Указание. Представить оператор A в форме предела операторов, отображающих все пространство на конечномерные подпространства.

8. Если A — интегральный оператор в $L_2(a, b)$ с произвольным квадратично интегрируемым ядром и $\{e_k(x)\}$ — ортонормальная система в $L_2(a, b)$, то $\sum |Ae_k|^2 = \sum\sum (Ae_k, e_n)^2 < \infty$.

Указание. Использовать метод п. 2.

9. Если оператор A в $L_2(a, b)$ задан в ортонормальном базисе $\{e_n(x)\}$ матрицей $\|a_{jk}\|$ с $\sum\sum a_{jk}^2 < \infty$, то существует квадратично интегрируемое ядро $K(x, s)$ такое, что $A\varphi = \int K(x, s)\varphi(s)\,ds$.

Указание. Положить $K(x, s) = \sum\sum (Ae_j, e_k)\, e_j(x)\, e_k(s)$.

Примечание. Результаты задач 8 и 9 показывают, что среди всех вполне непрерывных операторов, действующих в пространстве $L_2(a, b)$, интегральные операторы Фредгольма выделяются тем условием, что у них сумма квадратов всех матричных элементов в любом ортонормальном базисе пространства $L_2(a, b)$ конечна.

§ 5. Задача Штурма — Лиувилля

1. Общая теорема об интегральном операторе с симметричным ядром имеет многие приложения в математической физике. Одним из важнейших приложений является *решение задачи Штурма — Лиувилля*.

Рассмотрим на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ дифференциальный оператор

$$S[u] = (p(x)\,u'(x))' - q(x)\,u(x) \tag{1}$$
$$(p(x) \in D_1(a, b),\ q(x) \in C(a, b)),$$

определенный для дважды дифференцируемых функций $u(x)$, подчиненных некоторым однородным граничным условиям, например $u(a) = u(b) = 0$.

Оператор S существенно отличается от операторов, которые мы рассматривали ранее; он не является ограниченным оператором, он определен не на всем пространстве $L_2(a, b)$. Тем не менее на своей области определения он симметричен, т. е. для любых двух дважды дифференцируемых функций u, v, удовлетворяющих предписанным граничным условиям, выполняется равенство

$$(Su, v) = (u, Sv). \tag{2}$$

Действительно,

$$\left.\begin{aligned} (Su, v) &= \int_a^b [(pu')' - qu]\, v\,dx = pu'v\Big|_a^b - \int_a^b (pu'v' + quv)\,dx, \\ (u, Sv) &= \int_a^b u\,[(pv')' - qv]\,dx = upv'\Big|_a^b - \int_a^b (pu'v' + quv)\,dx. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

В силу граничного условия

$$p(u'v - uv')\Big|_a^b = 0,$$

и равенство (2) оказывается справедливым.

Функция $e(x)$ называется собственной функцией оператора S, если она входит в область определения оператора S (т. е. дважды дифференцируема и подчинена предписанным граничным условиям) и удовлетворяет уравнению

$$Se = \lambda e.$$

В силу симметрии оператора S, так же как и в § 3, его собственные функции, отвечающие различным значениям λ, ортогональны в пространстве $L_2(a, b)$. Требуется доказать, что *собственные функции оператора S образуют в $L_2(a, b)$ полную систему*. Эта задача, включающая в себя, во-первых, вопрос о существовании бесконечного множества собственных функций, во-вторых, вопрос о полноте их системы, и называется задачей Штурма—Лиувилля.

2. Вот важный пример, в котором возникает необходимость решения задачи Штурма—Лиувилля.

Рассмотрим колебания неоднородной струны, закрепленной в точках $x = a$ и $x = b$. Такие колебания, как мы знаем из гл. III, описываются уравнением

$$(pu_x)_x = \mu u_{tt}, \tag{1}$$

где $p(x)$ — модуль упругости, $\mu(x)$ — плотность материала струны; искомое решение $u(x, t)$ должно удовлетворять граничным условиям

$$u(a, t) = u(b, t) = 0 \tag{2}$$

и начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \tag{3}$$

Будем искать решения уравнение (1) с условием (2) в форме

$$u(x, t) = X(x)\,T(t). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (1) и разделяя переменные, находим:

$$\frac{(pX')'}{\mu X} = \frac{T''}{T}, \tag{5}$$

где штрих обозначает дифференцирование по соответствующему переменному. Правая часть равенства (5) не зависит от x, левая — от t, и, значит, отношение (5) постоянно. Обозначая его значение через λ, получаем два уравнения:

$$\begin{aligned}(pX')' &= \lambda\mu X, \\ T'' &= \lambda T.\end{aligned} \tag{6}$$

Если $\mu(x) \equiv 1$, то функция $X(x)$ должна быть собственной функцией уравнения Штурма—Лиувилля (6).

Если $\mu(x) \not\equiv 1$, то можно сделать подстановку

$$z = X\sqrt{\mu},$$

после которой уравнение (6) приведется к виду

$$(p_1 z')' - qz = \lambda z, \tag{7}$$

где

$$p_1 = \frac{p}{\mu}, \quad q = -\frac{1}{\sqrt{\mu}}\left[p\left(\frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)'\right]',$$

и функция $z(x)$ снова оказывается собственной функцией уравнения Штурма—Лиувилля (7). Будем считать в дальнейшем для простоты $\mu(x) \equiv 1$.

Предположим, что соответствующая проблема Штурма—Лиувилля имеет положительное решение: существует полная ортогональная система функций $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$, удовлетворяющих уравнениям

$$(p(x)\, e_n'(x))' = \lambda_n e_n(x)$$

и граничным условиям $e_n(a) = e_n(b) = 0$. Если $p(x) > 0$, то числа λ_n заведомо отрицательны, поскольку

$$\lambda_n \int_a^b e_n^2(x)\, dx = \int_a^b (pe_n')' e_n\, dx = pe_n' e_n \Big|_a^b - \int_a^b p\,[e_n'(x)]^2\, dx < 0.$$

Уравнение

$$T'' = \lambda_n T$$

имеет, очевидно, решение вида

$$T_n = A_n \cos \nu_n t + B_n \sin \nu_n t,$$

где $\nu_n^2 = -\lambda_n$, а A_n и B_n — произвольные постоянные. Уравнение (1) имеет совокупность решений вида

$$u_n(x, t) = e_n(x)(A_n \cos \nu_n t + B_n \sin \nu_n t),$$

представляющих чисто колебательные процессы с частотами $\nu_1, \nu_2, \ldots$ Числа $\nu_1, \nu_2, \ldots$ называются *собственными частотами* струны, определяемой условиями (1)—(3). Решение $u(x, t)$, удовлетворяющее также и начальным условиям (3), можно теперь получить, комбинируя найденные решения $u_n(x, t)$:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t).$$

Для определения коэффициентов A_n и B_n получаются условия

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e_n(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu_n B_n e_n(x).$$

В силу предположенной полноты системы $e_n(x)$ функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно разложить по системе $e_n(x)$ и найти коэффициенты A_n и B_n. Как видим, они определяются коэффициентами разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ по системе $e_n(x)$. Таким образом, принципиально задача о колебаниях неоднородной струны оказывается разрешенной[1]).

3. Приступая к решению общей задача Штурма—Лиувилля, предположим сначала, что уравнение

$$Su \equiv (pu')' - qu = 0$$

не имеет решения в области определения оператора S (т. е. среди дважды дифференцируемых функций с фиксированными граничными условиями). Оператор S в этом предположении мы будем называть *неособенным.*

Мы покажем, что *неособенный оператор S имеет обратный оператор A, который является интегральным оператором Фредгольма с симметричным и непрерывным ядром.*

Слова «A — обратный оператор к оператору S» означают здесь следующее:

1) Для любой функции $u(x)$ из области определения оператора S имеем

$$A(Su) = u.$$

2) Для любой непрерывной функции $\psi(x)$ функция $A\psi(x)$ принадлежит к области определения оператора S и

$$S(A\psi) = \psi.$$

Существование оператора A с указанными свойствами решает проблему. Действительно, оператор A, как симметричный оператор Фредгольма, обладает системой ортогональных собственных функций $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$ с ненулевыми собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ Все функции $e_n(x)$ непрерывны в силу заключительных результатов § 4. Применяя к равенству

$$e_n = \frac{1}{\lambda_n} A e_n$$

---

[1]) Мы оставляем в стороне вопросы о сходимости полученных рядов и о том, в каком смысле функция $u(x, t)$ есть решение уравнения (1).

оператор S, получаем:

$$Se_n = \frac{1}{\lambda_n} SAe_n = \frac{1}{\lambda_n} e_n,$$

так что функция $e_n(x)$ является собственной функцией оператора S с собственным значением $\frac{1}{\lambda_n}$. Покажем, что функции $e_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют полную систему в пространстве $L_2(a, b)$ (и что, следовательно, оператор A не имеет собственных функций с нулевым собственным значением). Для любой функции u из области определения оператора S выполняется уравнение

$$A(Su) = u,$$

которое показывает, что функция u принадлежит области значений оператора A. Но тогда u может быть разложена в ряд по собственным функциям оператора A с ненулевыми собственными значениями, т. е. по функциям $e_1(x)$, $e_2(x)$, ..., $e_n(x)$, ...

Функции $u(x)$, очевидно, образуют плотное множество в пространстве $L_2(a, b)$. Отсюда следует, что функции $e_n(x)$ образуют полную систему в пространстве $L_2(a, b)$, что и требуется.

4. Таким образом, решение задачи Штурма—Лиувилля сводится к построению обратного оператора A к оператору S в форме интегрального оператора Фредгольма с симметричным ядром.

Пусть $u(x)$ — произвольная функция из области определения оператора S, т. е. функция, удовлетворяющая граничным условиям и имеющая две непрерывные производные, и пусть $Su = \phi$. Мы должны восстановить функцию u по функции ϕ. Заметим, что может существовать лишь единственная функция u, лежащая в области определения оператора S и удовлетворяющая уравнению $Su = \phi$. Действительно, разность v двух возможных решений такого уравнения удовлетворяла бы однородному уравнению $Sv = 0$ и лежала бы также в области определения оператора S, откуда по предположению следовало бы, что $v \equiv 0$.

Итак, мы должны решить уравнение

$$Su = \phi, \tag{1}$$

причем $\phi(x)$ — заданная непрерывная функция. Применим обычный способ вариации постоянных. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — два линейно независимых решения уравнения

$$Su \equiv (pu')' - qu = 0, \tag{2}$$

причем пусть для определенности $u_1(x)$ обращается в нуль при $x = b$, а $u_2(x)$ обращается в нуль при $x = a$. Будем искать решение уравнения (2) в виде

$$u(x) = C_1(x)\, u_1(x) + C_2(x)\, u_2(x), \tag{3}$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ — некоторые дифференцируемые (один раз) функции, подлежащие определению. Дифференцируя соотношение (3), находим:

$$u'(x) = C_1'u_1 + C_2'u_2 + C_1u_1' + C_2u_2'.$$

Как обычно, на функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ накладываем условие

$$C_1'u_1 + C_2'u_2 = 0, \tag{4}$$

откуда

$$u' = C_1u_1' + C_2u_2'. \tag{5}$$

Дифференцируя вторично и подставляя в (1), получаем:

$$C_1'pu_1' + C_2'pu_2' = \varphi. \tag{6}$$

Из двух уравнений (4)—(6) можно найти величины C_1' и C_2'. Определитель этой системы

$$p(u_1'u_2 - u_2'u_1)$$

в действительности не зависит от x. В самом деле, по известной формуле Лиувилля вронскиан уравнения $Su = 0$ выражается по формуле

$$W(x) = W(a)\,e^{-\int\limits_a^x \frac{p'(t)}{p(t)}\,dt} = W(a)\,e^{-\ln\frac{p(x)}{p(a)}} = \frac{W(a)\,p(a)}{p(x)},$$

следовательно,

$$p(u_1'u_2 - u_2'u_1) = p(x)\,W(x) = W(a)\,p(a) = c_0 = \text{const},$$

что и требуется.

Решая систему (4)—(6), получаем:

$$C_1' = \frac{u_2\varphi}{c_0}, \quad C_2' = -\frac{u_1\varphi}{c_0}.$$

Первообразные $C_1(x)$ и $C_2(x)$ мы возьмем в следующей форме:

$$C_1(x) = \frac{1}{c_0}\int\limits_a^x u_2(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \quad C_2(x) = \frac{1}{c_0}\int\limits_x^b u_1(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi;$$

при таком выборе первообразных искомое решение

$$u = C_1u_1 + C_2u_2 = \frac{u_1(x)}{c_0}\int\limits_a^x u_2(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \frac{u_2(x)}{c_0}\int\limits_x^b u_1(\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi \tag{7}$$

удовлетворяет обоим граничным условиям $u(a) = u(b) = 0$.

Итак, мы получили следующий результат: если для некоторой функции $u(x)$, входящей в область определения оператора S, мы имеем $Su = \psi$, то

$$u(x) = \frac{u_1(x)}{c_0}\int_a^x u_2(\xi)\psi(\xi)\,d\xi + \frac{u_2(x)}{c_0}\int_x^b u_1(\xi)\psi(\xi)\,d\xi,$$

или, иначе говоря,

$$u(x) = \int_a^b K(x, \xi)\psi(\xi)\,d\xi,$$

где

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{c_0}u_1(x)u_2(\xi) & \text{при } \xi < x, \\ \frac{1}{c_0}u_1(\xi)u_2(x) & \text{при } \xi > x. \end{cases} \tag{8}$$

Очевидно, что функция $K(x, \xi)$ непрерывна при $a \leqslant \xi \leqslant b$, $a \leqslant x \leqslant b$ и симметрична. Обозначим:

$$A\psi = \int_a^b K(x, \xi)\psi(\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

Итак, для любой функции $u(x)$ из области определения оператора S мы имеем $A(Su) = u$. Таким образом, первое из двух условий, описывавших свойство «A есть обратный оператор для S», выполнено. Проверим второе условие. Пусть $\psi(x)$ — произвольная непрерывная функция на отрезке $[a, b]$; покажем, что $u = A\psi$ принадлежит области определения оператора S и выполняется уравнение

$$SA\psi = \psi. \tag{10}$$

Подставляя в (9) выражение функции $K(x, s)$ из (8), мы получаем

$$u(x) = \frac{u_1(x)}{c_0}\int_a^x u_2(\xi)\psi(\xi)\,d\xi + \frac{u_2(x)}{c_0}\int_x^b u_1(\xi)\psi(\xi)\,d\xi. \tag{1}$$

Очевидно, что эта функция непрерывна и обращается в нуль при $x = a$ и $x = b$; кроме того, она имеет непрерывную производную

$$u'(x) = \frac{u_1'(x)}{c_0}\int_a^x u_2(\xi)\psi(\xi)\,d\xi + \frac{u_1(x)}{c_0}u_2(x)\psi(x) + \frac{u_2'(x)}{c_0}\int_x^b u_1(\xi)\psi(\xi)\,d\xi -$$

$$- \frac{u_2(x)}{c_0}u_1(x)\psi(x) = \frac{u_1'(x)}{c_0}\int_a^x u_2(\xi)\psi(\xi)\,d\xi + \frac{u_2'(x)}{c_0}\int_x^b u_1(\xi)\psi(\xi)\,d\xi. \tag{12}$$

Из (12) видно, что $u(x)$ имеет и вторую производную

$$u''(x)=\frac{u_1''(x)}{c_0}\int\limits_a^x u_2(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{u_1'(x)}{c_0}u_2(x)\varphi(x)+\frac{u_2''(x)}{c_0}\int\limits_x^b u_1(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{u_2'(x)}{c_0}u_1(x)\varphi(x)=\frac{u_1''(x)}{c_0}\int\limits_a^x u_2(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{u_2''(x)}{c_0}\int\limits_x^b u_1(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{c_0}W(x)\varphi(x). \quad (13)$$

Умножая (13) на $p(x)$, (12) на $p'(x)$, (11) на $-q(x)$ и складывая, находим

$$pu''+p'u'-qu=\frac{pu_1''+p'u_1'-qu_1}{c_0}\int\limits_a^x u_2(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi+$$

$$+\frac{pu_2''+p'u_2'-qu_2}{c_0}\int\limits_x^b u_1(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi+\frac{1}{c_0}pW\varphi(x)=\varphi(x),$$

или

$$Su=SA\varphi=\varphi,$$

что и требуется.

Тем самым проблема Штурма — Лиувилля в неособенном случае полностью решена.

Построенная нами функция $K(x, s)$ называется *функцией Грина* рассматриваемой краевой задачи.

Замечание. Функции Грина $K(x, s)$ можно придать определенный физический смысл. Истолкуем уравнение

$$(pu')'-qu=\varphi(x)$$

как условие равновесия неоднородной струны под действием постоянной силы с плотностью $\varphi(x)$. Искомая форма равновесия, как мы показали, записывается в форме интеграла

$$u(x)=\int\limits_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Пусть теперь $\varphi(x)$ отлична от нуля только в интервале длины $2h$ с центром в точке ξ_0 и принимает в этом интервале постоянное значение $\frac{1}{2h}$. Такая функция $\varphi(x)$ есть плотность силы 1, равномерно распределенной в промежутке $[\xi_0-h, \xi_0+h]$. Форма равновесия струны в этом случае задается функцией

$$\frac{1}{2h}\int\limits_{\xi_0-h}^{\xi_0+h} K(x, \xi)\,d\xi.$$

В пределе при $h \to 0$ это выражение переходит в $K(x, \xi_0)$. Можно сказать поэтому, что *функция* $K(x, \xi_0)$ *изображает форму равновесия струны, к которой приложена сила* 1, *сосредоточенная в одной точке* ξ_0.

И обратно, если при любом ξ известна форма равновесия $K(x, \xi)$ струны под действием единичной силы, сосредоточенной в точке ξ, то естественно считать, что форма равновесия струны под действием непрерывно распределенной силы с плотностью $\psi(x)$ задается интегралом

$$\int_a^b K(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi.$$

Эти соображения можно было бы положить также в основу решения задачи Штурма — Лиувилля[1]).

Подобная же связь часто имеет место и в других физических моделях. Пусть, например $K(x, \xi)$ означает температуру, установившуюся в теплопроводящем стержне, занимающем отрезок $[a, b]$, под влиянием источника тепла мощности 1, расположенного в точке ξ; тогда температура, которая установится в этом стержне под влиянием непрерывно распределенных источников с плотностью $\psi(\xi)$, выразится интегралом

$$u(x) = \int_a^b K(x, \xi)\,\psi(\xi)\,d\xi. \tag{9}$$

Именно по этой причине функции вида (9) и названы «истокообразно представимыми».

5. Рассмотрим особый случай задачи, когда имеется функция $u(x) \not\equiv 0$, удовлетворяющая граничным условиям и уравнению $Su = 0$. Это означает, что оператор S обладает собственным значением $\lambda = 0$. Поскольку S может обладать лишь счетным множеством собственных значений (вспомним, что собственные функции симметричного оператора S, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны), имеется число λ_0, не являющееся собственным значением оператора S. Тогда все наши рассуждения применимы к оператору $S_1 = S - \lambda_0 E$, который имеет ту же структуру, что и S, но не имеет нулевого собственного значения. Оператор S_1 обладает обратным оператором A_1 — интегральным оператором с симметричным ядром — и вследствие этого имеет полную систему собственных функций $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$ с собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$; отсюда следует, что оператор S имеет полную систему собственных функций — именно тех же $e_1(x), \ldots, e_n(x), \ldots$ с собственными значениями $\lambda_1 + \lambda_0, \ldots, \lambda_n + \lambda_0, \ldots$. Таким образом, проблема Штурма — Лиувилля имеет решение и в особенном случае.

Задача. Построить функции Грина $K(x, s)$ для дифференциального оператора

$$Su = u_{xx}$$

[1]) Ср. Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, гл. 5, § 14.

при граничных условиях: 1) $u(0)=u(\pi)=0$; 2) $u(0)=u'(\pi)=0$. Написать разложения этих функций в билинейные ряды (§ 4, задача 2).

Отв. $K_1(x, \xi)=\begin{cases} x(\pi-\xi) & \text{при } x\leqslant\xi, \\ (\pi-x)\xi & \text{при } x\geqslant\xi, \end{cases}$ $\quad K_2(x, s)=\min(x, s)$,

$$K_1(x, s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx \sin ns}{n^2},$$

$$K_2(x, s)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)s}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}.$$

§ 6. Неоднородные интегральные уравнения с симметричными ядрами

1. В этом параграфе мы будем рассматривать уравнение

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds, \tag{1}$$

где $f(x)$ и $K(x, s)$ даны, а $\varphi(x)$ — искомая функция. Ядро $K(x, s)$ предполагается симметричным и квадратично интегрируемым.

В абстрактном пространстве аналогичное уравнение имеет вид

$$\varphi=f+A\varphi, \tag{2}$$

где A — симметричный вполне непрерывный оператор.

Допустим сначала, что решение φ уравнения (2) существует.

Проектируя левую и правую части равенства (2) на ось, определяемую собственным вектором e_k (так, что $Ae_k=\lambda_k e_k$), получаем:

$$\begin{aligned}(\varphi, e_k)&=(f, e_k)+(A\varphi, e_k)=(f, e_k)+(\varphi, Ae_k)=\\ &=(f, e_k)+(\varphi, \lambda_k e_k)=(f, e_k)+\lambda_k(\varphi, e_k),\end{aligned} \tag{3}$$

откуда при $\lambda_k\neq 1$ находим:

$$(\varphi, e_k)=\frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k}. \tag{4}$$

Таким образом, если среди собственных значений оператора нет числа 1, все коэффициенты Фурье решения φ определены однозначно. Само решение в этом случае может быть лишь единственным, именно равным

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(f, e_k)}{1-\lambda_k}e_k. \tag{5}$$