Последнее слагаемое в нуль, вообще говоря, не обращается, а потому в общем случае векторы $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ не коллинеарны. Они коллинеарны только тогда, когда в качестве начала O взято основание перпендикуляра, опущенного из M на ось вращения. В этом случае момент $\boldsymbol{L}$ относительно точки O сводится к моменту относительно оси вращения. Обозначая последний посредством L_x, можем написать $L = L_x = I\omega$, где I — момент инерции точки относительно оси вращения. Таким образом, формула (47.2) переходит в $K = {}^1/_2\, L_x\omega = {}^1/_2\, I\omega^2$. Последняя формула справедлива не только для одной материальной точки, но и для всего тела, поскольку последнее можно рассматривать как систему материальных точек, вращающихся вокруг общей оси. Таким образом, формула (47.2) эквивалентна формуле (33.6), полученной ранее иным путем.

§ 48. Скатывание тел с наклонной плоскости

1. Пусть скатывающееся тело обладает *симметрией вращения* относительно геометрической оси C (рис. 130). Будем предполагать, что при движении не возникает скольжения. Это означает, что скорость тела в точке касания A равна нулю. Отсутствие скольжения обеспечивается действием сил со стороны наклонной плоскости на скатывающееся тело. Эти силы сводятся к силе нормального давления $\boldsymbol{F}_n$ и к касательной силе трения $\boldsymbol{F}_\tau$. При отсутствии скольжения сила $\boldsymbol{F}_\tau$ есть сила трения покоя или сила трения сцепления.

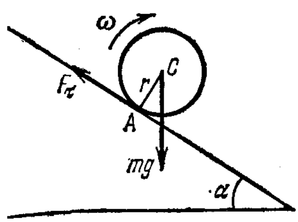


Рис. 130.

Величина силы $\boldsymbol{F}_\tau$ может принимать любое значение от 0 до kF_n, где k — коэффициент трения (см. § 17). При качении она устанавливается как раз такой, чтобы не было скольжения. Если касательная сила, требующаяся для этого, превышает kF_n, то чистое качение невозможно — оно будет сопровождаться скольжением.

Решим задачу о скатывании тела тремя различными способами.

Способ 1. Применим уравнение моментов относительно мгновенной оси вращения. При отсутствии скольжения мгновенная ось проходит через точку касания A. Так как мгновенная ось и ось, проходящая через центр масс C, движутся параллельно друг другу, то уравнение моментов имеет обычную простую форму

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = M_A, \tag{48.1}$$

где I_A — момент инерции скатывающегося тела относительно мгновенной оси, а M_A — момент внешних сил относительно той же оси. Внешними силами является сила тяжести $m\boldsymbol{g}$ и реакция опоры, действующая со стороны наклонной плоскости на скатывающееся тело. Сила реакции опоры выпадает из уравнения моментов, так как она проходит через ось A, и ее момент относительно этой оси равен нулю. Таким образом,

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = mgr \sin\alpha.$$

Обозначим v линейную скорость точки C. Она связана со скоростью v_A точки A тела соотношением $v = v_A + \omega r$. При отсутствии скольжения $v_A = 0$, а потому $v = \omega r$. Для линейного ускорения точки C получаем $a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$. Поэтому предыдущее уравнение дает

$$a = \frac{mgr^2}{I_A} \sin\alpha. \tag{48.2}$$

По теореме Гюйгенса — Штейнера $I_A = I_C + mr^2$, где I_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс C. Следовательно,

$$a = \frac{g \sin\alpha}{1 + \frac{I_C}{mr^2}}. \tag{48.3}$$

Преимущество рассмотренного способа состоит в том, что в исходное уравнение (48.1) совсем не входит неизвестная реакция опоры.

Способ 2. Применим уравнение моментов относительно оси, проходящей через центр масс C. Оно также имеет простой вид

$$I_C \frac{d\omega}{dt} = M_C,$$

где M_C — момент внешних сил относительно оси C. В это уравнение не войдет сила тяжести, так как она проходит через ось C. Момент создается силой реакции опоры. При этом играет роль только слагаемая F_τ этой силы, параллельная наклонной плоскости, т. е. сила трения сцепления. Ее момент $M_C = rF_\tau$, а потому

$$I_C \frac{d\omega}{dt} = rF_\tau.$$

Это уравнение содержит два неизвестных: угловое ускорение $\frac{d\omega}{dt}$ и силу F_τ. Недостающее уравнение дает теорема о движении центра масс:

$$m\frac{dv}{dt} = mg \sin\alpha - F_\tau. \tag{48.4}$$

Присоединив сюда прежнее соотношение $a = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt}$ и разрешив полученные уравнения относительно a, найдем прежний результат (48.3). Кроме того, получаем следующее выражение для силы трения сцепления:

$$F_\tau=\frac{I_C}{I_C+mr^2}mg\sin\alpha. \tag{48.5}$$

Способ 3. Применим закон сохранения энергии. Кинетическая энергия тела равна $K = {}^1/_2\, I_A\omega^2$. Поэтому ${}^1/_2\, I_A\omega^2 = mgh$, где h — высота, с которой опустилось тело при скатывании из состояния покоя. Если оно прошло вдоль наклонной плоскости путь x, то $h = x\sin\alpha$, и, следовательно,

$$\frac{1}{2}I_A\omega^2=\frac{I_A}{2r^2}v^2=mgx\sin\alpha.$$

Дифференцируя это соотношение по времени и замечая, что $\frac{dx}{dt}=v$, снова получим формулу (48.2).

2. Так как на скатывающееся тело действует сила трения, то может возникнуть вопрос, почему в рассматриваемой задаче можно применять закон сохранения энергии в его механической форме. Ответ заключается в том, что *при отсутствии скольжения сила трения приложена к тем точкам тела, которые лежат на мгновенной оси вращения.* Мгновенная скорость таких точек равна нулю, а потому приложенная к ним сила трения сцепления *работы не производит* и не влияет на величину полной кинетической энергии скатывающегося тела. Роль силы трения сцепления $\boldsymbol{F}_\tau$ сводится к тому, чтобы привести тело во вращение и обеспечить чистое качение. При наличии силы трения сцепления работа силы тяжести идет на увеличение кинетической энергии не только поступательного, но и вращательного движения тела.

3. Комбинация I_C/m, входящая в формулу (48.3), имеет размерность квадрата длины. Введем для нее обозначение

$$\rho^2=\frac{I_C}{m}$$

и назовем ρ *радиусом инерции* тела. Формула (48.3) принимает вид

$$a=\frac{g\sin\alpha}{1+(\rho/r)^2}. \tag{48.6}$$

Величину r можно назвать *радиусом качения* тела. Радиус качения есть расстояние между центром масс скатывающегося тела и мгновенной осью вращения. Для цилиндра или шара радиус качения равен геометрическому радиусу этих тел.

Ускорение скатывающегося тела и приобретенная им скорость поступательного движения зависят от отношения радиуса инерции к радиусу качения. Чем больше это отношение, тем медленнее скатывается тело. Особенно просто этот результат можно уяснить с помощью закона сохранения энергии. Если тело скатывается с высоты h, то вся его потенциальная энергия mgh переходит в кинетическую. Последняя складывается из кинетических энергий поступательного и вращательного движений. Полная кинетическая энергия тела в нижнем положении равна mgh, т. е. зависит только от высоты h. Чем большая доля кинетической энергии приходится на вращение тела, тем медленнее оно скатывается с наклонной плоскости. Отношение кинетической энергии вращательного движения к кинетической энергии поступательного движения равно

$$\frac{E_{\text{вр}}}{E_{\text{пост}}} = \frac{I_C \omega^2}{mv^2} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^2.$$

Максимальное значение для ускорения a получается в случае чистого скольжения при отсутствии сил трения.

Пользуясь выражениями для моментов инерции, полученными в § 36, легко найти соответствующие радиусы инерции, а затем вычислить ускорение a. Таким путем получим следующие результаты.

Полый цилиндр (без торцов): $\rho^2 = r^2$, $a = \frac{g}{2}\sin\alpha$.

Сплошной цилиндр: $\rho^2 = \frac{r^2}{2}$, $a = \frac{2}{3} g \sin\alpha$.

Полый шар: $\rho^2 = \frac{2}{3} r^2$, $a = \frac{3}{5} g \sin\alpha$.

Сплошной шар: $\rho^2 = \frac{2}{5} r^2$, $a = \frac{5}{7} g \sin\alpha$.

Полые тела скатываются медленнее, чем сплошные тела той же геометрической формы. При одинаковых массах моменты инерции полых тел больше, чем сплошных. Поэтому на долю вращательного движения у полых тел приходится относительно бо́льшая кинетическая энергия, чем у сплошных.

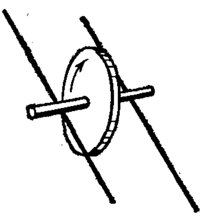


Рис. 131.

Возьмем маховичок, насаженный на ось. Положим ось на наклонные рельсы, чтобы маховичок находился между ними (рис. 131). Радиус качения в этом случае совпадает с радиусом оси маховичка r. Отношение ρ/r здесь велико, и маховичок будет скатываться очень медленно.

4. Когда угол наклона α равен нулю, ускорение a обращается в нуль. Вместе с ним обращается в нуль и сила трения сцепления F_τ, как это видно из формулы (48.5). Таким образом, твердое тело, обладающее осевой симметрией, например цилиндр или шар, при отсутствии скольжения катится по твердой горизонтальной плоскости прямолинейно и равномерно, совсем не испытывая силы сопротивления. Этот результат относится к идеализированным моделям тел. Тело и плоскость, по которой оно катится, должны быть идеально твердыми и гладкими. Для реальных тел он не справедлив или справедлив только приближенно. В этом случае тело и плоскость деформируются. На плоскости возникает углубление,

тело соприкасается с ней не в одной геометрической точке, а на некотором участке конечной площади. В результате при качении по горизонтальной плоскости возникает сила, замедляющая движение. Это есть сила *трения качения*. Она обычно мала по сравнению с силой трения скольжения, и во многих случаях ею можно пренебречь (см. § 17).

ЗАДАЧИ

1. Определить ускорение a центра шарика, скатывающегося без скольжения по наклонному желобу, образующему угол α с горизонтом. Форма поперечного сечения желоба изображена на рис. 132, *а* и *б*.

Ответ. а) $a=\frac{R^2-h^2}{\rho^2+(R^2-h^2)} g\sin\alpha$, где ρ — радиус инерции шарика, $2h$ — ширина желоба; б) $a=\frac{R^2}{4\rho^2+R^2} g\sin\alpha$.

2. С какой высоты H должен скатиться по наклонному желобу шарик с радиусом инерции ρ, для того чтобы он смог без скольжения описать мертвую петлю по желобу радиуса R? Радиусом шарика r по сравнению с R пренебречь.

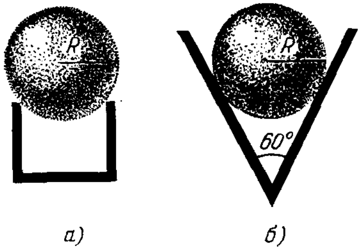


Рис. 132.

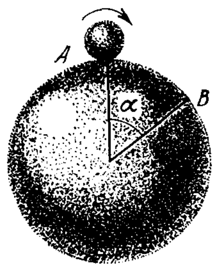


Рис. 133.

Ответ. $H=\frac{5r^2+\rho^2}{2r^2} R$. Для сплошного шара $H=\frac{27}{10}R$, для полого $H=\frac{17}{6}R$.

3. Цилиндр или шар радиуса r катится по плоскости, наклоненной под углом α к горизонту. Определить, при каком значении угла α начнется качение со скольжением, если коэффициент трения скольжения между катящимся телом и плоскостью равен k.

Ответ. $\operatorname{tg}\alpha > \frac{r^2+\rho^2}{\rho^2} k$, где ρ — радиус инерции катящегося тела. Для сплошного шара $\operatorname{tg}\alpha > {}^7/_2\, k$, для полого $\operatorname{tg}\alpha > {}^5/_2 k$. Для сплошного цилиндра $\operatorname{tg}\alpha > 3k$, для полого $\operatorname{tg}\alpha > 2k$.

4. Шарик радиуса r скатывается без начальной скорости и без скольжения по поверхности сферы из самого верхнего положения A (рис. 133). Определить точку, в которой он оторвется от сферы и начнет свободно двигаться под действием силы тяжести.

Ответ. Положение точки B, в которой шарик отрывается от сферы и начинает свободно двигаться под действием силы тяжести, определяется углом α, косинус которого равен

$$\cos\alpha = \frac{2r^2}{3r^2+\rho^2},$$

где ρ — радиус инерции шарика. Результат не зависит от радиуса сферы. Для сплошного шарика $\cos\alpha = {}^{10}/_{17}$, для полого $\cos\alpha = {}^{6}/_{11}$.

5. Цилиндр массы M и радиуса r катится по горизонтальной поверхности стола (рис. 134). Обвитая вокруг цилиндра нить горизонтально проходит через неподвижный блок, а к другому концу ее подвешен груз массы m. Пренебрегая массами блока и нити, найти ускорение центра масс цилиндра.

Ответ. $a = \dfrac{2mr^2}{M(\rho^2 + r^2) + 4mr^2}\, g$, где ρ — радиус инерции цилиндра. Для сплошного цилиндра $a = \dfrac{4m}{3M + 8m}\, g$, для полого $a = \dfrac{m}{M + 2m}\, g$.

6. По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, скатывается массивный полый цилиндр массы M и радиуса r. По поверхности цилиндра бежит

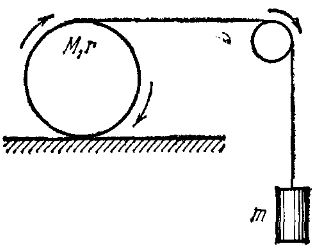


Рис. 134.

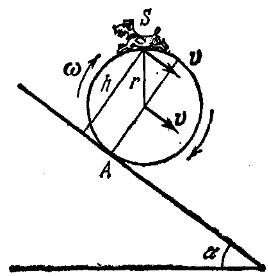


Рис. 135.

собака таким образом, что она все время занимает наивысшее положение на поверхности цилиндра. Определить, с каким ускорением a скатывается цилиндр, если масса собаки m.

Решение. Метод решения этой задачи поучителен. Для решения проще всего воспользоваться уравнением моментов относительно мгновенной оси вращения A (рис. 135). При этом все движения должны рассматриваться относительно системы отсчета, в которой наклонная плоскость неподвижна. В этой системе собака, все время находящаяся в наивысшей точке цилиндра S, движется параллельно наклонной плоскости и притом с той же скоростью v, с какой движется центр цилиндра. Момент количества движения системы L слагается из момента количества движения цилиндра $I\omega$ и момента количества движения собаки mvh, где $h = r(1 + \cos\alpha)$ — длина перпендикуляра, опущенного на наклонную плоскость из точки S. Итак,

$$L = I\omega + mrv(1 + \cos\alpha),$$

причем под I следует понимать момент инерции цилиндра относительно мгновенной оси, т. е. величину $2Mr^2$. Из-за отсутствия скольжения $v = \omega r$, а потому

$$L = [2M + m(1 + \cos\alpha)]\, rv.$$

Так как центр масс системы и мгновенная ось A движутся параллельно, то производная L по времени должна равняться моменту внешних сил относительно мгновенной оси A, т. е. $(M + m)\, gr \sin\alpha$. Приравнивая оба выражения, получим

$$a = \frac{M + m}{2M + m(1 + \cos\alpha)}\, g \sin\alpha.$$

7. По поверхности большого полого цилиндра, лежащего на горизонтальной плоскости, начинает бежать собака массы m в направлении к наивысшей точке A и притом так, что она все время находится на одном и том же расстоянии

от этой точки (рис. 136). В результате цилиндр начинает катиться по горизонтальной плоскости без скольжения. Масса цилиндра M, а угол AOm равен α. Определить: 1) ускорение оси цилиндра a; 2) силу трения между цилиндром и плоскостью во время качения $F_{\text{тр}}$; 3) время t, в течение которого собака способна оставаться на указанном расстоянии от точки A, если максимальная полезная мощность, которую она способна развить, равна $P_{\text{макс}}$. Какая при этом будет достигнута максимальная скорость $v_{\text{макс}}$ поступательного движения цилиндра? (Полезной мощностью здесь называется мощность, которая затрачивается собакой на увеличение кинетической энергии системы.)

Ответ. $a=\dfrac{mg\sin\alpha}{2M+m(1+\cos\alpha)}$, $F_{\text{тр}}=(M+m)\,a$,

$$t=\frac{P_{\text{макс}}}{2M+m}\frac{1}{a^2},\quad v_{\text{макс}}=\frac{P_{\text{макс}}}{(2M+m)\,a}.$$

8. Определить ускорение a, с которым цилиндрическая бочка, целиком заполненная жидкостью, скатывается без скольжения с наклонной плоскости,

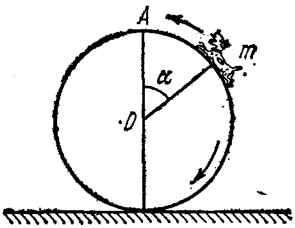


Рис. 136.

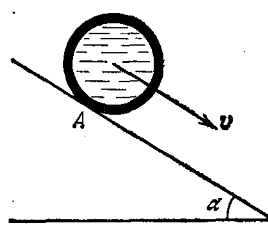


Рис. 137.

образующей угол α с горизонтом (рис. 137). Трение между жидкостью и стенками бочки считать пренебрежимо малым.

Решение. При отсутствии трения между жидкостью и стенками бочки вращение бочки не передается жидкости. Жидкость движется поступательно как целое со скоростью v, равной скорости движения центра масс. Момент количества движения системы относительно мгновенной оси A равен $L=I_A\omega+mRv$, где R — внешний радиус бочки, I_A — момент инерции ее относительно мгновенной оси A, m — масса жидкости. Из-за отсутствия скольжения $v=\omega R$, так что

$$L=\left(\frac{I_A}{R}+mR\right)v.$$

Центр масс бочки движется параллельно мгновенной оси, а потому

$$\frac{dL}{dt}=\left(\frac{I_A}{R}+mR\right)\frac{dv}{dt}=(M+m)\,Rg\sin\alpha,$$

где M — масса бочки. Отсюда

$$a=\frac{(M+m)\,R^2}{I_A+mR^2}\,g\sin\alpha.$$

В предельном случае, когда бочка не заполнена жидкостью ($m=0$), получается ранее выведенная формула (48.2). В другом предельном случае, когда толщина стенок бочки пренебрежимо мала по сравнению с радиусом R, $I_A=2MR^2$,

$$a=\frac{M+m}{2M+m}\,g\sin\alpha.$$

При этом мы не учитывали моменты инерции днищ бочки, считая их пренебрежимо малыми.

Читателю рекомендуется решить ту же задачу с помощью уравнения моментов относительно центра масс, а также с помощью уравнения сохранения энергии.

9. Диск Максвелла подвешен на очень длинных нитях (рис. 138). Части нитей длины $l = 50$ см каждая были намотаны на ось диска, после чего диск стал опускаться под действием силы тяжести. Достигнув нижнего положения, диск стал подниматься вверх, сообщив «рывок» нитям. Найти ускорение диска и натяжение нити во время его опускания и поднятия, а также оценить приближенно натяжение нити во время рывка. Масса диска $M = 1$ кг, его радиус $R = 10$ см, радиус оси $r = 0{,}5$ см. Растяжением нити во время рывка пренебречь. (Сравните эту задачу с задачей 2 к § 37.)

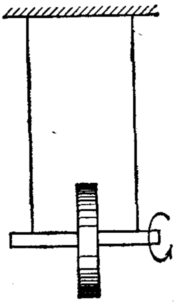


Рис. 138.

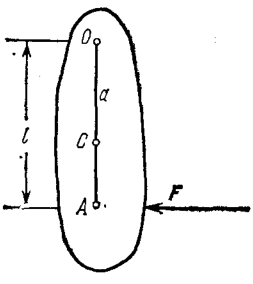


Рис. 139.

Ответ. Пока движение совершается без рывка, диск опускается и поднимается с одним и тем же ускорением, направленным вниз:

$$a = \frac{2r^2}{R^2 + 2r^2} g.$$

Натяжение нити при опускании и поднятии диска также одно и то же и равно

$$T_0 = \frac{Mg}{2}\left(1 - \frac{a}{g}\right) \approx 4{,}83 \text{ Н}.$$

Во время рывка нить испытывает дополнительное натяжение ΔT, определяемое приближенным выражением

$$\Delta T \approx \frac{l}{\pi r} \frac{2a}{g} Mg \approx 3{,}14 \text{ Н}.$$

Полное натяжение нити во время рывка $T = T_0 + \Delta T \approx 8{,}0$ Н.

10. На каком расстоянии l от оси баллистического маятника должно находиться место попадания горизонтально летящего снаряда, чтобы ось маятника при ударе снаряда не испытывала добавочной нагрузки?

Решение. Пусть F — горизонтальная сила, с которой ударяющий снаряд действует на маятник (рис. 139). Уравнение моментов относительно точки подвеса O дает

$$I \frac{d\omega}{dt} = Fl.$$

Так как при ударе ось маятника не испытывает дополнительной нагрузки, то на основании теоремы о движении центра масс можно написать

$$m \frac{dv}{dt} = F,$$

где v — скорость центра масс, m — масса маятника. Массой снаряда пренебрегаем. Почленным делением из этого и предыдущего уравнений исключаем силу F и получаем

$$l = \frac{I}{m} \frac{d\omega}{dv}.$$

Если a — расстояние между точкой подвеса и центром масс маятника, то $v = \omega a$. В результате находим

$$l = \frac{I}{ma}.$$

Отсюда видно, что l есть приведенная длина физического маятника, а точка A совпадает с центром качания его. Соответствующая ей точка подвеса маятника O называется *«центром удара»*. Кузнец точно знает, в каком месте нужно держать рукоятку своего тяжелого молота (именно — в центре удара), чтобы при ударе не ощущать в руке неприятную отдачу.

11. Каким местом шашки следует наносить удар по лозе, чтобы при рубке не ощущалась неприятная отдача? Шашку считать однородной полосой длины l, которую при ударе держат за конец.

Ответ. Расстояние от руки до места удара должно составлять $2l/3$.

12. Твердый цилиндр или шар, положенный на твердую горизонтальную плоскость, катится по ней со скольжением. Показать, что во время качения поступательная и вращательная скорости этого тела связаны соотношением

$$mrv + I\omega = \text{const}, \tag{48.7}$$

где I — момент инерции относительно геометрической оси тела.

Решение. Уравнения движения центра масс и моментов имеют вид

$$m\frac{dv}{dt} = \pm F, \qquad I\frac{d\omega}{dt} = \mp M = \mp rF.$$

Верхний знак относится к случаю, когда сила трения F направлена вперед (поступательное движение ускоряется, вращение замедляется), нижний — когда F направлена назад (поступательное движение замедляется, вращение ускоряется). Исключая F и dt, найдем в обоих случаях $mr\,dv = -I\,d\omega$, откуда и следует (48.7).

13. Согласно уравнению (48.7) качение твердого тела по горизонтальной плоскости не может прекратиться, если нет никаких дополнительных сил, помимо горизонтальной силы трения, действующей в точке касания. В чем причина расхождения этого вывода с опытом?

Решение. Реальные тела деформируемы. На плоскости, по которой катится тело, возникает углубление. Силы трения, действующие на катящееся тело, на рис. 140 изображены маленькими стрелками, их результирующая $F = \overrightarrow{AB}$. Ясно, что момент сил трения M больше момента результирующей, т. е. $M > rF$ (F и M — величины положительные). Из уравнений $m\,dv = \pm F\,dt$, $I\,d\omega = \mp M\,dt$ почленным делением и умножением на r получаем

$$mrdv + Id\omega(rF/M) = 0.$$

С учетом неравенства $rF < M$ отсюда следует $mr\ dv + I\ d\omega < 0$, или

$$\frac{d}{dt}(mrv + I\omega) < 0. \tag{48.8}$$

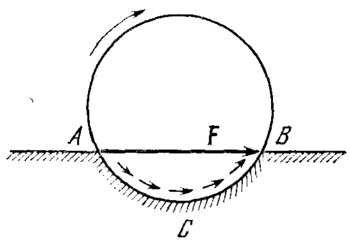


Рис. 140.

Таким образом, в случае реального качения величина $mrv + I\omega$ убывает со временем и в конце концов обращается в нуль.

14. Сплошному однородному шару радиуса r, лежащему на горизонтальной плоскости, в момент $t = 0$ сообщена скорость v_0 без вращения. Учитывая трение скольжения, но пренебрегая трением качения, найти угловую скорость шара, когда его движение перейдет в чистое качение. Определить потерю кинетической энергии на трение.

Решение. На основании (48.7)

$$mrv_0 = mrv + I\omega = (mr^2 + I)\,\omega,$$

где v — поступательная, а ω — вращательная скорости шара после установления чистого качения. Отсюда и найдется искомая угловая скорость ω. Потеря кинетической энергии равна

$$\Delta K=\frac{1}{2}\frac{I}{I+mr^2}mv_0^2=\frac{mv_0^2}{7}.$$

15. Сплошной однородный шар радиуса r, вращающийся вокруг горизонтального диаметра с угловой скоростью ω_0, ставится на горизонтальную плоскость без сообщения ему поступательного движения. Учитывая трение скольжения, но пренебрегая трением качения, найти линейную скорость v центра шара, когда его движение перейдет в чистое качение. Определить потерю кинетической энергии на трение.

Ответ. $v=\frac{Ir}{I+mr^2}\omega_0=\frac{2}{7}r\omega_0$, $\Delta K=\frac{1}{2}\frac{mr^2}{I+mr^2}\cdot I\omega_0^2=\frac{1}{7}mr^2\omega_0^2$.

16. Бильярдный шар катится без скольжения по горизонтальной плоскости со скоростью v и ударяется в покоящийся такой же бильярдный шар, причем *линия центров параллельна скорости движения*. Определить скорости обоих шаров после того, как их движения перейдут в чистые качения. Какая доля первоначальной кинетической энергии перейдет в тепло? Считать, что при столкновении шаров передачи вращательного движения не происходит. Потерей энергии на трение при чистом качении пренебречь.

Ответ. Скорость первого шара $v_1={}^2/_7 v$, второго $v_2={}^5/_7 v$. Потеря кинетической энергии на трение составляет ${}^{20}/_{49}$ начального значения кинетической энергии.

17. Два одинаковых бильярдных шара катятся без скольжения навстречу друг другу с одной и той же скоростью v_0 и претерпевают упругий удар. Предполагая, что удар центральный и за время соударения шаров угловые скорости не изменяются, вычислить скорость каждого шара после столкновения, когда установится чистое качение.

Решение. При столкновении шары обмениваются поступательными скоростями, тогда как вращательные скорости их сохраняются неизменными. Очевидно, достаточно найти движение одного из шаров. Непосредственно после столкновения начальные скорости рассматриваемого шара будут $v_{\text{нач}}=-v_0$, $\omega_{\text{нач}}=\omega_0=v_0/r$. Поэтому на основании (48.7) для движения шара после столкновения можно написать $mvr+I\omega=-mv_0r+I\omega_0$. После установления чистого качения $v=\omega r$, и следовательно,

$$v=\frac{I-mr^2}{I+mr^2}v_0=-\frac{3}{7}v_0.$$

18. Бильярдный шар, катящийся без скольжения со скоростью v_0, отражается упруго при нормальном столкновении с неподвижной стенкой. Предполагая, что за время соударения угловая скорость шара не меняется, определить его скорость v после отражения, когда движение перейдет в чистое качение.

Ответ. $v=\frac{I-mr^2}{I+mr^2}v_0=\frac{3}{7}v_0$.

19. Как надо ударить кием по бильярдному шару, чтобы сила трения шара о сукно бильярдного стола заставляла его двигаться: а) ускоренно, б) замедленно, в) равномерно? Предполагается, что удар наносится горизонтально в вертикальной плоскости, проходящей через центр шара и точку касания его с плоскостью бильярдного стола.

Ответ. Шар будет двигаться равномерно, если точка удара лежит выше его центра на расстоянии ${}^2/_5$ радиуса. Такие удары называются *нормальными*. Если она лежит еще выше, то движение шара будет ускоренным. Если же точка удара лежит ниже, то шар будет двигаться замедленно. Соответствующие удары называют *высокими* и *низкими*. Решение получено в предположении, что сила трения шара о плоскость стола пренебрежимо мала по сравнению с силой, с которой на шар действует кий во время удара.

20. Как надо ударить кием по бильярдному шару, чтобы при столкновении с другим (неподвижным) шаром: а) оба шара стали двигаться вперед (*удар с накатом*), б) первый шар остановился, а второй двигался вперед, в) второй шар двигался вперед, а первый откатился назад (*удар с оттяжкой*)? Относительно направления и плоскости удара ввести те же предположения, что и в предыдущей задаче.

Ответ. Случай а) реализуется при высоких ударах, случай б) — при нормальных, случай в) — при низких.

21. Вращающийся с угловой скоростью ω_0 сплошной однородный цилиндр радиуса r ставится без начальной поступательной скорости у основания наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтальной плоскостью, и начинает вкатываться вверх. Определить время, в течение которого цилиндр достигает наивысшего положения на наклонной плоскости.

Решение. Пусть F — сила трения, действующая на цилиндр в месте соприкосновения его с наклонной плоскостью (рис. 141). Она заставляет цилиндр подниматься по наклонной плоскости. Сначала, пока не установилось чистое качение, F является силой трения скольжения. После перехода движения в чистое качение F переходит в силу трения покоя (сцепления). Однако, независимо от характера движения, оно всегда подчиняется уравнению движения центра масс

$$m\frac{dv}{dt}=F-mg\sin\alpha$$

и уравнению моментов (относительно геометрической оси цилиндра)

$$I\frac{d\omega}{dt}=-Fr.$$

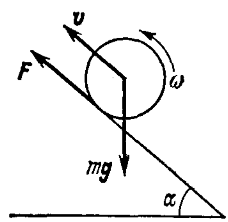


Рис. 141.

Исключая F, получим

$$mr\frac{dv}{dt}=-I\frac{d\omega}{dt}-mgr\sin\alpha.$$

Интегрирование этого уравнения с учетом начального условия ($\omega=\omega_0$ при $t=0$) дает

$$mrv=I(\omega_0-\omega)-mgrt\sin\alpha.$$

Это соотношение справедливо в течение всего времени движения, независимо от того, происходит ли оно со скольжением или является чистым качением. В наивысшей точке должно быть $v=0$. Отсюда следует, что в той же точке $\omega=0$. В противном случае цилиндр продолжал бы вкатываться и рассматриваемая точка не была бы наивысшей. Поэтому время подъема t найдется, если в предыдущем уравнении положить $v=\omega=0$. Это дает

$$t=\frac{I\omega_0}{mgr\sin\alpha}=\frac{r\omega_0}{2g\sin\alpha}.$$

Любопытно, что время поднятия t не зависит от коэффициентов трения между цилиндром и наклонной плоскостью. Результат не изменился бы даже тогда, когда коэффициент трения стал переменным. Решение предполагает, однако, что трение достаточно велико, чтобы цилиндр мог вкатываться на наклонную плоскость. При недостаточном трении будет происходить лишь замедление скорости вращения цилиндра. Нетрудно подсчитать, что время замедления определяется прежней формулой.

Напротив, время обратного скатывания цилиндра вниз, а также наибольшая высота поднятия его зависят от коэффициента трения. Такое различие объясняется тем, что скатывание цилиндра все время является чистым качением. Поднятие же его вверх сначала происходит со скольжением, а затем переходит в чистое качение.

22. Считая в предыдущей задаче коэффициент трения скольжения k цилиндра о наклонную плоскость заданным и постоянным, определить: 1) ускорение цилиндра a_1, когда качение происходит со скольжением; 2) время t_1, по истечении которого наступает чистое качение; 3) высоту H_1, которой достигает цилиндр, прежде чем начинается чистое качение; 4) ускорение a_2 при чистом качении; 5) дополнительную высоту H_2, на которую поднимется цилиндр при чистом качении; 6) полную высоту поднятия H; 7) время обратного скатывания цилиндра вниз $\bar{t}$. Предполагается, что $k > \operatorname{tg}\alpha$.

Ответ. $a_1 = g\,(k\cos\alpha - \sin\alpha)$, направлено вверх;

$$t_1 = \frac{I\omega_0 r}{(I+mr^2)\,a_1 + mr^2 g\sin\alpha} = \frac{\omega_0 r}{(3k\cos\alpha - \sin\alpha)\,g};$$

$$H_1 = \frac{1}{2}\,a_1 t_1^2\sin\alpha; \quad a_2 = \frac{mr^2}{I+mr^2}\,g\sin\alpha = \frac{2}{3}\,g\sin\alpha; \quad H_2 = \frac{a_1}{a_2}\,H_1;$$

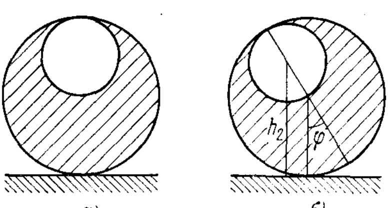
$$H = H_1 + H_2 = \frac{k\cos\alpha - \sin\alpha}{4g\,(3k\cos\alpha - \sin\alpha)}\,\omega_0^2 r^2;$$

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{2H}{a_2\sin\alpha}} = \frac{\omega_0 r_0}{2g\sin\alpha}\sqrt{\frac{3\,(k\cos\alpha - \sin\alpha)}{3k\cos\alpha - \sin\alpha}}.$$

23. Вращающийся с угловой скоростью ω_0 сплошной однородный цилиндр массы m_1 ставится без начальной поступательной скорости на длинную доску массы m_2, лежащую на гладкой горизонтальной плоскости. Начальная скорость доски равна нулю. Пренебрегая силой трения качения, но учитывая трение скольжения между доской и цилиндром, найти угловую скорость вращения цилиндра после того, как его движение перейдет в чистое качение. Доска предполагается настолько длинной, что чистое качение успевает установиться до того, как цилиндр скатится с доски.

Ответ. $\omega = \dfrac{m_1 + m_2}{m_1 + 3m_2}\,\omega_0.$

24. В сплошном однородном цилиндре радиуса R сделана цилиндрическая полость радиуса $R/2$ с осью, проходящей через середину радиуса цилиндра (рис. 142, *а*). Определить период малых колебаний T, которые возникнут, если положить цилиндр на горизонтальную плоскость и дать ему возможность кататься по ней без скольжения.



а) *б)*

Рис. 142.

Решение. Задача сводится к нахождению выражений для потенциальной и кинетической энергий системы. С этой целью мысленно заполним полость тем же веществом, из которого сделан цилиндр. Образовавшийся таким образом сплошной однородный цилиндр назовем цилиндром *1*, а цилиндр вдвое меньшего радиуса, заполняющий полость, — цилиндром *2*. Массы цилиндров обозначим соответственно m_1 и m_2. Энергия системы, как потенциальная, так и кинетическая, будет равна разности энергий цилиндров *1* и *2*. При повороте системы из положения равновесия на угол φ (рис. 142, *б*) центр масс цилиндра *1* остается на прежней высоте, его потенциальная энергия U_1 не изменяется. Потенциальная же энергия цилиндра *2* становится равной $U_2 = m_2 g h_2$, где $h_2 = R + \dfrac{R}{2}\cos\varphi$ — высота центра масс этого цилиндра над горизонтальной плоскостью, на которой находится система. Полная потенциальная энергия всей системы

$$U = U_1 - U_2 = \text{const} - m_2 gR\left(1 + \frac{1}{2}\cos\varphi\right).$$

Единственное переменное слагаемое, которое она содержит, есть $-{}^1/_2 m_2 gR\cos\varphi$. Поэтому при надлежащем выборе аддитивной постоянной величину U всегда можно представить в виде

$$U = \text{const} + \frac{1}{2}\,m_2 gR\,(1 - \cos\varphi) = \text{const} + m_2 gR\,\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

или для малых углов φ

$$U \approx \text{const} + \frac{1}{4}\,m_2 gR\varphi^2.$$

Кинетическая энергия системы $K = {}^1/_2\,(I_1 - I_2)\dot{\varphi}^2$, где I_1 и I_2 — моменты инерции цилиндров относительно мгновенной оси. При изменении угла φ величины I_1 и I_2 изменяются. Но для малых колебаний этими изменениями можно пренебречь и отнести I_1 и I_2 к тому моменту, когда система находится в положении равновесия. В этом положении с помощью теоремы Гюйгенса — Штейнера нетрудно получить

$$I_1 = \frac{3}{2}\,m_1 R^2, \quad I_2 = \frac{19}{8}\,m_2 R^2.$$

Приняв еще во внимание, что $m_1 = 4m_2$, найдем

$$K = \frac{29}{16}\,m_2 R^2\dot{\varphi}^2.$$

Из полученных выражений для U и K заключаем, что малые колебания системы будут гармоническими с периодом

$$T = \pi\sqrt{\frac{29R}{g}}.$$

25. Большой однородный свинцовый шар массы M лежит на плоской горизонтальной поверхности. Небольшая пуля массы m выпущена из ружья горизонтально со скоростью V в направлении к центру шара. После выстрела пуля застревает внутри шара. Определить линейную скорость шара v после того, как его движение перейдет в чистое качение. При рассмотрении движения шара после удара считать его однородным, пренебрегая массой застрявшей пули. Трением качения пренебречь.

Ответ. $v = \frac{5}{7}\frac{m}{M}V$.

26. Шар массы $M = 1000$ г, лежащий на горизонтальной плоскости, пробивается по диаметру пулей, летящей горизонтально с начальной скоростью $V_0 = 500$ м/с. После удара шар начинает скользить по плоскости. Спустя некоторое время его движение переходит в чистое качение с постоянной скоростью $v = 3$ м/с. Определить скорость пули V после вылета ее из шара, если масса пули $m = 10$ г. Трением качения пренебречь.

Ответ. $V = V_0 - \frac{7}{5}\frac{M}{m}v = 80$ м/с.

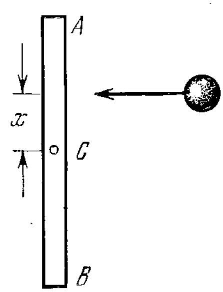


Рис. 143.

27. На гладком горизонтальном столе лежит однородный стержень длины l, который может двигаться по столу без трения (рис. 143). В начальный момент, когда скорость стержня равна нулю, в него ударяется шарик, движущийся перпендикулярно к стержню. На каком расстоянии x от центра стержня C

ударился шарик, если непосредственно после удара концы стержня A и B начали двигаться со скоростями v_A и v_B соответственно? (Скорости v_A и v_B считаются положительными, когда они направлены в ту же сторону, что и скорость шарика до удара, и отрицательными в противоположном случае.)

Ответ. $x=\frac{l}{6}\frac{v_A-v_B}{v_A+v_B}$. Результат не зависит от характера удара.

28. На идеально гладкой горизонтальной поверхности лежит стержень длины l и массы M, который может скользить по этой поверхности без трения (см. рис. 143). В одну из точек стержня ударяет шарик массы m, движущийся перпендикулярно к стержню. На каком расстоянии x от середины стержня должен произойти удар, чтобы шарик передал стержню всю свою кинетическую энергию? Удар считать абсолютно упругим. При каком соотношении масс M и m это возможно?

Ответ. $x=\frac{l}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{M}{m}-1}$. Для возможности описанного процесса необходимо $M \geqslant m$. Условие $x \leqslant l/2$ дает еще $M \leqslant 4m$.

29. На гладком горизонтальном столе лежит однородный упругий стержень длины l и массы M. В конец стержня ударяет упругий шарик массы m, движущийся со скоростью v перпендикулярно к стержню. Найти значение энергии деформации системы в момент, когда она максимальна. Трением между стержнем и столом пренебречь.

Ответ. $U=\frac{M}{M+4m}\frac{mv^2}{2}$. В предельных случаях 1) $M=0$ и 2) $M=\infty$ получаем 1) $U=0$, 2) $U={}^1/_2mv^2$.

30 На гладком горизонтальном столе лежит однородный твердый стержень длины l и массы M, в край которого ударяет твердый шарик массы m, движущийся со скоростью v_0, перпендикулярной к оси стержня. Считая удар идеально упругим и предполагая, что силы трения между поверхностью стола и лежащими на ней телами пренебрежимо малы, вычислить угловую скорость вращения стержня после удара.

Решение. Если F — сила, действующая на шарик во время удара, то

$$m\frac{dv}{dt}=-F, \quad M\frac{dV}{dt}=F, \quad I\frac{d\omega}{dt}=F\frac{l}{2}.$$

Почленным делением исключаем F и получаем

$$\frac{m}{I}\frac{dv}{d\omega}=-\frac{2}{l}, \quad \frac{M}{I}\frac{dV}{d\omega}=\frac{2}{l}.$$

Интегрируя в пределах от начального значения угловой скорости $\omega=0$ до конечного, найдем

$$v-v_0=-\frac{2}{l}\frac{I}{m}\omega, \quad V=\frac{2}{l}\frac{I}{M}\omega,$$

причем в этих уравнениях v, V и ω означают величины соответствующих скоростей после удара. Угловая скорость ω найдется из уравнения сохранения энергии. Если в него подставить значения v и V, то для ω получится квадратное уравнение

$$\left[1+\frac{4I}{l^2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right)\right]\omega^2-4\frac{v_0}{l}\omega=0.$$

Один из корней этого уравнения ($\omega=0$) дает угловую скорость стержня до удара, второй — после удара. По условию задачи надо взять второй корень. С учетом соотношения $I=\frac{1}{12}Ml^2$ для него получаем

$$\omega=\frac{12mv_0}{(4m+M)\,l}.$$