Эти формулы дают разложение скорости и ускорения на радиальные (направленные вдоль радиуса) и азимутальные (направленные по j, т. е. в сторону возрастания угла φ) составляющие:

$$v_r = \dot{r}, \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi}; \tag{46.13}$$

$$a_r = \ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r, \qquad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}. \tag{46.14}$$

5. С помощью соотношения (46.10) получить формулы для дифференцирования синуса и косинуса.

Решение. Рассмотрим единичный вектор $\boldsymbol{A}$, равномерно вращающийся вокруг начала координат O (рис. 127). Если координатные оси неподвижны, то

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} \cos \omega t + \boldsymbol{j} \sin \omega t.$$

Производная этого вектора по t равна

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{i} \frac{d}{dt} (\cos \omega t) + \boldsymbol{j} \frac{d}{dt} (\sin \omega t).$$

С другой стороны, ту же производную можно вычислить по формуле (46.10). Так как $\boldsymbol{\omega} = \omega \boldsymbol{k}$, то эта формула дает

$$\dot{\boldsymbol{A}} = \omega\, [\boldsymbol{k}\boldsymbol{A}] = \omega \cos \omega t\, [\boldsymbol{k}\boldsymbol{i}] + \omega \sin \omega t\, [\boldsymbol{k}\boldsymbol{j}] = \boldsymbol{j}\omega \cos \omega t - \boldsymbol{i}\omega \sin \omega t.$$

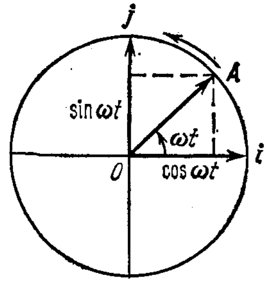

Рис. 127.

Сравнивая оба результата, получим

$$\frac{d}{dt} (\sin \omega t) = \omega \cos \omega t, \qquad \frac{d}{dt} (\cos \omega t) = -\, \omega \sin \omega t.$$

Можно сказать, что векторная формула (46.10) эквивалентна правилам дифференцирования синуса и косинуса.

§ 47. Теорема Эйлера. Общее движение твердого тела

1. Рассмотрим *плоское движение* твердого тела, т. е. такое движение, когда все точки тела движутся параллельно одной плоскости. Не теряя общности, можно считать само тело плоским, а движение происходящим в плоскости тела. Положение плоского тела однозначно определяется заданием положений каких-либо двух точек его. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением движения какой-либо одной прямой плоского тела. Пусть выбранная прямая твердого тела перешла из положения AB в положение A_1B_1 (рис. 128). Соединим точку A с точкой A_1, а точку B с точкой B_1. Из середин отрезков AA_1 и BB_1 восстановим перпендикуляры EO и DO, пересекающиеся в точке O. Докажем, что прямую AB можно перевести в положение A_1B_1 путем одного поворота вокруг точки O. Действительно, из построения следует, что точка O равноудалена от точек A и A_1, а также от точек B и B_1. В силу этого пря-

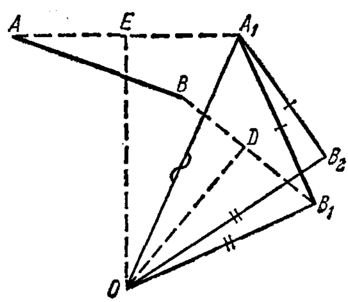

Рис. 128.

мую AB можно повернуть вокруг точки O так, чтобы точка A совместилась с точкой A_1. Докажем, что при этом точка B также совместится с точкой B_1. Для доказательства допустим, что точка B не совместилась с B_1, а заняла положение B_2. Разумеется, точка B_2 будет находиться на таком же расстоянии от O, что и точка B, а потому $OB_1 = OB_2$. Кроме того, в треугольниках OA_1B_1 и OA_1B_2 сторона OA_1 — общая, а стороны A_1B_1 и A_1B_2 равны, так как тело твердое, а потому расстояние между концами отрезка AB не меняется при его движении. Следовательно, треугольники OA_1B_1 и OA_1B_2 равны. Отсюда заключаем, что $\angle OA_1B_1 = \angle OA_1B_2$, так что точка B_2 должна совпадать с точкой B_1.

Таким образом, *при плоском движении твердое тело может быть переведено из любого положения в другое произвольное положение с помощью одного поворота вокруг некоторой оси*. Это положение является частным случаем *теоремы Эйлера* (1707—1783), доказываемой ниже.

Произвольное плоское движение тела можно разбить на ряд следующих друг за другом бесконечно малых перемещений. В результате получится ряд бесконечно близких положений *1*, *2*, *3*, *4*, ..., последовательно проходимых телом. Согласно доказанной теореме переход тела из положения *1* в положение *2* может быть осуществлен поворотом вокруг некоторой оси O_1; переход из положения *2* в положение *3* — поворотом вокруг другой бесконечно близкой оси O_2 и т. д. Если число промежуточных положений *1*, *2*, *3*, ... стремить к бесконечности, а смещение тела из каждого положения в соседнее — к нулю, то *произвольное плоское движение твердого тела может рассматриваться как вращение вокруг мгновенной оси, движущейся как в теле, так и в пространстве*.

2. Совершенно аналогично формулируется *теорема Эйлера*. Согласно теореме Эйлера *твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, может быть переведено из произвольного положения в другое произвольное положение путем поворота вокруг некоторой оси, проходящей через эту неподвижную точку*. Доказательство теоремы Эйлера проводится совершенно так же, как и соответствующей теоремы для плоского движения. Если одна из точек твердого тела C неподвижна, то его положение однозначно определяется заданием положений каких-либо двух точек, A и B, не лежащих на одной прямой с точкой C. В качестве точек A и B можно взять две точки на поверхности сферы с центром в точке C. Проведем через центр сферы C и точки A и B плоскость. Она пересечет сферу по дуге большого круга AB. (См. рис. 128. Мы не рисуем отдельно соответствующую сферу и дуги больших кругов, а пользуемся прежним плоским рисунком, мысленно заменяя, где это нужно, прямолинейные отрезки дугами больших кругов. Понятно, что центр сферы C на плоском рисунке изобразить нельзя.) Движение дуги AB по поверхности сферы однозначно определяет и движение всего твердого тела. Пусть выбранная дуга перешла из положения AB в положение A_1B_1. Соединим дугами больших кругов точку A с точкой A_1, а точку B с точкой B_1. Через середины этих дуг E и D проведем перпендикулярные к ним дуги больших кругов EO и DO, пересекающиеся в точке O сферы. Точку O соединим с центром сферы C прямой OC. Докажем, что дуга AB может быть переведена в положение A_1B_1 путем поворота вокруг оси CO. Действительно, по построению точки A и A_1, а также точки B и B_1 равноудалены от точки O. Ввиду этого твердое тело можно повернуть вокруг оси CO так, чтобы точка A перешла в положение A_1. Докажем, что при таком повороте точка B также перейдет в положение B_1. Для доказательства допустим, что точка B при повороте перешла не в положение B_1, а в положение B_2. Проведем дуги больших кругов OA_1, A_1B_2 и OB_2. Так как точка B_2 находится на том же расстоянии от O, что и точка B, то $\smile OB_1 = \smile OB_2$. Кроме того, в сферических треугольниках OA_1B_1 и OA_1B_2 дуга OA_1 — общая, а дуги A_1B_1 и A_1B_2 равны, так как тело твердое, и, следовательно, при его движении длина дуги AB не изменяется. Поэтому сферические треугольники OA_1B_1 и OA_1B_2 равны. Значит, $\angle OA_1B_1 = \angle OA_1B_2$, а потому точка B_2 должна совпадать с точкой B_1. Тем самым теорема Эйлера доказана.

Доказанная в начале этого параграфа теорема является частным случаем теоремы Эйлера, так как плоское движение плоского тела может рассматриваться как предельный случай движения по сферической поверхности бесконечно большого радиуса.

Рассуждая так же, как в случае плоского движения, из теоремы Эйлера можно вывести следующее следствие. *Любое движение твердого тела, имеющего одну неподвижную точку, можно рассматривать как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через эту неподвижную точку. С течением времени мгновенная ось, вообще говоря, непрерывно перемещается как в теле, так и в пространстве.*

3. Рассмотрим теперь самый общий случай движения твердого тела. Выберем в теле произвольную точку O. Всякое движение твердого тела можно разложить на поступательное со скоростью $\boldsymbol{v}_0$, равной скорости точки O, и вращательное вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Обозначая посредством $\boldsymbol{\omega}$ вектор угловой скорости мгновенного вращения, можем написать для скорости другой произвольной точки A твердого тела

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + [\boldsymbol{\omega r}], \tag{47.1}$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O в точку A (рис. 129). Скорость поступательного движения $\boldsymbol{v}_O$, конечно, зависит от выбора точки O. Но *угловая скорость* $\boldsymbol{\omega}$ *не зависит от положения точки O, к которой отнесено вращение твердого тела.* Поэтому *можно говорить об угловой скорости вращения твердого тела, не указывая эту точку.* Докажем это.

Выберем другую произвольную точку тела O' и отнесем к ней вращение твердого тела. Соответствующую угловую скорость вращения обозначим $\boldsymbol{\omega}'$. Тогда скорость $\boldsymbol{v}$ прежней точки A можно представить в другом виде:

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{O'}+[\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{r}'],$$

где $\boldsymbol{r}'$ — радиус-вектор, проведенный из O' в A. Так как речь идет о скорости одной и той же точки, то эта величина должна совпадать с (47.1). Это дает

$$\boldsymbol{v}_O+[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]=\boldsymbol{v}_{O'}+[\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{r}'].$$

Подставим сюда $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}+\boldsymbol{R}$, где $\boldsymbol{R}$ означает вектор $\overrightarrow{O'O}$. Кроме того, примем во внимание, что скорость точки O можно получить векторным сложением скорости точки O' и скорости вращения вокруг нее с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}'$, т. е.

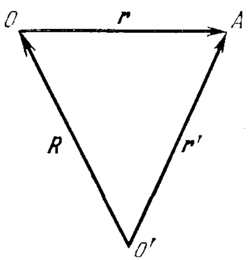

Рис. 129.

$$\boldsymbol{v}_O=\boldsymbol{v}_{O'}+[\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{R}].$$

С учетом этого получим

$$\boldsymbol{v}_{O'}+[\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{R}]+[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]=\boldsymbol{v}_{O'}+[\boldsymbol{\omega}'(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{R})],$$

или

$$[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]=[\boldsymbol{\omega}'\boldsymbol{r}].$$

В силу произвольности $\boldsymbol{r}$ отсюда следует $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$.

4. Допустим, что твердое тело вращается вокруг неподвижной точки. Примем эту точку за начало координат O. Кинетическая энергия такого тела, очевидно, равна

$$K=\frac{1}{2}\int \boldsymbol{v}^2\,dm,$$

где интегрирование ведется по всей массе тела. Воспользовавшись формулой $\boldsymbol{v}=[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]$, можем написать $\boldsymbol{v}^2=(\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})=([\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]\boldsymbol{v})$, или после перестановки порядка сомножителей $\boldsymbol{v}^2=(\boldsymbol{\omega}\,[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}])$. Так как $\boldsymbol{\omega}$ одинакова для всех точек тела, то

$$K=\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega}\int[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}]\,dm,$$

или

$$K=\frac{1}{2}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{\omega}), \qquad (47.2)$$

где $\boldsymbol{L}$ — момент импульса тела относительно точки O.

В общем случае векторы $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ направлены под углом друг к другу. В этом проще всего убедиться на примере одной материальной точки M, вращающейся вокруг неподвижной или мгновенной оси. Возьмем начало O на этой оси. Тогда

$$\boldsymbol{L}=m[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}]=m[\boldsymbol{r}[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]]=mr\boldsymbol{\omega}^2-m(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\omega})\boldsymbol{r}.$$

Последнее слагаемое в нуль, вообще говоря, не обращается, а потому в общем случае векторы $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не коллинеарны. Они коллинеарны только тогда, когда в качестве начала O взято основание перпендикуляра, опущенного из M на ось вращения. В этом случае момент $\boldsymbol{L}$ относительно точки O сводится к моменту относительно оси вращения. Обозначая последний посредством L_x, можем написать $L = L_x = I\omega$, где I — момент инерции точки относительно оси вращения. Таким образом, формула (47.2) переходит в $K = {}^1/_2\, L_x\omega = {}^1/_2\, I\omega^2$. Последняя формула справедлива не только для одной материальной точки, но и для всего тела, поскольку последнее можно рассматривать как систему материальных точек, вращающихся вокруг общей оси. Таким образом, формула (47.2) эквивалентна формуле (33.6), полученной ранее иным путем.

§ 48. Скатывание тел с наклонной плоскости

1. Пусть скатывающееся тело обладает *симметрией вращения* относительно геометрической оси C (рис. 130). Будем предполагать, что при движении не возникает скольжения. Это означает, что скорость тела в точке касания A равна нулю. Отсутствие скольжения обеспечивается действием сил со стороны наклонной плоскости на скатывающееся тело. Эти силы сводятся к силе нормального давления $\boldsymbol{F}_n$ и к касательной силе трения $\boldsymbol{F}_\tau$. При отсутствии скольжения сила $\boldsymbol{F}_\tau$ есть сила трения покоя или сила трения сцепления.

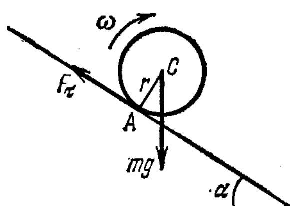

Рис. 130.

Величина силы $\boldsymbol{F}_\tau$ может принимать любое значение от 0 до kF_n, где k — коэффициент трения (см. § 17). При качении она устанавливается как раз такой, чтобы не было скольжения. Если касательная сила, требующаяся для этого, превышает kF_n, то чистое качение невозможно — оно будет сопровождаться скольжением.

Решим задачу о скатывании тела тремя различными способами.

Способ 1. Применим уравнение моментов относительно мгновенной оси вращения. При отсутствии скольжения мгновенная ось проходит через точку касания A. Так как мгновенная ось и ось, проходящая через центр масс C, движутся параллельно друг другу, то уравнение моментов имеет обычную простую форму

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = M_A, \tag{48.1}$$

где I_A — момент инерции скатывающегося тела относительно мгновенной оси, а M_A — момент внешних сил относительно той же оси. Внешними силами является сила тяжести $m\boldsymbol{g}$ и реакция опоры, действующая со стороны наклонной плоскости на скатывающееся