решения наводят на мысль о том, как мы можем получить механику из вариационного принципа.

Чтобы понять значение максимальной величины времени пролета, мы можем рассмотреть, что происходит в пределе малых скоростей. Время пролета есть интеграл от ds, который представляет скорость тикания этих часов. В нерелятивистском пределе интеграл, который должен быть максимизирован, есть

$$\int ds = \int_{t_0}^{t_1} dt \left(1 + \frac{\phi}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} + \ldots\right), \tag{7.3.1}$$

при

$$\sqrt{1 - v^2/c^2} \approx 1 - \frac{v^2}{2c^2}.$$

Первый член интегрируется по разности времени в заданной системе отсчета $(t_1 - t_0)$. Другие два члена могут быть переписаны, чтобы иметь вид, который должен быть очень привычным, умножая на массу частицы и меняя знак, получим

$$\int ds = (t_1 - t_0) - \frac{1}{mc^2} \int_{t_0}^{t_1} dt \left(\frac{1}{2}\, mv^2 - m\phi\right). \tag{7.3.2}$$

Для того, чтобы максимизировать это выражение для фиксированной величины интервала времени $(t_1 - t_0)$, мы берем минимум интеграла в правой части последнего соотношения. Но этот интеграл есть не что иное, как классическое действие для частицы массы m в гравитационном потенциале ϕ. Мы видим, что требование того, что собственное время должно иметь максимальное значение, эквивалентно принципу наименьшего действия в классическом пределе.

Эти результаты наводят нас на мысль о том, как мы могли бы получить закон механики (эквивалентный, грубо говоря, второму закону Ньютона), который бы был релятивистским. Этот принцип состоит в том, что вариация $\int ds$ должна быть равна нулю, т.е.

$$\delta \int_1^2 ds = 0. \tag{7.3.3}$$

Именно Эйнштейн высказал гипотезу, что этот принцип будет описывать движение в присутствии гравитационных полей. С использованием этого принципа была решена задача нахождения уравнений движения, задаваемого этим полем. Оставшаяся проблема сейчас состоит в том, чтобы связать потенциал ϕ, который появляется в этом выражении, с окружающей средой. Это было огромной проблемой до Эйнштейна. Как мы можем получить правильное выражение для потенциала ϕ? Что происходит, если мы используем неверную теорию гравитации, как если бы мы работали в системе, в которой имеются центробежные силы, но мы не знали бы этого? Мы видели, что гравитационные силы запутанно смешены с силами инерции, так что мы не можем сделать универсально правильного разделения на эти две силы.

Догадка Эйнштейна и состояла в том, что в подобных ситуациях не должно иметь значения, рассматриваем ли мы универсально правильное значение потенциала ϕ или нет; если этот потенциал корректно определен, то описание физики должно быть независимо от того, каким частным образом мы разделили инерциальные и гравитационные эффекты. Таким образом, для того, чтобы сконструировать формулу для ϕ, которая бы удовлетворяла этому свойству, мы должны изучить очень тщательно способ, пользуясь которым, интервал собственного времени ds выражается в различных координатных системах, когда мы применяем преобразования такие, которые мы символически записывали как "гравитация$'$ = гравитация + ускорение". Такое изучение может позволить нам построить выражение для ds, которое является инвариантным при всех возможных преобразованиях.

7.4. Собственное время в общих координатах

Для того, чтобы получить формулу Эйнштейна для $(ds)^2$, мы должны рассмотреть системы отсчета, которые не только ускоряются, но также находятся под действием сил, которые искажают их форму произвольным образом. Мы хотим получить общую формулу для координат, которая аналогична определению координатных систем, вращающихся друг относительно друга

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\omega t + y\sin\omega t, \quad & z' &= z, \\ y' &= y\cos\omega t - x\sin\omega t, \quad & t' &= t. \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

Мы описываем ускорение общего вида и растяжение произвольного вида, устанавливая, как каждая из четырех координат одной системы зависит от всех координат другой системы

$$\begin{aligned} x &= x(x', y', z', t'), \quad & z &= z(x', y', z', t'), \\ y &= y(x', y', z', t'), \quad & t &= t(x', y', z', t'). \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

Рассмотрим вначале ситуацию, которая возникает, когда $\phi = 0$. В этом случае мы знаем, что собственное время в нескрученной системе есть просто (здесь мы положим $c = 1$)

$$(ds)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \tag{7.4.3}$$

Для того, чтобы описать собственное время в штрихованных координатах, мы просто переписываем дифференциалы следующим образом:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} dx'^\alpha, \quad (ds)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{7.4.4}$$

Это определяет метрический тензор $g'_{\alpha\beta}$, который содержит описание длины дуги ds в произвольным образом скрученной и ускоренной системе

$$(ds)^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} dx'^\alpha dx'^\beta = g'_{\alpha\beta} dx'^\alpha dx'^\beta. \tag{7.4.5}$$

Заметим, что $g'_{\alpha\beta}$ представляет десять функций координат (x', y', z', t'), так как имеется десять билинейных произведений $dx^\alpha dx^\beta$. Метрический тензор – симметричен. Как только мы имеем эти десять функций точно определенными, то нахождение траекторий, для которых собственное время достигает максимума, должно будет представлять собой чисто математическое упражнение.

Что же происходит, когда гравитация не равна нулю? В простом случае, который мы рассматривали в предыдущем разделе, мы нашли, что собственное время задается чем-то вроде следующего соотношения

$$(ds)^2 = (1 + 2\phi/c^2)(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2. \tag{7.4.6}$$

Это выражение только слегка отличается от случая, когда гравитационное поле равно нулю. Именно Эйнштейну принадлежала идея о том, что полное описание гравитации могло бы быть всегда определено метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, таким как

$$(ds)^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{7.4.7}$$

Случай нулевого поля соответствует частной простой форме для метрического тензора $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$. При изменении координатной системы новый метрический тензор задается соотношением:

$$g'_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta} g_{\mu\nu}. \tag{7.4.8}$$

Как и ранее, движение частиц задается требованием, чтобы собственное время достигало максимального значения на траектории движения. Если возможно, используя некоторый разумный способ выбора преобразований, привести тензор к виду $g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, тогда мы можем сделать заключение, что гравитационного поля нет и что также нет и ускорения. Но это не может быть сделано в общем случае, так как общий тензор $g_{\alpha\beta}$ представляет десять предположительно независимых функций, и только четыре функции могут быть точно определены при преобразовании координат (7.4.2). Только при очень специфических условиях ускорения могут устранить все недиагональные члены всюду и привести этот тензор к виду $\eta_{\mu\nu}$. Если же на самом деле имеется некоторое вещество в окружающей среде, приведение этого тензора к виду $\eta_{\alpha\beta}$ невозможно. В этом случае все возможные тензоры $g_{\alpha\beta}$, связываемые соотношениями (7.4.8), будут эквивалентны, так как ни один из них не приводит к очень простым выражениям для $(ds)^2$.

Каковы же наши успехи в изучении характера описания гравитационных сил? В ньютоновской теории соответствующее положение есть утверждение, что сила задается градиентом скалярной функции

$$\begin{aligned} &\text{Ньютоновская гравитация}: \quad m\ddot{x} = F_x, \quad F_x = -\nabla\phi, \\ &\text{Теория Эйнштейна}: \quad \delta\int ds = 0, \quad (ds)^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \tag{7.4.9}$$

Вторая часть теории соответствует точному определению того, как потенциалы (ϕ или $g_{\mu\nu}$) связаны с веществом. В ньютоновской теории мы имеем

$$\Delta\phi = 4\pi G\rho. \tag{7.4.10}$$

В конце концов мы придем к точному определению тензора $g_{\mu\nu}$, выраженному через характеристики вещества. Основная идея состоит в том, что поскольку материя есть физическая категория, в то время как системы координат нет, вещество должно быть описано таким образом, чтобы результаты решения уравнения движения не зависели от какого-либо специального выбора системы координат, тем самым ожидается, что имеющие физический смысл свойства тензора $g_{\mu\nu}$ должны быть инвариантными величинами при произвольных преобразованиях.

7.5. Геометрическая интерпретация метрического тензора

Тензор $g_{\mu\nu}$ может иметь геометрическую интерпретацию. Для приобретения необходимой интуиции мы будем изучать вкратце значение метрического тензора в случае двух измерений, чтобы понять какие инварианты включены в теорию. В случае однородных гравитационных полей мы видели, что тензор $g_{\mu\nu}$ описывает, как масштаб времени отличается при различных положениях точки в пространстве. В более широком смысле этот тензор представляет, как масштабы меняются от точки к точке не только во времени, но также и при изменении пространственных координат. В ортогональных декартовых координатах двумерная длина дуги ds задается следующим соотношением

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2. \tag{7.5.1}$$

Если использовать на плоскости полярные координаты, то длина дуги задается соотношением:

$$(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2. \tag{7.5.2}$$

Очевидно, что не имеет значения, какие символы мы используем для координат, и физика на плоскости должна быть одинакова независимо от того, используем мы декартовы координаты или полярные координаты для описания геометрии на плоскости. Это означает, что если мы находим, что описание длины дуги в некоторой системе, которую мы выбрали, корректно задается соотношением:

$$(ds)^2 = y^2(dx)^2 + (dy)^2, \tag{7.5.3}$$

нет глубокого смысла в том, что кажется, будто длина x меняется при изменении координаты y, поскольку простое координатное преобразование сохраняет декартово выражение для длины дуги (7.5.1).

Теперь рассмотрим более интересный случай. Представим себе, что мы – жуки, ползающие по полу, который, как мы всегда предполагали, замощен квадратными кафельными плитками, и всю нашу жизнь мы думали, что геометрия пола правильно задается подсчетом плиток и использованием евклидовского правила (7.5.1), что интервалы dx или dy соответствуют величине длины плитки. Но некоторые остроумные жуки начали проверять это, используя линейки, и после серии измерений пришли к результату, что измеренные длины дуг соответствуют количеству плиток следующим образом:

$$(ds)^2 = \frac{(dx)^2 + (dy)^2}{1 + ar^2}, \tag{7.5.4}$$

где $r^2 = x^2 + y^2$. Предположим, что эти остроумные жуки очень тщательно измеряли отношение длины окружности к величине радиуса круга, прикладывая свои линейки вдоль кривых с постоянным значением r и от центра круга вдоль одной из осей. Их результаты дали бы следующие значения:

$$\text{Длина окружности} = \int ds = \int_0^{2\pi} \frac{r\ d\theta}{(1 + ar^2)} = \frac{2\pi r}{(1 + ar^2)},$$

$$\text{Радиус круга} = \int_0^r ds\bigg|_{y=0} = \int_0^r \frac{dx}{(1 + ax^2)} = b \operatorname{arctg}\left(\frac{r}{b}\right) = R, \tag{7.5.5}$$

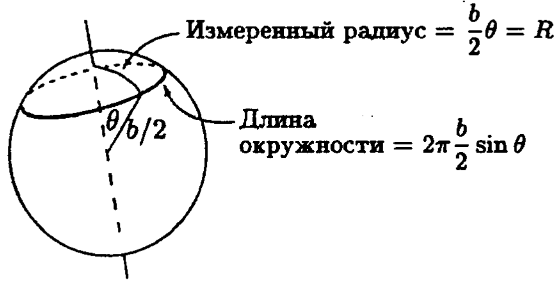

Рис. 7.5.

где $b^2 = 1/a$. Экспериментальный результат для отношения длины окружности к радиусу должен был бы давать в этом случае

$$\frac{1}{R}\,\frac{2\pi b\ \mathrm{tg}(R/b)}{1+\mathrm{tg}^2(R/b)} = 2\pi\,\frac{\sin(R/b)}{(2R/b)}. \tag{7.5.6}$$

Это отношение становится равным 2π только в пределе, когда радиус окружности стремится к нулю. Именно это измеряемое соотношение и является существенным физическим результатом.

Эта частная модель, которую мы обсудили, имеет простую геометрическую интерпретацию, но мы снова подчеркиваем, что именно экспериментальные результаты очень важны и они полностью зависят от правильной формулы для длины дуги; и вовсе не имело бы значения, что мы не можем привести простую формулу геометрического смысла, который мы можем легко представить.

Мы можем сказать, что все это время жуки живут на поверхности сферы, не зная этого. Теперь, когда мы предположили это, мы легко понимаем, почему наши измерения окружностей давали частный результат, приведенный в соотношении (7.5.6). Если сфера имеет радиус $(b/2)$, то результат, данный соотношением (7.5.6), представляет отношение длины окружности круга к длине вдоль поверхности меридиана, как показано на рис. 7.5.

Наша предыдущая точка зрения на гравитацию может быть сравнима с той, которая могла бы проводится более консервативными жуками. Кафельные плитки являются "реальными" квадратами, но линейки изменяются, если мы двигаем их от места к месту, поскольку имеется поле, которое может привести к этому эффекту. Наша более новая геометрическая точка зрения будет состоять в том, что мы не можем определять "кафельные плитки", как "реальные" квадраты; мы живем в мире, который, вообще говоря, неевклидов, имеет кривизну, которая измеряется проведением подходящих экспериментов. Нет нужды думать о процессах, как происходящих в пространстве, которое есть истинно евклидово, так как нет ничего физического, что могло бы быть даже измерено в этом воображаемом пространстве. Кафельные плитки просто представляют нанесение координатных меток, и любое другое нанесение меток может быть также произведено, как и предыдущее.

7.6. Кривизна в двух и четырех измерениях

Инвариантной величиной, которая характеризует геометрию способом, не зависящим от специального выбора системы координат, является кривизна. Очень просто представить себе смысл кривизны, когда мы рассматриваем двумерную поверхность: плоское неискривленное пространство, такое как плоскость, или искривленное пространство, такое как кривая поверхность. Хотя в нашей последующей работе нам понадобится работать с кривизной аналитически, сейчас следует немного поработать с двумерной геометрией, которую мы можем очень просто представить; определения кривизны в более высоких измерениях есть точные аналоги определения кривизны поверхности.

В общем случае длина дуги на двумерной поверхности задается соотношением

$$(ds)^2 = g_{11}(dx)^2 + 2g_{12}\,dxdy + g_{22}(dy)^2. \tag{7.6.1}$$

Хотя очевидно, что три функции g_{ab} включены в это выражение, инвариантная геометрия определяется только одной функцией координат; оказывается, что мы имеем определенную свободу в выборе координат, например, мы можем сделать их ортогональными; мы обладаем достаточной свободой для того, чтобы наложить два условия на функции g_{ab}, для этого у нас есть две функции, с помощью которых мы можем делать координатные преобразования. В частности, всегда можно выбрать координаты таким образом, что

$$1.\quad g_{12} = 0, \qquad 2.\quad g_{22} = g_{11}.$$

Это означает, что для целей изучения геометрических измерений на двумерной поверхности наиболее общим выражением для длины дуги является следующее соотношение:

$$(ds)^2 = f(x,y)\left((dx)^2 + (dy)^2\right). \tag{7.6.2}$$

С одной точки зрения, функция $f(x,y)$ представляет собой множитель, на который меняются линейки, когда мы движемся по поверхности. С другой точки зрения, она очевидно определяет кривизну пространства.

Забавный пример физической ситуации, которая в точности соответствует этим геометриям, придуман одним из студентов Робертсона. Представим себе, что человек делает измерения с помощью линейки на раскаленной пластине, которая в некоторых местах горячее, чем в других. Линейка растягивается или сжимается в зависимости от того, где делаются измерения, в более горячих или более холодных областях на плоскости; очевидно, что соответствующая функция $f(x, y)$ определяется локальной температурой и коэффициентом теплового расширения линейки.

Локальная кривизна поверхности в точке может быть определена с помощью некоторого математического критерия, включающего в себя предельный случай измерений, проделываемых со все более и более маленькими объектами. Мы могли бы, например, выбрать для сравнения отношения длины окружности к радиусу, отношения площадей кругов к квадратам радиусов; для случая сферических поверхностей эти отношения отличаются от тех, которые получаются на плоской поверхности, на множители $(\sin\theta)/\theta$, где θ – отношение измеряемого радиуса к радиусу сферы. В пределе все меньших и меньших кругов эта величина отличается от единицы на величину, пропорциональную площади круга. Этот коэффициент пропорциональности есть $1/R^2$ для сферы (умноженный на 3). Это число (коэффициент, характеризующий изменение площади при отклонении длины окружности от 2π) подходит для описания локальной кривизны, известной как Внутренняя Кривизна или также как Гауссова Средняя Кривизна Площади сферической поверхности, поскольку математика всех этих понятий восходит к Гауссу.

Мы можем легко рассмотреть другие кривые поверхности. Например, легко увидеть, что цилиндрическая поверхность имеет нулевую кривизну, так как цилиндрическая поверхность может быть развернута на плоскость без растяжения, очевидно, что отношение длины окружности к радиусу должно быть в точности равно 2π. Для более сложных случаев, если поверхности гладкие, они должны выглядеть как или параболоиды, или как гиперболические параболоиды по инфинитезимальным областям, в которых мы определили внутреннюю кривизну.

Эти поверхности описываются двумя линейными параметрами, радиусами кривизны в двух перпендикулярных плоскостях. В этом случае внутренняя кривизна определяется соотношением $1/(R_1 R_2)$. Эта величина положительная, если поверхность параболическая, или отрицательная, если поверхность – гиперболический параболоид. Мы видим, что эта величина дает правильное значение кривизны для специальных случаев сферических поверхностей и цилиндрических поверхностей; для сферы оба радиуса равны; для цилиндра один радиус равен бесконечности.

Кривизна четырехмерного пространства будет определяться аналогичным математическим критерием. Тем не менее, мы едва ли можем ожидать, что мы окажемся в состоянии мысленно построить такие простые картинки и мы должны будем полагаться главным образом на аналитические методы, поскольку наша интуиция вероятно будет нас обманывать. Очень трудно думать о четырехмерном пространстве специальной теории относительности, даже обладая хорошей интуицией, я считаю, что очень трудно наглядно представить то, что достаточно близко к нему, поскольку имеется знак минус в сигнатуре метрики. А представить себе такое пространство с кривизной было бы еще труднее. Кривую двумерную поверхность удобно представлять, как кривую поверхность, погруженную в трехмерное пространство. Но аналогичное описание для кривизны трехмерного пространства требует концептуального погружения в пространство с шестью измерениями, а проделывая эту процедуру для четырех измерений, мы должны думать о четырехмерном пространстве, которое погружено в десятимерный мир. Таким образом, кривизна пространства-времени значительно сложнее, чем кривизна поверхности.

7.7. Число величин, инвариантных под действием преобразований общего вида

В четырехмерной геометрии имеются двадцать коэффициентов, которые описывают кривизну способом, аналогичным тому, которым одна величина $1/(R_1R_2)$ описывает внутреннюю кривизну двумерной поверхности. Эти двадцать величин определяют физически значимые свойства тензора $g_{\mu\nu}$; то же, что мы должны сделать, так это упростить тензор $g'_{\mu\nu}$ разумным выбором координат, таким же способом, каким стало возможным определить геометрию двух измерений одной функцией $f(x, y)$ в соотношении (7.6.2).

Мы видели, что вообще говоря, мы не можем устранить гравитационные поля суперпозицией ускорений, за исключением одной точки. Так как кривизна может быть задана точным определением того, что происходит в инфинитезимальной области вокруг заданной точки, целесообразно изучить соответствующим образом в какой степени может быть упрощен тензор $g_{\mu\nu}$. По аналогии с двумерным случаем мы можем полагать, что возможно выбрать координаты (называемые нормальными координатами Римана) таким образом, что пространство вокруг этой точки – плоское, за исключением членов второго порядка малости от расстояния до этой точки. Другими словами, кривая поверхность отрывается от плоскости, которая является касательной к этой поверхности, причем отклонение поверхности от плоскости характеризуется величиной, которая квадратична от значений координат, измеряемых от точки касания; мы ожидаем, что аналогичная ситуация имеет место в четырехмерном пространстве.

Давайте подсчитаем, сколько величин мы можем точно определить при преобразованиях и насколько мы можем упростить $g'_{\mu\nu}$, если мы делаем разложение в ряд функции $g'_{\mu\nu}$ в окрестности некоторой точки x_0. Пусть любая точка в пространстве есть x, тогда имеется следующее разложение в ряд Тейлора функции $g'_{\mu\nu}$ в окрестности точки x_0

$$g'_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x_0) + g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau) + \frac{1}{2}\, g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0)(x^\tau - x_0^\tau)(x^\sigma - x_0^\sigma) + \ldots \quad (7.7.1)$$

Мы должны вычислить метрический тензор $g'_{\mu\nu}(x_0)$ и его производные согласно правилу, выраженному соотношением (7.4.8), это приводит к

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta}(x_0) &= \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\cdot g_{\mu\nu}\right]_{x_0}, \\ g'_{\alpha\beta,\tau}(x_0) &= \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\cdot g_{\mu\nu,\tau}\right]_{x_0} + 2\left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha\partial x'^\tau}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\cdot g_{\mu\nu}\right]_{x_0}, \\ g'_{\alpha\beta,\tau\sigma}(x_0) &= \left[\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\cdot g_{\mu\nu,\tau\sigma}\right]_{x_0} + 2\left[\frac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha\partial x'^\tau\partial x'^\sigma}\cdot\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}\cdot g_{\mu\nu}\right]_{x_0} \\ &+ \text{другие члены.} \end{aligned} \quad (7.7.2)$$

Мы видим, что для упрощения $g'_{\mu\nu}$ мы рассматриваем только разложение до второго порядка малости, мы должны выбрать наши преобразования таким образом, чтобы частные производные, появляющиеся в соотношениях (7.7.2), имели определенные значения. Мы можем точно определить следующие величины в нашем преобразовании

1. Шестнадцать величин $\left[\dfrac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha}\right]_{x_0}$.
2. Сорок величин $\left[\dfrac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha\partial x'^\beta}\right]_{x_0}$. (7.7.3)
3. Восемьдесят величин $\left[\dfrac{\partial^3 x^\mu}{\partial x'^\alpha\partial x'^\beta\partial x'^\gamma}\right]_{x_0}$.

(Заметим, что порядок производных не имеет значения.) Другая сторона медали состоит в том, что количество величин и производных метрического тензора является следующим:

$$
\begin{aligned}
&\text{1. Имеется 10 компонент} \quad g'_{\mu\nu}(x_0).\\
&\text{2. Имеется сорок первых производных} \quad g'_{\mu\nu,\tau}(x_0). \qquad (7.7.4)\\
&\text{3. Имеется сто вторых производных} \quad g'_{\mu\nu,\tau\sigma}(x_0).
\end{aligned}
$$

Сначала мы можем попытаться сделать так, чтобы выполнялось равенство $g'_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu}$. Это соотношение включает в себя только первые производные $[\partial x^\mu/\partial x'^\alpha]_{x_0}$. У нас есть 10 условий, которым необходимо удовлетворить с помощью 16 свободных параметров. Мы можем легко удовлетворить этим условиям, и у нас останется еще свободными 6 степеней свободы. Эти шесть параметров являются параметрами специальной теории относительности, преобразований Лоренца и вращений (вектор скорости, ось вращения и угол), которые могут определять преобразования, оставляющие $\eta_{\mu\nu}$ неизменным. Далее мы можем сделать так, чтобы все 40 производных $g'_{\mu\nu,\tau}(x_0)$ в точности обращались в нуль, используя сорок величин

$$\left[\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\alpha \partial x'^\beta}\right]_{x_0}.$$

Производная $g_{\mu\nu}$ появляется в уравнении движения для минимального действия $\int ds$. То, что эти производные могут в некоторой точке обращаться в нуль, означает, что все гравитационные силы могут быть устранены в любой выделенной точке пространства и в некоторый момент времени выбором подходящих ускорений.

Получившийся в конце концов результат состоит в том, что остаются двадцать линейных комбинаций вторых производных типа $g'_{\mu\nu,\tau\sigma}$, которые не могут быть устранены таким преобразованием. Это те величины, которые должны описывать детальное поведение приливных сил. В следующей лекции мы приступим к построению этих двадцати величин через компоненты тензора $g_{\mu\nu}$, заданные в какой бы то ни было системе координат, которую мы выбрали для исходного анализа.