§ 19. Теорема о движении центра масс

В нерелятивистской механике, ввиду независимости массы от скорости, количество движения системы $\boldsymbol{p} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots$ может быть выражено через скорость ее *центра масс*. *Центром масс* или *центром инерции системы* называется такая воображаемая точка, радиус-вектор $\boldsymbol{R}$ которой выражается через радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots$ материальных точек по формуле

$$\boldsymbol{R} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + \ldots}{m}, \tag{19.1}$$

где $m = m_1 + m_2 + \ldots$ — общая масса всей системы. Эту точку мы обычно будем обозначать буквой C.

Если продифференцировать выражение (19.1) по времени и умножить на m, то получится

$$m\dot{\boldsymbol{R}} = m_1\dot{\boldsymbol{r}}_1 + m_2\dot{\boldsymbol{r}}_2 + \ldots,$$

или

$$m\boldsymbol{V} = m_1\boldsymbol{v}_1 + m_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots,$$

где $\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{R}}$ — скорость центра масс системы. Таким образом,

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{V}. \tag{19.2}$$

Подставив это выражение в формулу (18.1), получим

$$m\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = \boldsymbol{F}^{(e)}. \tag{19.3}$$

Отсюда следует, что *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила — геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему*. Этот результат называется *теоремой о движении центра масс*.

Примером может служить движение снаряда по параболе в безвоздушном пространстве. Если в какой-либо момент времени снаряд разорвется на мелкие осколки, то эти осколки под действием внутренних сил будут разлетаться в разные стороны. Однако центр масс осколков и газов, образовавшихся при взрыве, будет продолжать свое движение по параболической траектории, как если бы никакого взрыва не было.

Центр масс системы совпадает с ее *центром тяжести*, т. е. с точкой приложения параллельных сил, действующих на материальные точки системы в однородном поле тяжести. Поэтому вместо терминов «центр масс» и «центр инерции» употребляют также термин «центр тяжести». Однако в теореме о движении центра масс термином «центр тяжести» лучше не пользоваться, так как к этой теореме тяжесть не имеет прямого отношения. Термин «центр тяжести» распространен в курсах теоретической механики, особенно старых. В физике этот термин вышел из употребления.

Если система замкнута, то $\boldsymbol{F}^{(e)} = 0$. В этом случае уравнение (19.3) переходит в $\frac{d\boldsymbol{V}}{dt} = 0$, из которого следует $\boldsymbol{V} = \text{const}$. Центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно. Эта теорема верна и в релятивистской механике (см. задачу 5 к этому параграфу).

ЗАДАЧИ

1. На дне маленькой запаянной пробирки, подвешенной над столом на нити, сидит муха, масса которой равна массе пробирки, а расстояние от дна до поверхности стола равно длине пробирки l. Нить пережигают, и за время падения муха перелетает со дна в самый верхний конец пробирки. Определить время, по истечении которого нижний конец пробирки стукнется о стол.

Ответ. $t = \sqrt{\frac{l}{g}}$.

2. Металлическое кольцо, подвешенное на нити к оси центробежной машины, как указано на рис. 33, равномерно вращается с угловой скоростью ω. Нить составляет угол α с осью. Найти расстояние от центра кольца до оси вращения.

Ответ. $x = \frac{g \operatorname{tg} \alpha}{\omega^2}$.

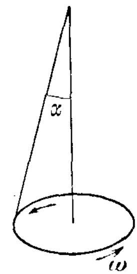

Рис. 33.

3. Однородный стержень длины l равномерно вращается вокруг свободной оси, перпендикулярной к стержню и проходящей через его центр. Какова должна быть угловая скорость вращения ω, при которой стержень еще не разрывается под действием внутренних напряжений, возникающих в нем при вращении? Максимальная сила натяжения, отнесенная к единице площади поперечного сечения стержня, равна T. Объемная плотность материала стержня равна ρ (см. также § 75, задача 4).

Ответ. $\rho l^2 \omega^2 < 8T$.

4. На прямоугольный трехгранный клин ABC массы M, лежащий на абсолютно гладкой горизонтальной плоскости, положен подобный же, но меньший клин BED массы m (рис. 34). Определить, на какое расстояние x сместится влево большой клин, когда малый клин соскользнет вниз и займет такое положение, что точка D совместится с C. Длины катетов AC и BE равны соответственно a и b.

Ответ. $x = \frac{m}{M+m}(a-b)$.

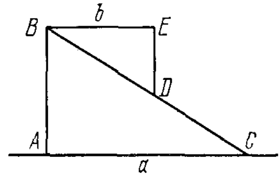

Рис. 34.

5. Если система состоит из частиц, движущихся с релятивистскими скоростями, то радиус-вектор ее центра масс определяется теми же формулами, что и в нерелятивистской механике, т. е.

$$\boldsymbol{R} = \sum m_i \boldsymbol{r}_i / \sum m_i.$$

Однако под m_i следует понимать *релятивистские массы* частиц. Следует учитывать также и *массы полей*, посредством которых осуществляется взаимодействие между частицами. Во время взаимодействия одни частицы могут исчезать, другие — появляться, *Положение так определенного* *центра масс меняется при переходе от одной системы отсчета к другой, движущейся относительно нее.* Если частицы *точечные* и взаимодействуют только *в моменты столкновений*, то вся масса будет сосредоточена только *в частицах*, а не в полях. Показать прямым дифференцированием, что в этом случае скорость центра масс изолированной системы не меняется во времени и определяется формулой

$$\dot{R}=\sum m_i\dot{r}_i/\sum m_i=p/\sum m_i,$$

где p — импульс системы, а суммирование, как и в предыдущем выражении, производится по всем частицам, входящим в нее. Например, если равномерно движущееся радиоактивное ядро распадается на лету, то центр масс образовавшихся осколков будет продолжать в точности такое же равномерное движение, т. е. движение с прежней постоянной скоростью и в прежнем направлении.

§ 20. Приведенная масса

1. Рассмотрим замкнутую систему, состоящую из двух взаимодействующих материальных точек с массами m_1 и m_2 (рис. 35). Уравнения движения этих точек можно записать в виде

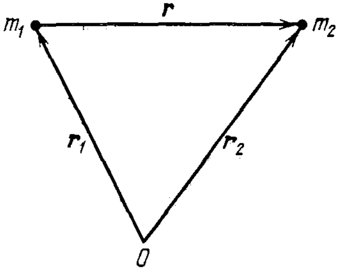

Рис. 35.

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}_1}{dt^2}=\frac{\boldsymbol{F}_1}{m_1},\qquad \frac{d^2\boldsymbol{r}_2}{dt^2}=\frac{\boldsymbol{F}_2}{m_2},\tag{20.1}$$

причем по третьему закону Ньютона $\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2$. Вычитая из одного уравнения другое, находим

$$\frac{d^2}{dt^2}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)=\frac{\boldsymbol{F}_2}{m_2}-\frac{\boldsymbol{F}_1}{m_1}=\boldsymbol{F}_2\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right).$$

Это уравнение описывает движение одной материальной точки относительно другой, так как разность $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$ есть радиус-вектор, проведенный от первой точки ко второй. Он однозначно определяет положение второй точки относительно первой. Введем обозначение

$$\frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2},\quad \text{или}\quad \mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}.\tag{20.2}$$

Тогда предыдущее уравнение перейдет в

$$\mu\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{F}_2.\tag{20.3}$$

Это уравнение формально аналогично второму закону Ньютона. Роль силы играет сила $\boldsymbol{F}_2$, действующая на вторую материальную точку, а роль массы — вспомогательная величина μ, называемая *приведенной массой*.

Разумеется, одно уравнение (20.3) не может быть эквивалентно двум исходным уравнениям (20.1). Однако такая эквивалентность