Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ линейные, то их сумма $\hat{A}+\hat{B}$ и произведение $\hat{A}\hat{B}$ есть также линейные операторы.

2. Возвести в квадрат оператор $\frac{d}{dx}+x$.

3. Возвести в квадрат операторы $x\frac{d}{dx}$ и $\frac{d}{dx}x$. Сравнить результаты их действия.

4. Найти результаты действия операторов $\frac{d^2}{dx^2}x^2$ и $\left(\frac{d}{dx}x\right)^2$.

5. Найти результат действия оператора $x^2\cdot\frac{d}{dx}\cdot\frac{1}{x}$.

6. Найти коммутатор $\frac{d}{dx}x-x\frac{d}{dx}$.

7. Найти коммутатор оператора $\frac{\partial}{\partial x}$ и $f(x,y,z)$.

8. Найти коммутатор оператора x и оператора Лапласа Δ.

9. Для операторов $\hat{L}$ и $\hat{M}$, удовлетворяющих соотношению $\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}=1$, найти $\hat{L}\hat{M}^2-\hat{M}^2\hat{L}$.

10. Найти оператор, переводящий $\Psi(x)$ в $\Psi(x+a)$.

11. Выразить оператор параллельного переноса $\hat{T}_a\Psi(\vec{r})=\Psi(\vec{r}+\vec{a})$ через оператор импульса.

12. Найти оператор поворота пространства на угол α, переводящий $\Psi(\varphi)$ в $\Psi(\varphi+\alpha)$, где φ - угловая переменная.

13. Найти результат действия оператора $e^{k\frac{\partial}{\partial x}}$ на функцию $\Psi(x)$.

14. Является ли оператор комплексного сопряжения $\left(\hat{A}\Psi = \Psi^*\right)$ линейным?

15. Чему равен оператор комплекно-сопряженный оператору комплексного сопряжения? Является ли оператор комплексного сопряжения эрмитовым?

16. Показать, что сумма произвольного оператора $\hat{A}$ и его комплексно сопряженного оператора $\hat{A}^*$ есть эрмитов оператор.

17. Показать, что если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ эрмитовы, то и операторы $\hat{A}+\hat{B}$ и $\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}$ также эрмитовы.

18. Является ли оператор $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}$ эрмитовым?

19. Проверить самосопряженность оператора $\hat{A} = i\frac{\partial}{\partial y}$.

20. Найти оператор, эрмитово-сопряженный оператору $\hat{T}_a = e^{a\frac{d}{dx}}$.

21. Найти оператор, эрмитово-сопряженный оператору $\hat{T}_a = e^{(\vec{a},\nabla)}$.

22. Найти оператор, эрмитово-сопряженный произведению операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

23. Показать эрмитовость операторов $\hat{p}_x$, $\hat{p}_x^2$, $\hat{H}$.

24. Доказать эрмитовость оператора $\hat{L}^2$, если операторы $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ эрмитовы.

25. Доказать, что если операторы $\hat{A}_i$ коммутируют с оператором $\hat{B}$, то с ним коммутирует и оператор $\hat{A}^2 = \sum \hat{A}_i^2$.

26. Проверить правила коммутации $\left[\hat{L}_x \hat{L}_y\right] = i\hbar \hat{L}_z$.

27. Доказать, что оператор $\hat{L}^2$ коммутирует с оператором кинетической энергии $\hat{T}$.

28. Найти собственные функции и собственные значения оператора $\frac{d}{dx}$.

29. Найти собственные функции и собственные значения оператора $i\frac{d}{dx}$.

30. Найти собственные функции и собственные значения оператора $x+\frac{d}{dx}$.

31. Найти собственные функции и собственные значения оператора $\frac{d}{d\varphi}$.

32. Найти собственные функции оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$ для $\Psi_A = \sin 3x$.

33. Найти собственные значения и нормированные собственные функции операторов $\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ и $\hat{L}_z^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$.

34. Определить среднее значение механической величины, описываемой оператором $\hat{L}_z^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ в состоянии $\Psi(\varphi) = A\sin^2\varphi$.

Решения некоторых задач

1. Пусть операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ - линейные, а $\Psi = c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$. В силу линейности операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$

$$\hat{A}\Psi = \hat{A}(c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2) = \hat{A}(c_1\Psi_1) + \hat{A}(c_2\Psi_2) = c_1\hat{A}\Psi_1 + c_2\hat{A}\Psi_2,$$

$$\hat{B}\Psi = \hat{B}(c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2) = \hat{B}(c_1\Psi_1) + \hat{B}(c_2\Psi_2) = c_1\hat{B}\Psi_1 + c_2\hat{B}\Psi_2.$$

Складывая правые и левые части равенств и приводя подобные, получим:

$$\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\Psi=\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\left(c_1\Psi_1+c_2\Psi_2\right)=\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\left(c_1\Psi_1\right)+\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\left(c_2\Psi_2\right)=$$
$$=c_1\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\Psi_1+c_2\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\Psi_2,$$

что доказывает линейность оператора $\left(\hat{A}+\hat{B}\right)$. Линейность оператора $\hat{A}\hat{B}$ доказывается подобным образом.

2. Возвести в квадрат оператор $\hat{A}=\frac{d}{dx}+x$, это значит найти результат последовательного действия двух таких операторов на функцию Ψ.

$$\left(\frac{d}{dx}+x\right)^2\Psi=\left(\frac{d}{dx}+x\right)\cdot\left(\frac{d}{dx}+x\right)\Psi=\left(\frac{d}{dx}+x\right)\left(\frac{d\Psi}{dx}+x\Psi\right)=$$

$$=\frac{d^2\Psi}{dx^2}+\Psi+x\frac{d\Psi}{dx}+x\frac{d\Psi}{dx}+x^2\Psi=\frac{d^2\Psi}{dx^2}+2x\frac{d\Psi}{dx}+\left(1+x^2\right)\Psi.$$

Таким образом

$$\hat{A}^2=\frac{d^2}{dx^2}+2x\frac{d}{dx}+\left(1+x^2\right).$$

Задачи **3**, **4** и **5** решаются аналогично.

6. $\frac{d}{dx}x-x\frac{d}{dx}=1$, где 1 - единичный оператор. Для решения этой задачи следует воспользоваться результатами решения задачи 3.

7. $\left[\frac{\partial}{\partial x},f(x,y,z)\right]=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$.

8. $[\Delta,x]=2\frac{\partial}{\partial x}$.

9. Пусть $\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}=1$. Для определения коммутатора

$$\hat{L}\hat{M}^2-\hat{M}^2\hat{L} \qquad (*)$$

надо так дополнить это выражение, чтобы при приведении подобных членов получился заданный коммутатор $\left[\hat{L},\hat{M}\right]=1$. Прибавим и вычтем из (*) произведение операторов $\hat{M}\hat{L}\hat{M}$

$$\hat{L}\hat{M}^2-\hat{M}^2\hat{L}+\hat{M}\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}\hat{M}=\left(\hat{L}\hat{M}^2-\hat{M}\hat{L}\hat{M}\right)+\left(\hat{M}\hat{L}\hat{M}-\hat{M}^2\hat{L}\right)=$$

$$=\left(\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}\right)\hat{M}+\hat{M}\left(\hat{L}\hat{M}-\hat{M}\hat{L}\right)=2\hat{M}.$$

10. Нам дан оператор $\hat{T}_a$ осуществляющий перенос вдоль оси x на величину a, т.е. $\hat{T}_a\Psi(x)=\Psi(x+a)$.

Полагая a малым разложим $\Psi(x+a)$ в ряд по степеням a.

$$\hat{T}_a\Psi(x)=\Psi(x+a)=\Psi(x)+a\frac{d\Psi(x)}{dx}+\frac{a^2}{2!}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\frac{d^n\Psi(x)}{dx^n}.$$

Откуда

$$\hat{T}_a=1+a\frac{d}{dx}+\frac{a^2}{2!}\frac{d^2}{dx^2}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}.$$

Сравнивая полученное выражение с разложением

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, получим $\hat{T}_a=e^{a\frac{d}{dx}}$.

11. $\hat{T}_{\vec{a}}=e^{(\vec{a},\nabla)}=e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{a},\hat{p})}$, так как $\hat{p}=\frac{\hbar}{i}\nabla$ или $\nabla=\frac{i}{\hbar}\hat{p}$.

12. $\hat{T}_\alpha=e^{\alpha\frac{d}{d\varphi}}$.

13. Задача, обратная задаче 10, если положить $a=k$.

14. Да.

15. Оператор комплексного сопряжения $\hat{A}$ удовлетворяет равенству $\hat{A}\Psi=\Psi^*$. Помножим это равенство слева ещё раз на

$\hat{A}$, тогда $\hat{A}\left(\hat{A}\Psi\right)=\hat{A}\Psi^{*}=\Psi$ или $\hat{A}^{2}\Psi=\Psi$, откуда

$$\hat{A}^{2}=1 \text{ или } \hat{A}=\hat{A}^{-1}.$$

Оператор комплексного сопряжения равен своему обратному оператору. С другой стороны

$$\left(\hat{A}\Psi\right)^{*}=\Psi^{**}=\Psi \text{ или } \hat{A}^{*}\Psi^{*}=\Psi.$$

Помножим последнее равенство слева на $\hat{A}$, тогда

$$\hat{A}\hat{A}^{*}\Psi^{*}=\hat{A}\Psi=\Psi^{*} \text{ или } \hat{A}\hat{A}^{*}\Psi^{*}=\Psi^{*},$$

откуда

$$\hat{A}\hat{A}^{*}=1.$$

Умножая последнее равенство слева на $\hat{A}^{-1}$, получим

$$\hat{A}^{-1}\hat{A}\hat{A}^{*}=\hat{A}^{-1}1=\hat{A}^{-1}=\hat{A}.$$

С другой стороны, левая часть этого равенства есть

$$\hat{A}^{-1}\hat{A}\hat{A}^{*}=1\hat{A}^{*}=\hat{A}^{*}.$$

Окончательно мы можем записать $\hat{A}^{*}=\hat{A}$, т.е. оператор комплексного сопряжения есть самосопряженный оператор.

Вопрос об эрмитовости оператора $\hat{A}$ можно решить используя равенство (3а) §1.

16. Для решения данной задачи докажем одну простую теорему:

Произвольный линейный оператор $\hat{L}$ можно представить в виде суммы

$$\hat{L}=\hat{M}+i\hat{N}, \tag{1}$$

где $\hat{M}$ *и* $\hat{N}$ *- эрмитовы операторы, т.е.* $\hat{M}^{*}=\hat{M}$, *а* $\hat{N}^{*}=\hat{N}$.

Допустим, что (1) возможно, тогда

$$\hat{L}^{*}=\hat{M}^{*}+\left(i\hat{N}\right)^{*}=\hat{M}^{*}-i\hat{N}^{*}=\hat{M}-i\hat{N}$$

или

$$\hat{L}^{*}=\hat{M}-i\hat{N}. \tag{2}$$

Складывая (1) и (2) получим:

$\hat{L}+\hat{L}^{*}=2\hat{M}$ или $\hat{M}=\frac{1}{2}\left(\hat{L}^{*}+\hat{L}\right)$.

Далее $\hat{M}^{*}=\frac{1}{2}\left(\hat{L}+\hat{L}^{*}\right)=\hat{M}$, т.е. $\hat{M}$ - эрмитов оператор.

Вычитая (2) из (1), получим:

$$\hat{N}=\frac{i}{2}\left(\hat{L}^{*}-\hat{L}\right),$$

тогда

$$\hat{N}^{*}=-\frac{i}{2}\left(\hat{L}-\hat{L}^{*}\right)=\frac{i}{2}\left(\hat{L}^{*}-\hat{L}\right)=\hat{N}$$ - эрмитов оператор.

Таким образом, сумма произвольного линейного оператора $\hat{L}$ и его комплексно сопряженного оператора $\hat{L}^{*}$ есть эрмитов оператор: $\hat{L}+\hat{L}^{*}=2\hat{M}$.

17. Если операторы $\hat{A}$ и $\hat{B}$ - эрмитовы, то

$\int\Psi_1^{*}\hat{A}\Psi_2dx=\int\Psi_2\hat{A}^{*}\Psi_1^{*}dx$, а $\int\Psi_1^{*}\hat{B}\Psi_2dx=\int\Psi_2\hat{B}^{*}\Psi_1^{*}dx$. (*)

Складывая правые и левые части равенств (*), получим:

$$\int\Psi_1^{*}\left(\hat{A}+\hat{B}\right)\Psi_2dx=\int\Psi_2\left(\hat{A}^{*}+\hat{B}^{*}\right)\Psi_1^{*}dx=\int\Psi_2\left(\hat{A}+\hat{B}\right)^{*}\Psi_1^{*}dx,$$

откуда следует эрмитовость оператора $\hat{A}+\hat{B}$.

Для выяснения эрмитовости оператора $\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}$ нам надо доказать справедливость равенства

$$\int\Psi_1^{*}\left(\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}\right)\Psi_2dx=\int\Psi_2\left(\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}\right)^{*}\Psi_1^{*}dx.$$

Итак

$$\int\Psi_1^{*}\left(\hat{A}\hat{B}+\hat{B}\hat{A}\right)\Psi_2dx=\int\Psi_1^{*}\hat{A}\hat{B}\Psi_2dx+\int\Psi_1^{*}\hat{B}\hat{A}\Psi_2dx.$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части

$$\int \Psi_1^* \hat{A}\hat{B}\Psi_2\, dx = \int \Psi_1^* \hat{A}\left(\hat{B}\Psi_2\right) dx = \left|\hat{B}\Psi_2 = \Psi_3\right| =$$
$$= \int \Psi_1^* \hat{A}\Psi_3\, dx = \int \Psi_3 \hat{A}^* \Psi_1^*\, dx$$

$$= \left|\hat{A}^*\Psi_1^* = \Psi_4^*\right| = \int \Psi_3 \Psi_4^*\, dx = \int \Psi_4^* \Psi_3\, dx = \int \Psi_4^* \hat{B}\Psi_2\, dx =$$
$$= \int \Psi_2 \hat{B}^* \Psi_4^*\, dx = \int \Psi_2 \hat{B}^* \hat{A}^* \Psi_1^*\, dx$$

Рассуждая подобным образом, мы можем показать, что
$\int \Psi_1^* \hat{B}\hat{A}\Psi_2\, dx = \int \Psi_2 \hat{A}^* \hat{B}^* \Psi_1^*\, dx$.

Таким образом мы показали, что если $\hat{L}_1 = \hat{A}\hat{B}$ и $\hat{L}_2 = \hat{B}\hat{A}$, то $\hat{L}_1^* = \left(\hat{A}\hat{B}\right)^* = \hat{B}^*\hat{A}^*$, а $\hat{L}_2^* = \left(\hat{B}\hat{A}\right)^* = \hat{A}^*\hat{B}^*$.

Тогда окончательно можно записать

$\int \Psi_1^* \left(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\right)\Psi_2\, dx = \int \Psi_2 \left(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\right)^* \Psi_1^*\, dx$, что доказывает эрмитовость оператора $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$.

18. Для доказательства эрмитовости оператора $\hat{A} = \dfrac{\partial}{\partial x}$ надо показать, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x} dx. \qquad (*)$$

При этом мы должны полагать, что $\Psi_1^*(\pm\infty) = \Psi_2(\pm\infty) = 0$.

Интегрируя по частям левую часть (*), получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_1^* \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} dx = \left|\Psi_1^* = u,\ \ du = \frac{d\Psi_1^*}{dx} dx,\ d\Psi_2 = v,\ \ v = \Psi_2\right| =$$

$$= \Psi_1^*\Psi_2\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \frac{d\Psi_1^*}{dx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_2 \left(-\frac{d\Psi_1}{dx}\right)^* dx.$$

Сравнивая с правой частью (*) получим $\left(\frac{d}{dx}\right)^* = -\frac{d}{dx}$.

Таким образом мы показали, что данный оператор $\hat{A} = \frac{\partial}{\partial x}$ не является эрмитовым.

19. Решается аналогично задаче 18.

20. Оператор, эрмитово сопряженный оператору $\hat{T}_a$ определится из равенства (3) §1

$$\int \Psi_1^*(x)\hat{T}_a\Psi_2(x)dx = \int \Psi_2(x)\hat{T}_2^*\Psi_1^*(x)dx, \qquad (1)$$

которое можно переписать так:

$$I = \int \Psi_1^*(x)\hat{T}_a\Psi_2(x)dx = \int \Psi_1^*(x)\Psi_2(x+a)dx. \qquad (2)$$

Сделаем замену переменной, положив $x' = x + a$.

Так как a мало, а интегрирование ведётся по всему пространству, замена переменной не скажется на пределах интегрирования.

$$I = \int \Psi_1^*(x'-a)\Psi_2(x')dx'. \qquad (3)$$

Очевидно, что

$$\Psi_1(x-a) = \hat{T}_{-a}\Psi_1(x)$$

и тогда правая часть (2) может быть записана как

$$I = \int \Psi_2(x)\left[\hat{T}_{-a}\Psi_1(x)\right]^* dx.$$

Сравнивая с правой частью (1) получим $\hat{T}_a^* = \hat{T}_{-a}$.

21. См. решение предыдущей задачи..

22. Решается способом, изложенным в задаче 17.

23. 1. Для выяснения вопроса об эрмитовости оператора $\hat{p}_x$ можно воспользоваться результатами решения задачи 19.

2. Для выяснения вопроса об эрмитовости оператора $\hat{p}_x^2$ можно воспользоваться результатами решения задачи 17, поло-

жив $\hat{A} = \hat{B} = \hat{p}_x$.

3. Оператор Гамильтона есть функция от эрмитова оператора $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ и оператора $\hat{U}(x, y, z)$, который тоже эрмитов, в силу вещественности функции $U(x, y, z)$. Оператор Гамильтона, таким образом, является эрмитовым оператором.

24. Если операторы $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ эрмитовы, то и оператор $\hat{L}^2$ эрмитов, так как является функцией эрмитовых операторов.

25. Пусть $\hat{A}_i\hat{B} - \hat{B}\hat{A}_i = 0$, тогда

$$\hat{A}^2\hat{B} - \hat{B}\hat{A}^2 = \sum\left(\hat{A}_i^2\hat{B} - \hat{B}\hat{A}_i^2\right) = \sum\left(\hat{A}_i^2\hat{B} - \hat{B}\hat{A}_i^2 + \hat{A}_i\hat{B}\hat{A}_i - \hat{A}_i\hat{B}\hat{A}_i\right) =$$

$$= \sum\left[\hat{A}_i\left(\hat{A}_i\hat{B} - \hat{B}\hat{A}_i\right) + \left(\hat{A}_i\hat{B} - \hat{B}\hat{A}_i\right)\hat{A}_i\right] = 0.$$

Таким образом $\hat{A}^2\hat{B} - \hat{B}\hat{A}^2 = 0$ и операторы $\hat{A}^2$ и $\hat{B}$ коммутируют.

26. См. §5.

27. Оператор кинетической энергии $\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta$ зависит только от радиус вектора r, оператор квадрата момента импульса (в сферических координатах) $\hat{L}^2 = -\hbar^2\Delta_{\theta,\varphi}$ зависит только от углов θ, φ и поэтому не действует на функции зависящие от r. В силу сказанного выше $\left[\hat{T}, \hat{L}^2\right] = 0$.

28. Составим уравнение для собственных функций

$$\frac{d\Psi}{dx} = \lambda\Psi \text{ или } \frac{d\Psi}{\Psi} = \lambda dx.$$

Решение этого уравнения есть $\ln\Psi = \lambda x$ или $\Psi = e^{\lambda x}$.

Так как при $x \to \pm\infty$ Ψ должна быть конечной, необходимо положить $\lambda = im$. Окончательно, собственные функции оператора $\hat{A}=\frac{\partial}{\partial x}$ есть $\Psi=e^{imx}$, собственные значения данного оператора есть $\lambda=im$, где m - любое вещественное число .

29. Решается аналогично задаче 28.

30. Составим уравнения для собственных функций $\hat{A}\Psi=\lambda\Psi$.

$$\left(x+\frac{d}{dx}\right)\Psi=\lambda\Psi \text{ или } x\Psi=\frac{d\Psi}{dx}=\lambda\Psi,$$

которое можно привести к виду

$$\frac{d\Psi}{\Psi}=(\lambda-x)dx.$$

Интегрируя последнее равенство, получим

$$\Psi=Ce^{\lambda x-\frac{x^2}{2}}.$$

Очевидно, что Ψ удовлетворяет требованиям конечности, непрерывности и однозначности при любом λ, как вещественном, так и комплексном. Спектр собственных значений данного оператора непрерывный.

31. $\Psi=Ce^{\lambda\varphi}$. В силу однозначности собственных функций надо потребовать $\Psi(\varphi)=\Psi(\varphi+2\pi)$.

Тогда $Ce^{\lambda\varphi}=Ce^{\lambda(\varphi+2\pi)}=Ce^{\lambda\varphi}e^{2\lambda\pi}$, откуда $e^{2\lambda\pi}=1$.

Это возможно, если положить $\lambda=im$, где $m=0,\pm1,\pm2,...$

Таким образом, собственные функции данного оператора есть $\Psi=Ce^{im}$, а собственные значения $\lambda=im$, где $m=0,\pm1,\pm2,...$

33. Решение данной задачи подробно изложено в [2] стр. 111-115.

34. Данную задачу следует решать используя [7] по аналогии с примером, изложенным на стр. 19 данного пособия. Множитель A находится из условия нормировки $\int\limits_0^{2\pi}\Psi^2 d\varphi=1$.

$$\int_0^{2\pi} A^2 \sin^4 \varphi d\varphi = A^2 \left(\frac{3\varphi}{8} - \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{32} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = A^2 \frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4} A^2 = 1,$$

откуда $A^2 = \dfrac{4}{3\pi}$.

$$\left\langle \hat{L}_z^2 \right\rangle = \int_0^{2\pi} A \sin^2 \varphi \hat{L}_z^2 \left(A \sin^2 \varphi \right) d\varphi = -A^2 \hbar^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \sin^2 \varphi d\varphi =$$

$$= \left| \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \sin^2 \varphi = \frac{\partial}{\partial \varphi} \sin 2\varphi = -2 \cos 2\varphi = -2\left(1 - 2\sin^2 \varphi\right) \right| =$$

$$= 2A^2\hbar^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi - 4A^2\hbar^2 \int_0^{2\pi} \sin^4 \varphi d\varphi =$$

$$= 2A^2\hbar^2 \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = -4A^2\hbar^2 \left(\frac{3\varphi}{8} - \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{32} \right) \Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 2A^2\hbar^2 \frac{2\pi}{2} - 4A^2\hbar^2 \frac{3 \cdot 2\pi}{8} = 2A^2\hbar^2 \left(\pi - \frac{3}{4}\pi \right) = \frac{A^2\hbar^2\pi}{2} = \frac{2}{3}\hbar^2 .$$

Литература

1. Блохинцев Д.И. Основы квантовой механики. М.: Наука, 1970.
2. Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А. Курс теоретической физики. Том II. Квантовая механика. Квантовая статистика и физическая кинетика. М.: Наука, 1971.
3. Ферми Э. Квантовая механика. М.: Мир, 1965.
4. Воробьёв Н.Н. Теория рядов. М.: Наука, 1970.
5. Кирсанов А.А. Элементы теории симметрии. Псков, ПГПИ, 2000.
6. Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике. М.: Высшая школа, 1972.
7. Двайт Г.В. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1964.

Содержание

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ
В
КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

(Учебно-методическое пособие).
Автор-составитель А.А. Кирсанов.

Издательская лицензия ИД №06024 от 09.10.2001 года.
Подписано в печать 06.02.2002 г. Формат 60х90/16.
Объем издания в усл.печ.л. 3,0. Тираж 100 экз. Заказ 57.

Псковский государственный педагогический институт им. С.М.Кирова,
180760, г. Псков, пл. Ленина, 2.
Редакционно-издательский отдел ПГПИ им. С.М.Кирова,
180760, г. Псков, ул. Советская, 21, телефон 2-86-18.

Отпечатано в типографии газеты «Товары и цены»