где разность справа неотрицательна [она представляет собой меру множества значений $F(x)$ на совокупности точек непрерывности в интервале x', x'']. Далее, в каждой точке x существуют $G(x+0)=G(x)$ и $G(x-0)$ и

$$G(x+0)-G(x-0)= \\ =[F(x+0)-F(x-0)]-[H(x+0)-H(x-0)];$$

в силу указанных выше свойств функции $H(x)$ эта разность при каждом x равна нулю, так что функция $G(x)$ непрерывна. Теорема доказана.

Замечание. Условие непрерывности справа, фигурирующее во всех наших построениях, можно отбросить, если соответственным образом обобщить понятие функции скачков. Пусть, например, заданы точки x_n и неотрицательные числа h_n и h'_n; функция, определяемая по формуле

$$H(x)=\sum_{x_n<x} h'_n+\sum_{x_n\leqslant x} h_n,$$

имеет в каждой точке x_n скачок слева h'_n (так что $H(x_n)-H(x_n-0)=h'_n$), скачок справа h_n (так что $H(x_n+0)-H(x_n)=h'_n$) и общий скачок h'_n+h_n. Если $F(x)$ — неубывающая функция, имеющая в точках x_n скачок слева h'_n и скачок справа h_n, то, вычитая из нее соответствующую функцию $H(x)$, получим непрерывную и неубывающую разность $G(x)=F(x)-H(x)$.

§ 2. Функции с ограниченным изменением

1. Отправляясь от неубывающих функций, можно построить и более широкие классы функций, имеющих почти всюду производную. Очевидно, вместе с неубывающими функциями имеют почти всюду производную и их разности. Мы укажем далее внутреннее определение функций, являющихся разностями неубывающих. Введем следующее определение:

Определение. Функция $F(x)$, определенная на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, называется *функцией с ограниченным изменением*, если при любом разбиении отрезка $a\leqslant x\leqslant b$ на части точками деления

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$$

сумма

$$\sum_{k=0}^{n+1} |F(x_{k+1})-F(x_k)| \tag{1}$$

остается меньше фиксированной постоянной.

Всякая *неубывающая* функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение, так как для нее сумма (1) не зависит от разбиения и равна $F(b)-F(a)$.

Сумма и разность двух функций с ограниченным изменением имеют, очевидно, также ограниченное изменение. В частности, разность двух неубывающих функций имеет ограниченное изменение. Мы увидим сейчас, что верно и обратное: каждая функция с ограниченным изменением может быть представлена как разность двух неубывающих функций.

Пусть $F(x)$ — функция с ограниченным изменением; точную верхнюю грань сумм (1) при всевозможных разбиениях отрезка $[a, b]$ мы будем называть *полным изменением* функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначать $\mathbf{V}_a^b[F]$. Покажем, что при $a<c<b$ имеет место равенство

$$\mathbf{V}_a^b[F]=\mathbf{V}_a^c[F]+\mathbf{V}_c^b[F]. \tag{2}$$

Если точка c включена в число точек деления отрезка $[a, b]$, так что, например, $x_m=c$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|=$$
$$=\sum_{k=0}^{m-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|+\sum_{k=m}^{n-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|. \tag{3}$$

Суммы в правой части можно сделать как угодно близкими к $\mathbf{V}_a^c[F]+\mathbf{V}_c^b[F]$, достаточно измельчив подразбиение. Поэтому можно утверждать, что

$$\mathbf{V}_a^b[F]=\sup\sum_{k=0}^{n-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|\geqslant\mathbf{V}_a^c[F]+\mathbf{V}_c^b[F]. \tag{4}$$

С другой стороны, имея произвольное подразбиение отрезка и добавив к нему еще одну точку c, мы можем только увеличить сумму (1). Поэтому для любого подразбиения, содержащего или не содержащего точку c, мы имеем в силу (3):

$$\sum_{k=0}^{n-1}|F(x_{k+1})-F(x_k)|\leqslant\mathbf{V}_a^c[F]+\mathbf{V}_c^b[F].$$

Отсюда, переходя в левой части к верхней грани, получаем:

$$\mathbf{V}_a^b[F]\leqslant\mathbf{V}_a^c[F]+\mathbf{V}_c^b[F]. \tag{5}$$

Соединяя (3) и (5), получаем (2), что и требовалось. В частности, $V(x)=\mathbf{V}_a^x[F]$ — неубывающая функция. Разность $G(x)=V(x)-F(x)$ — также неубывающая функция, так как при $x'<x''$, очевидно, $V(x'')-V(x')=\mathbf{V}_{x'}^{x''}[F]\geqslant F(x'')-F(x')$ и, следовательно,

$$V(x'')-F(x'')\geqslant V(x')-F(x').$$

Таким образом, функция с ограниченным изменением представлена в виде разности двух неубывающих функций

$$F(x) = V(x) - G(x).$$

2. Многие свойства, которыми может дополнительно обладать функция $F(x)$, сохраняются и для ее неубывающих составляющих $V(x)$ и $G(x)$. К числу таких свойств относится, например, непрерывность — двусторонняя или односторонняя. Покажем, что если функция $F(x)$ при $x = x_0$ непрерывна, например, справа, то $V(x)$ и $G(x)$ также непрерывны справа при $x = x_0$. Достаточно показать это для функции $V(x)$. Так как функция $F(x)$ непрерывна справа в точке x_0, то при заданном $\varepsilon > 0$ можно найти $\delta > 0$ так, что при любом $x_1 > x_0$, отличающемся от x_0 меньше чем на δ, будет иметь место неравенство

$$|F(x_1) - F(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Построим разбиение отрезка $[x_0, b]$ на части $x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ так, чтобы иметь

$$\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| > \mathbf{V}_{x_0}^{b}[F] - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Точку x_1 здесь можно всегда подчинить условию $x_0 < x_1 < x_0 + \delta$. Мы получим:

$$\mathbf{V}_{x_0}^{b}[F] < \sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2} <$$
$$< \sum_{k=1}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| + \varepsilon < \mathbf{V}_{x_1}^{b}[F] + \varepsilon$$

и, следовательно,

$$V(x_1) - V(x_0) = \mathbf{V}_{x_0}^{x_1}[F] = \mathbf{V}_{x_0}^{b}[F] - \mathbf{V}_{x_1}^{b}[F] < \varepsilon,$$

откуда и вытекает, что $V(x)$ непрерывна справа при $x = x_0$. Аналогично доказывается непрерывность функции $V(x)$ слева в предположении, что непрерывна слева исходная функция $F(x)$. Как следствие получаем: *если функция $F(x)$ с ограниченным изменением непрерывна на отрезке $[a, b]$, то непрерывна и функция $V(x) = \mathbf{V}_a^x[F]$, а также и $G(x) = V(x) - F(x)$.*

Обратно, о многих свойствах функции $F(x)$ с ограниченным изменением можно судить по свойствам ее неубывающих составляющих. Так, всякая неубывающая функция по теореме Лебега (§ 1) имеет почти всюду производную. Поэтому и *любая функция с ограниченным изменением, как разность двух неубывающих функций, имеет почти всюду производную.*

Задачи. 1. Показать, что произведение двух функций $F_1(x)$ и $F_2(x)$ с ограниченным изменением есть снова функция с ограниченным изменением, причем

$$\mathbf{V}_a^b[F_1F_2] \leqslant \max_x |F_1(x)|\, \mathbf{V}_a^b[F_2] + \max_x |F_2(x)|\, \mathbf{V}_a^b[F_1].$$

2. Пусть $F(x) \geqslant \alpha > 0$ есть функция с ограниченным изменением. Показать, что и $\frac{1}{F(x)}$ есть функция с ограниченным изменением, причем

$$\mathbf{V}_a^b\left[\frac{1}{F(x)}\right] \leqslant \frac{1}{\alpha^2}\, \mathbf{V}_a^b[F].$$

3. Кривая $y = F(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ называется *спрямляемой*, если длины ломаных с последовательными вершинами в точках $(x_1, F(x_1)), \ldots, (x_n, F(x_n))$, где $a = x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, ограничены фиксированной постоянной, не зависящей от числа n и выбора точек $x_2, \ldots, x_{n-1}$. Показать, что кривая $y = F(x)$ спрямляема тогда и только тогда, когда функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение.

Указание. Использовать неравенство

$$|\Delta y_j| \leqslant \sqrt{|\Delta x_j|^2 + |\Delta y_j|^2} \leqslant |\Delta x_j| + |\Delta y_j|.$$

4. Доказать, что непрерывная функция $x^\alpha \sin\frac{1}{x^\beta}$ на отрезке $[0, 1]$ имеет ограниченное изменение при $\alpha > \beta$ и не имеет ограниченного изменения при $\alpha \leqslant \beta$.

5. Существует ли непрерывная функция $F(x)$, не имеющая ограниченного изменения ни в каком промежутке?

Отв. Например, функция типа функции Вейерштрасса, нигде не имеющая производной.

6. В пространстве всех функций $F(x)$ с ограниченным изменением на отрезке $[a, b]$ ввести норму

$$\|F\| = \mathbf{V}_a^b[F]$$

(функции, отличающиеся на константу, считаются эквивалентными). Показать что при этом получается полное нормированное пространство.

7. Положим $V(x) = \mathbf{V}_a^x[F]$, где $F(x)$ — функция с ограниченным изменением; показать, что почти всюду

$$V'(x) = |F'(x)|.$$

Указание. Для заданного n построить подразбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$ так, чтобы сумма $\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)|$ отличалась от $\mathbf{V}_a^b[F]$ меньше чем на $\frac{1}{2^n}$. Положив $F_n(x) = \pm F(x) + C_{kn}$ на интервале (x_k, x_{k+1}), выбрать знаки $\pm$ и постоянные C_{kn} так, чтобы иметь $F_n(x_{k+1}) - F_n(x_k) = |F(x_{k+1}) - F(x_k)|$. Показать, что $V(x) - F_n(x)$ не убывает. Применить к сходящемуся ряду $\sum_{n=1}^{\infty} [V(x) - F_n(x)]$ малую теорему Фубини.

8. Показать, что у функций $F(x)$ и $V(x)$ одни и те же точки разрыва, а скачки в точках разрыва совпадают с точностью до знака.

3. Рассмотрим неопределенный интеграл от суммируемой функции $\varphi(x)$:

$$F(x)=\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi.$$

Функция $F(x)$ имеет ограниченное изменение, так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1})-F(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(\xi)\,d\xi \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |\varphi(\xi)|\,d\xi = \int_a^b |\varphi(\xi)|\,d\xi.$$

(Впрочем, можно и непосредственно представить $F(x)$ в виде разности двух неубывающих, использовав разложение $\varphi(x)$ на положительную и отрицательную части.) По доказанному *функция $F(x)$ имеет почти всюду производную $F'(x)$.*

Покажем, что эта производная почти всюду совпадает с исходной функцией $\varphi(x)$. Достаточно ограничиться суммируемой функцией $\varphi(x)$ из класса C^+ (гл. IV, § 2). Мы имеем $\varphi(x)=\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x)$, где $h_n(x)$ — ступенчатая функция и $h_n(x)\leqslant h_{n+1}(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$. Для интегралов от функций $h_n(x)$ наше утверждение непосредственно очевидно: если

$$H_n(x)=\int_a^x h_n(\xi)\,d\xi,$$

то $H_n'(x)=h_n(x)$ всюду вне точек разрыва $h_n(x)$. Так как последовательность $h_n(x)$, монотонно возрастая, сходится к $\varphi(x)$, то при каждом x последовательность $H_n(x)$ имеет пределом функцию $F(x)$. Более того, функция $F(x)$ представляется в виде ряда неубывающих функций

$$F(x)=H_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[H_{n+1}(x)-H_n(x)].$$

Применяя малую теорему Фубини, получаем: почти всюду

$$F'(x)=h_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[h_{n+1}(x)-h_n(x)]=\varphi(x),$$

что и требовалось доказать.

Мы разрешили тем самым проблему I, поставленную во введении к этой главе. Сформулируем результат в виде теоремы:

Теорема 1 (А. Лебег). *Если $\varphi(x)$ — суммируемая функция, то ее неопределенный интеграл*

$$F(x)=\int_a^x \varphi(\xi)\,d\xi$$

есть непрерывная функция с ограниченным изменением и имеет почти всюду производную, равную $\varphi(x)$.

4. Точки Лебега. Будем говорить, что точка $x_0 \in [a, b]$ есть *точка Лебега* суммируемой функции $\varphi(x)$, если

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x |\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\,d\xi=0 \tag{1}$$

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна, то, как легко видеть, любая точка $x_0 \in [a, b]$ есть точка Лебега функции $\varphi(x)$. Покажем, что в общем случае, когда $\varphi(x)$ суммируема, *почти каждая точка отрезка* $[a, b]$ *является точкой Лебега функции* $\varphi(x)$.

Пусть r — фиксированное число. Тогда на некотором множестве E_r полной меры в силу теоремы 1 выполняется предельное соотношение

$$\lim \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x |\varphi(\xi)-r|\,d\xi=|\varphi(x_0)-r|.$$

Рассмотрим всюду плотное счетное множество значений r, например множество рациональных r. Пересечение E всех множеств E_r есть также множество полной меры. Пусть $x_0 \in E$ такова, что $\varphi(x_0)$ имеет конечное значение; покажем, что x_0 есть точка Лебега. Действительно, для заданного $\varepsilon>0$ можно указать такое рациональное r, что $|\varphi(x_0)-r|<\frac{\varepsilon}{3}$; далее можно написать:

$$\frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^x |\varphi(\xi)-\varphi(x_0)|\,d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^x |\varphi(\xi)-r|\,d\xi+\frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^x |r-\varphi(x_0)|\,d\xi=$$

$$=\left\{\frac{1}{|x-x_0|}\int_{x_0}^x |\varphi(\xi)-r|\,d\xi-|\varphi(x_0)-r|\right\}+2|\varphi(x_0)-r|.$$

При достаточно малом $|x-x_0|$ фигурная скобка становится меньше чем $\frac{\varepsilon}{3}$; поэтому при таких $|x-x_0|$ вся сумма справа будет меньше чем ε, откуда и вытекает требуемое равенство (1).

В точках Лебега суммируемая функция $\varphi(x)$ обладает многими свойствами непрерывной функции.

Нам понадобится в дальнейшем свойство функции $\varphi(x)$, выражаемое следующей леммой:

Лемма. *Если x_0 — точка Лебега функции $\varphi(x)$ и E_n — последовательность измеримых множеств, стягивающаяся к точке x_0 в том смысле, что E_n помещается на интервале Δ_n, содержащем точку x_0 и имеющем длину $\delta_n \to 0$, причем выполнено условие* $\mu E_n \geqslant \alpha\delta_n$ ($\alpha > 0$ — фиксированная постоянная), *то*

$$\lim \frac{1}{\mu E_n} \int_{E_n} \varphi(\xi)\, d\xi = \varphi(x_0). \tag{2}$$

Доказательство. Мы имеем, очевидно,

$$\left| \varphi(x_0) - \frac{1}{\mu E_n} \int_{E_n} \varphi(\xi)\, d\xi \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{\mu E_n} \int_{E_n} [\varphi(x_0) - \varphi(\xi)]\, d\xi \right| \leqslant \frac{1}{\mu E_n} \int_{E_n} |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\alpha^{-1}}{\mu \Delta_n} \int_{\Delta_n} |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)|\, d\xi.$$

Если интервал Δ_n имеет своим концом точку x_0, то результат имеет пределом 0 по предположению (x_0 — точка Лебега). Если точка x_0 находится внутри интервала $\Delta_n = (\alpha_n, \beta_n)$, то полученное отношение заключено между отношениями

$$\frac{\alpha^{-1}}{x_0 - \alpha_n} \int_{\alpha_n}^{x_0} |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)|\, d\xi \quad \text{и} \quad \frac{\alpha^{-1}}{\beta_n - x_0} \int_{x_0}^{\beta_n} |\varphi(x_0) - \varphi(\xi)|\, d\xi$$ [1])

и поэтому вместе с ними также стремится к нулю, что и требуется.

Как следствие получаем, что *в каждой точке Лебега функция $\varphi(x)$ равна производной от своего неопределенного интеграла.*

Задачи. 1. Точка x называется *точкой плотности* измеримого множества E, если

$$\lim_{\Delta \to \xi} \frac{\mu E(\Delta)}{\mu \Delta} = 1,$$

где $E(\Delta)$ означает часть множества E, попавшую на интервал Δ. Показать, что почти все точки множества E есть его точки плотности.

Указание. Применить лемму к характеристической функции множества E, положив $E_n = \Delta_n$ (интервал, стягивающийся к точке x).

---

[1]) По известному арифметическому неравенству дробь $\frac{a+c}{b+d}$ заключена между $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.

2. Дано, что для любого интервала Δ $\mu E(\Delta) \geqslant \alpha\mu\Delta$, где $\alpha > 0$ фиксировано; показать, что E имеет полную меру.

Указание. Дополнительное множество не имеет точек плотности.

Следствие. Не существует измеримого множества такого, что мера его части, попавшей на произвольный интервал, равна точно половине длины этого интервала.

3. Точка ξ называется *точкой асимптотической непрерывности* измеримой на $[a, b]$ функции $F(x)$, если существует измеримое множество E, имеющее точку ξ своей точкой плотности, на котором $F(x)$ непрерывна. Доказать, что почти каждая точка $\xi \in [a, b]$ есть точка асимптотической непрерывности функции $F(x)$.

Указание. Каждая точка плотности множества E_ε, $\mu E_\varepsilon > b - a - \varepsilon$, на котором $F(x)$ непрерывна (гл. IV, § 4, п. 7), удовлетворяет условию.

4. Проверить, что в каждой точке Лебега суммируемая функция $F(x)$ асимптотически непрерывна; если $F(x)$ ограничена, то верно и обратное.

5. Построить пример суммируемой функции, у которой в точке Лебега соотношение (2) не выполняется, если в качестве E_n выбирать некоторые множества, для которых $\frac{\mu E_n}{\mu \Delta_n} \to 0$.

§ 3. Восстановление функции по ее производной

Мы переходим теперь к решению проблемы II из введения к этой главе.

1. На отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ дана функция $F(x)$, обладающая почти всюду производной $F'(x) = \varphi(x)$.

Спрашивается: будет ли функция $\varphi(x)$ суммируемой и справедлива ли формула

$$F(x) = \int_a^x \varphi(\xi)\, d\xi + C? \tag{1}$$

Как мы знаем, необходимым условием для выполнения равенства (1) является наличие ограниченного изменения у функции $F(x)$. Будем считать, что оно выполнено, и на первых порах предположим, что $F(x)$ не убывает. Сначала ответим на первый вопрос: покажем, что *производная от неубывающей функции всегда суммируема*. Производная функции $F(x)$ есть предел отношения

$$\Phi_h(x) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Функции $\Phi_h(x)$ неотрицательны и при $h \to 0$ почти везде на отрезке $[a, b]$ сходятся к пределу $F'(x)$ [1]). Для доказательства суммируемости функции $F'(x)$ применим теорему Фату из § 3 гл. IV; она обеспечит суммируемость функции $F'(x)$, если интегралы от функций $\Phi_h(x)$ по отрезку $[a, b]$ остаются ограниченными. Если считать α и β точками

[1]) Если $x + h$ выходит за пределы отрезка $[a, b]$, продолжаем $F(x)$, как постоянную.