Конечно, все эти явления можно понять, не пользуясь представлением о силах инерции, а рассматривая движения относительно инерциальной системы отсчета. Так, в примере с маятником маятник движется ускоренно относительно инерциальной системы отсчета.

Маятник должен отклониться назад, чтобы возникла сила натяжения с горизонтальной составляющей, направленной вперед. Эта составляющая и сообщает маятнику ускорение. Однако во многих случаях бывает проще рассматривать явления непосредственно в движущейся системе отсчета, не переходя к инерциальной. Кроме того, иногда затруднительно разделить полную силу, действующую в неинерциальной системе отсчета, на «реальную» силу, возникающую из-за взаимодействия тел, и «фиктивную» силу инерции, связанную с ускоренным движением системы отсчета.

§ 64. Силы инерции при произвольном ускоренном движении системы отсчета

1. Допустим теперь, что система отсчета S (см. рис. 182) движется относительно неподвижной системы S_1 *совершенно произвольно*. Это движение можно разложить на два: *поступательное движение* со скоростью $\boldsymbol{v}_0$, равной скорости движения начала координат O, и *вращательное движение* вокруг мгновенной оси, проходящей через это начало. Угловую скорость этого вращения обозначим $\boldsymbol{\omega}$. Она может меняться как по величине, так и по направлению. Пусть $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные векторы (орты) координатных осей системы координат S, которую мы будем предполагать прямоугольной. Длины этих векторов, поскольку они единичные, остаются неизменными. Но их направления с течением времени могут изменяться. Это — переменные векторы. Каждый из них вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Их производные по времени определяются формулами (46.11). Выпишем эти формулы еще раз:

$$\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{i}], \qquad \frac{d\boldsymbol{j}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{j}], \qquad \frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{k}]. \tag{64.1}$$

Ход рассуждений остается в точности таким же, как и в предыдущем параграфе. Усложняются только вычисления. Формулы (63.2), (63.3) и (63.4), разумеется, остаются без изменения. Остается неизменной и интерпретация слагаемых $\dot{\boldsymbol{R}}_0$ и $\ddot{\boldsymbol{R}}_0$. Первое есть абсолютная скорость $\boldsymbol{v}_0$, а второе — абсолютное ускорение $\boldsymbol{a}_0$ начала координат O. Меняются только слагаемые $\dot{\boldsymbol{r}}$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}$, которые мы и должны найти.

2. Пусть x, y, z — координаты движущейся точки M в движущейся системе S. Тогда

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \tag{64.2}$$

Дифференцируя это выражение, получим

$$\dot{\boldsymbol{r}} = (\dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}) + \left(x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt}\right).$$

В первой скобке дифференцируются только координаты x, y, z, как если бы единичные векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, а с ними и система отсчета S были неподвижными. Такую операцию должен был бы выполнить наблюдатель, покоящийся в системе S, если бы он поставил перед собой задачу найти скорость точки M в этой системе, т. е. по нашей терминологии относительную скорость $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}. \tag{64.3}$$

Используя далее формулы (64.1), получим

$$x\frac{d\boldsymbol{i}}{dt} + y\frac{d\boldsymbol{j}}{dt} + z\frac{d\boldsymbol{k}}{dt} = x[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{i}] + y[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{j}] + z[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{k}] = [\boldsymbol{\omega}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})] = [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}].$$

Таким образом,

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v}_{\text{отн}} + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]. \tag{64.4}$$

Окончательно для абсолютной скорости можно написать

$$\boldsymbol{v}_{\text{абс}} = \boldsymbol{v}_{\text{отн}} + \boldsymbol{v}_{\text{пер}}, \tag{64.5}$$

т. е. выражение, совпадающее с (63.5). Однако теперь переносная скорость дается выражением

$$\boldsymbol{v}_{\text{пер}} = \boldsymbol{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]. \tag{64.6}$$

Эта величина есть абсолютная скорость, которую имела бы точка M, если бы она покоилась в движущейся системе отсчета S. Поэтому-то она и называется переносной скоростью. Переносная скорость слагается из двух частей: скорости $\boldsymbol{v}_0$, с которой движется начало координат O, и скорости $[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]$, возникающей из-за вращения системы S вокруг этого начала.

3. Несколько сложнее обстоит дело с абсолютным ускорением. Для вычисления абсолютного ускорения продифференцируем выражение (64.5) по времени. С учетом соотношения (64.6) находим

$$\boldsymbol{a}_{\text{абс}} \equiv \dot{\boldsymbol{v}}_{\text{абс}} = \dot{\boldsymbol{v}}_{\text{отн}} + \dot{\boldsymbol{v}}_0 + [\boldsymbol{\omega}\dot{\boldsymbol{r}}] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}].$$

Производная $\dot{\boldsymbol{v}}_{\text{отн}}$ найдется дифференцированием выражения (64.3). При этом, разумеется, надо дифференцировать не только компоненты относительной скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, но и координатные орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Это делается в точности так же, как и дифференцирование выражения (64.2). Поэтому по аналогии с формулой (64.4) можно написать

$$\dot{\boldsymbol{v}}_{\text{отн}} = \boldsymbol{a}_{\text{отн}} + [\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\text{отн}}], \tag{64.7}$$

где

$$\boldsymbol{a}_{\text{отн}} = \ddot{x}\boldsymbol{i} + \ddot{y}\boldsymbol{j} + \ddot{z}\boldsymbol{k}. \tag{64.8}$$

Последнее выражение дает относительное ускорение. Для его нахождения надо дважды дифференцировать координаты x, y, z, считая координатные орты $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ неподвижными. Именно так поступал бы наблюдатель, изучающий движение относительно системы отсчета S и не подозревающий о ее движении. Потому-то величина (64.8) и называется относительным ускорением.

Слагаемое $[\boldsymbol{\omega}\dot{\boldsymbol{r}}]$ преобразуем, подставив в него выражение (64.6) для $\dot{\boldsymbol{r}}$:

$$[\boldsymbol{\omega}\dot{\boldsymbol{r}}]=[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\text{отн}}]+[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]].$$

Окончательно для абсолютного ускорения найдем

$$\boldsymbol{a}_{\text{абс}}=\boldsymbol{a}_{\text{отн}}+2[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\text{отн}}]+\dot{\boldsymbol{v}}_0+[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]]+[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}]. \tag{64.9}$$

Этому результату можно придать вид

$$\boldsymbol{a}_{\text{абс}}=\boldsymbol{a}_{\text{отн}}+\boldsymbol{a}_{\text{кор}}+\boldsymbol{a}_{\text{пер}}, \tag{64.10}$$

где

$$\boldsymbol{a}_{\text{кор}}=2[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\text{отн}}], \tag{64.11}$$

$$\boldsymbol{a}_{\text{пер}}=\dot{\boldsymbol{v}}_0+[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]]+[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}]. \tag{64.12}$$

Вектор $\boldsymbol{a}_{\text{пер}}$ зависит только от движения системы отсчета S относительно неподвижной системы S_1. Только такое ускорение испытывала бы точка, если бы она покоилась в системе S. Поэтому вектор $\boldsymbol{a}_{\text{пер}}$ называется *переносным ускорением*. Наконец, слагаемое $\boldsymbol{a}_{\text{кор}}=2[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\text{отн}}]$ зависит как от относительного, так и от переносного движений. Оно называется *кориолисовым ускорением* по имени французского ученого Кориолиса (1792—1843), который впервые ввел это понятие в механику. Равенство (64.10) вместе с выражениями для отдельных слагаемых, стоящих в его правой части, выражает так называемую *теорему Кориолиса*. Согласно этой теореме *абсолютное ускорение является векторной суммой относительного, кориолисова и переносного ускорений.*

Исследуем структуру переносного ускорения. Для этого воспользуемся формулой (64.12). Слагаемое $\dot{\boldsymbol{v}}_0$ есть переносное ускорение, вызванное поступательным ускоренным движением системы S, тождественным с движением начала координат O. Остальные два слагаемых вызываются вращением системы S. Из них $[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}]$ есть часть переносного ускорения, вызванная неравномерностью вращения. При равномерном вращении ($\boldsymbol{\omega}=\text{const}$) это слагаемое пропадает. Другое слагаемое $[\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}]]$, обозначаемое в дальнейшем $\boldsymbol{a}_{\text{ц}}$, есть центростремительное ускорение, направленное к мгновенной оси вращения. Действительно, представим радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ в виде $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_{\perp}+\boldsymbol{r}_{\parallel}$, где $\boldsymbol{r}_{\parallel}$ и $\boldsymbol{r}_{\perp}$ — компоненты этого радиуса-вектора, направленные вдоль оси вращения и перпендикулярно к ней соответственно. Так как $[\boldsymbol{\omega r}_{\parallel}] = 0$, то

$$\boldsymbol{a}_ц \equiv [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega r}]] = [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega r}_{\perp}]].$$

Раскрыв по известной формуле двойное векторное произведение и приняв во внимание, что $(\boldsymbol{\omega r}_{\perp}) = 0$, получим

$$\boldsymbol{a}_ц = -\omega^2 \boldsymbol{r}_{\perp}. \tag{64.13}$$

Эта формула и доказывает наше утверждение.

4. Можно было бы теперь перейти к написанию уравнения относительного движения материальной точки. Однако мы хотим еще раз на частном примере получить теорему Кориолиса. Таким путем мы лучше выясним происхождение кориолисова ускорения и других членов, из которых складывается абсолютное ускорение.

Пусть шарик M (рис. 183) движется вдоль жесткого стержня, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, перпендикулярной к плоскости рисунка. Его абсолютная скорость $\boldsymbol{v}_{абс}$ складывается из двух взаимно перпендикулярных скоростей: скорости вдоль стержня и скорости, к нему перпендикулярной. Первая есть относительная скорость в системе отсчета, в которой стержень покоится. Вторая возникает из-за вращения стержня и потому является переносной скоростью. Таким образом, $\boldsymbol{v}_{абс} = \boldsymbol{v}_{отн} + \boldsymbol{v}_{пер}$, а потому $\boldsymbol{a}_{абс} = \dot{\boldsymbol{v}}_{отн} + \dot{\boldsymbol{v}}_{пер}$. Пусть за время dt стержень повернулся на угол $d\varphi = \omega dt$. За то же время шарик перешел из положения M в положение M'. Найдем приращение, которое претерпевает за то же время вектор $\boldsymbol{v}_{отн}$. Если бы не было вращения стержня, то это приращение возникало бы только из-за неравномерности движения вдоль стержня и было бы равно $\boldsymbol{a}_{отн} dt$. Но из-за поворота вектор $\boldsymbol{v}_{отн}$ получает дополнительное приращение $[d\boldsymbol{\varphi}\, \boldsymbol{v}_{отн}]$. Полное приращение вектора $\boldsymbol{v}_{отн}$ будет

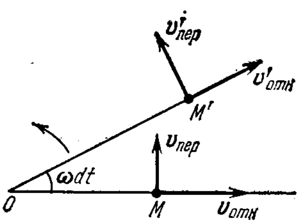

Рис. 183.

$$d\boldsymbol{v}_{отн} = \boldsymbol{a}_{отн} dt + [\boldsymbol{\omega v}_{отн}]\, dt.$$

Теперь найдем приращение вектора $\boldsymbol{v}_{пер} = [\boldsymbol{\omega r}]$. Очевидно $d\boldsymbol{v}_{пер} = [d\boldsymbol{\omega r}] + [\boldsymbol{\omega}\, d\boldsymbol{r}]$. Первое слагаемое возникает из-за неравномерности вращения и равно $[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}]\, dt$. Второе связано с перемещением точки M в (абсолютном) пространстве и дается выражением $[\boldsymbol{\omega}\ \boldsymbol{v}_{абс}]\, dt = [\boldsymbol{\omega v}_{отн}]\, dt + [\boldsymbol{\omega v}_{пер}]\, dt$. Таким образом,

$$d\boldsymbol{v}_{пер} = [\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}]\, dt + [\boldsymbol{\omega v}_{отн}]\, dt + [\boldsymbol{\omega v}_{пер}]\, dt.$$

Сложив приращения обоих векторов, $\boldsymbol{v}_{отн}$ и $\boldsymbol{v}_{пер}$, найдем окончательно

$$\boldsymbol{a}_{абс} = \boldsymbol{a}_{отн} + 2[\boldsymbol{\omega v}_{отн}] + [\boldsymbol{\omega}[\boldsymbol{\omega r}]] + [\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}].$$

Как ясно из вывода, в рассматриваемом случае кориолисово ускорение слагается из двух равных членов. Первый возникает из-за вращения вектора $\boldsymbol{v}_{отн}$ вместе со стержнем. Второй появляется из-за приращения переносной скорости $\boldsymbol{v}_{пер}$, которое получается вследствие приближения шарика к оси вращения или удаления от нее. Очевидно, вывод применим и в том случае, когда направление оси вращения меняется с течением времени.

Кориолисово ускорение $2[\boldsymbol{\omega v}_{отн}]$ направлено перпендикулярно к вращающемуся стержню. Для того чтобы сообщить такое ускорение телу M, стержень должен оказывать на него боковое давление. Сила бокового давления равна $2m[\boldsymbol{\omega v}_{\text{отн}}]$, где m — масса тела M. В свою очередь тело M действует на стержень с равной и противоположно направленной силой $\boldsymbol{F}=2m[\boldsymbol{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\omega}]$. Если тело удаляется от оси вращения (рис. 184, *а*), то сила $\boldsymbol{F}$ направлена противоположно вращению и замедляет его. При этом стержень изгибается таким образом, что он выпуклой стороной обращен в сторону вращения, как показано пунктирной линией. Напротив, если тело приближается к оси вращения (рис. 184, *б*), то сила $\boldsymbol{F}$ направлена в сторону вращения стержня. В этом случае угловая скорость

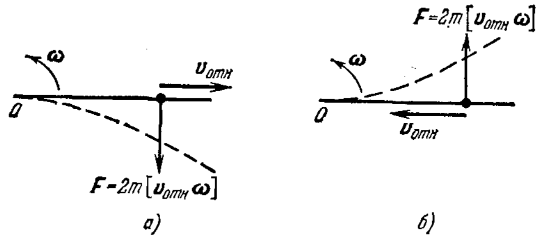

Рис. 184.

вращения стержня увеличивается, а сам стержень изгибается так, что в сторону вращения обращена его вогнутая сторона. В опыте со скамьей Жуковского, описанном в § 34 (рис. 60), возникают такие же силы бокового давления, с которыми гири действуют на демонстратора, когда он приближает или удаляет их от оси вращения. Эти силы и изменяют угловую скорость вращения скамьи Жуковского вместе с демонстратором, сидящим на ней. Вообще действием таких сил объясняются все явления, связанные с изменением угловой скорости вращения изолированного тела при изменении его момента инерции.

5. Обратимся теперь к написанию уравнений относительного движения. Поступим в точности так же, как в предыдущем параграфе. В уравнение (63.1) подставим выражение (64.10) и все члены перенесем в правую часть за исключением члена, содержащего относительное ускорение. Таким путем получим

$$m\boldsymbol{a}_{\text{отн}}=\boldsymbol{F}-m\boldsymbol{a}_{\text{кор}}-m\boldsymbol{a}_{\text{пер}}, \tag{64.14}$$

или более подробно

$$m\boldsymbol{a}_{\text{отн}}=\boldsymbol{F}+2m[\boldsymbol{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\omega}]-m\dot{\boldsymbol{v}}_0+m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp-m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}]. \tag{64.15}$$

К «настоящей» силе $\boldsymbol{F}$ добавились две силы инерции: так называемая *кориолисова сила*

$$\boldsymbol{F}_{\text{кор}}=-m\boldsymbol{a}_{\text{кор}}=2m[\boldsymbol{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\omega}] \tag{64.16}$$

и *переносная сила инерции*

$$\boldsymbol{F}_{\text{пер}}=-m\boldsymbol{a}_{\text{пер}}=-m\dot{\boldsymbol{v}}_0+m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp-m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}]. \tag{64.17}$$

Разумеется, к этим силам инерции относятся все общие замечания, которые были высказаны в предыдущем параграфе применительно к силам инерции, возникающим при ускоренном поступательном движении системы отсчета.

6. Переносная сила инерции в общем случае состоит из трех слагаемых. С первым слагаемым $-m\dot{\boldsymbol{v}}_0$ мы уже познакомились в предыдущем параграфе. Это есть *поступательная сила инерции*, возникающая из-за ускоренного движения начала координат O. Последнее слагаемое $-m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}]$ обусловлено *неравномерностью вращения* системы отсчета. Оно не получило специального названия. Второе слагаемое

$$\boldsymbol{F}_{\text{ц}} = m\omega^2\boldsymbol{r}_{\perp} \tag{64.18}$$

называется *центробежной силой инерции* или просто *центробежной силой*. Действию центробежной силы подвергается, например, пассажир в движущемся автобусе на поворотах. Перегрузки, испытываемые летчиком при выполнении фигур высшего пилотажа на больших скоростях, также в основном вызываются центробежными силами. Если на центробежной машине подвесить несколько шариков на нитях и привести машину в быстрое вращение, то центробежные силы отклонят шарики от оси вращения. Угол отклонения тем больше, чем дальше шарик отстоит от оси. Центробежные силы используются в центробежных сушилках для отжима белья и в сепараторах для отделения сливок от молока.

7. Центробежные силы, как и всякие силы инерции, существуют лишь в ускоренно движущихся (вращающихся) системах отсчета и исчезают при переходе к инерциальным системам. Забыв это, можно прийти к парадоксам, которые часто ставят в тупик школьников. Вот один из самых распространенных парадоксов такого типа. Пусть тело движется по окружности. На него действуют две силы: центростремительная $\boldsymbol{F}_1$, направленная к центру окружности, и центробежная $\boldsymbol{F}_2$, направленная в противоположную сторону. Эти силы равны по величине и уравновешивают друг друга: $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 = 0$. По закону инерции тело должно двигаться прямолинейно и равномерно. Противоречие возникло потому, что движение стали относить к неподвижной (инерциальной) системе отсчета. А в этой системе никаких центробежных сил не существует. Есть только одна центростремительная сила $\boldsymbol{F}_1$, которая и сообщает телу ускорение. Это может быть, например, натяжение шнура, к которому привязано тело. Вводить центробежную силу можно лишь тогда, когда движение рассматривается во вращающейся системе отсчета. В этой системе на тело действительно действует центробежная сила, и она уравновешивается центростремительной силой. Однако это не приводит к противоречию, так как во вращающейся системе отсчета тело покоится.

Путаница происходит из-за того, что в технической механике термин «центробежная сила» иногда употребляют в совершенно другом смысле. Центробежной силой называют *силу реакции*, с которой тело A, вращающееся по окружности, действует на тело B, принуждающее его совершать это вращение. Равную ей и противоположно направленную силу, с которой тело B действует на вращающееся тело A, называют центростремительной. Допустим, например, что шарик привязан к шнуру. Взяв рукой за свободный конец шнура, приведем шарик во вращение. Центростремительной здесь является сила натяжения шнура, тянущая шарик к центру окружности. Центробежная сила также создается натяжением шнура, но она приложена к руке. Центростремительная и центробежная силы, так понимаемые, всегда приложены к *разным телам*. Обе они являются «настоящими силами» в смысле ньютоновой механики, т. е. возникают в результате взаимодействия тел. По существу этой терминологии, конечно, нельзя привести никаких возражений. Речь может идти только о ее целесообразности. Возражение начинается с того пункта, когда понимая центробежную силу во втором смысле, утверждают, что она стремится удалить вращающееся тело от оси вращения. Это утверждение просто абсурдно, так как при втором определении центробежной силы она не приложена к вращающемуся телу и потому не может оказывать на него никакого действия. Действительно, центробежная сила стремится удалить тело от оси вращения. Но это утверждение относится к центробежной силе, понимаемой как *сила инерции*. Мы не будем употреблять термин «центробежная сила» во втором смысле. Под центробежной силой мы будем всюду понимать *силу инерции*, действующую только во вращающихся системах отсчета и исчезающую при переходе к инерциальным системам.

8. Обратимся теперь к кориолисовой силе инерции (64.16). Она возникает только тогда, когда система отсчета S *вращается*, а материальная точка *движется относительно этой системы*. От других сил инерции кориолисова сила отличается тем, что она зависит от относительной скорости $\mathbf{v}_{\text{отн}}$. При обращении в нуль этой скорости обращается в нуль и кориолисова сила. Когда пассажир стоит в движущемся автобусе, то на поворотах он испытывает действие центробежной силы. Если во время поворота пассажир будет перемещаться в автобусе, то на него начнет еще действовать кориолисова сила. Вот почему удержаться в автобусе на поворотах легче в неподвижном положении, чем при движении. Кориолисова сила всегда перпендикулярна к относительной скорости. Поэтому при относительном движении она не совершает работы. Кориолисова сила, таким образом, является силой *гироскопической* (см. § 24, п. 6).

ЗАДАЧИ

1. В чем ошибочность следующего рассуждения: пусть A и B — две неподвижные материальные точки, расстояние между которыми равно r. Состояние покоя точки B можно рассматривать как результат сложения двух вращений с одинаковыми, но противоположно направленными постоянными угловыми скоростями: $+\omega$ и $-\omega$. При первом вращении возникает центростремительное

ускорение $\boldsymbol{a}_1 = \omega^2\boldsymbol{r}$, при втором— центростремительное ускорение $\boldsymbol{a}_2 = (-\omega)^2\boldsymbol{r} = \omega^2\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}_1$. Результирующее ускорение точки B равно $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = 2\omega^2\boldsymbol{r}$. Следовательно, точка A действует на точку B с силой притяжения $\boldsymbol{F} = 2m\omega^2\boldsymbol{r}$, где m — масса точки B. Поскольку ω — величина произвольная, получается абсурдный результат, что точки A и B притягиваются друг к другу с произвольной, наперед заданной силой.

Решение. Не учтено кориолисово ускорение. Введем систему отсчета S, равномерно вращающуюся вокруг точки A с угловой скоростью $+\boldsymbol{\omega}$. Пусть точка B вращается относительно этой системы с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}$. Обозначая вектор $\overrightarrow{AB}$ посредством $\boldsymbol{r}$, имеем для скоростей и ускорений точки B:

$$\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = -[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{r}], \qquad \boldsymbol{a}_{\text{отн}} = \boldsymbol{a}_{\text{пер}} = -\omega^2\boldsymbol{r}, \qquad \boldsymbol{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{v}_{\text{отн}}] = 2\omega^2\boldsymbol{r}.$$

Следовательно, $\boldsymbol{a}_{\text{абс}} = \boldsymbol{a}_{\text{отн}} + \boldsymbol{a}_{\text{кор}} + \boldsymbol{a}_{\text{пер}} = 0$.

2. Стрелок и мишень находятся в диаметрально противоположных точках карусели радиуса $R = 5$ м, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси. Период вращения карусели $T = 10$ с, скорость пули $v = 300$ м/с. Пренебрегая максимальной линейной скоростью вращающейся карусели ωR по сравнению со скоростью пули, определить приближенно, под каким углом α к диаметру карусели должен целиться стрелок, чтобы поразить мишень. Задачу рассмотреть как с точки зрения вращающейся, так и с точки зрения неподвижной системы, и сравнить результаты.

Ответ. $\alpha = \dfrac{4\pi R}{vT} = 0{,}0209$ рад $= 1{,}2°$.

3. Тонкий стержень длины l вращается вокруг одного из концов, описывая круговой конус (физический конический маятник). Найти период движения T в зависимости от угла при вершине конуса 2φ.

Указание. В системе отсчета, вращающейся вместе со стержнем вокруг вертикальной оси, стержень покоится. Задача сводится к нахождению условия равновесия подвешенного стержня в этой системе под действием силы тяжести и центробежной силы.

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{2l\cos\varphi}{3g}}$.

4. Физический маятник, состоящий из шарика, насаженного на конец тонкого жесткого стержня, может свободно колебаться вокруг горизонтальной оси A, проходящей через верхний конец стержня. Ось A неподвижно закреплена на геометрической оси горизонтального диска, равномерно вращающегося вокруг этой (вертикальной) геометрической оси с угловой скоростью ω. Таким образом, плоскость колебаний маятника вращается вместе с диском с той же угловой скоростью ω. Найти период малых колебаний маятника, если масса стержня пренебрежимо мала по сравнению с массой шарика. При каком условии нижнее вертикальное положение стержня станет неустойчивым положением равновесия?

Ответ. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g - l\omega^2}}$, если $l\omega^2 < g$. При $l\omega^2 > g$ положение равновесия неустойчиво.

5. Представим себе, что в земном шаре просверлен канал по диаметру в плоскости экватора. Вычислить силу F, с которой будет давить на стенку канала тело, падающее по нему с поверхности Земли, в тот момент, когда оно достигнет центра Земли. Считать, что трения нет, а плотность Земли однородна.

Ответ. $F = \dfrac{4\pi}{T}\sqrt{\dfrac{R}{g}}\,P \approx 0{,}12P$, где P — вес тела на поверхности Земли, T — продолжительность звездных суток, R — радиус Земли.

6. (Задача Ньютона.) Какую центральную силу надо прибавить к силе притяжения Солнца для того, чтобы орбита планеты, не меняя своего вида, вращалась вокруг Солнца?

Решение. Обозначим $\boldsymbol{F}_1$ силу ньютоновского притяжения планеты к Солнцу, $\boldsymbol{F}_2$ — дополнительную центральную силу, о которой говорится в условии задачи, $\boldsymbol{\omega}$ — угловую скорость вращения орбиты. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ перпендикулярен к плоскости орбиты. Полный момент импульса планеты относительно Солнца $\boldsymbol{L}$ слагается из момента импульса относительно движения $\boldsymbol{L}_1 = m[\boldsymbol{r}\boldsymbol{v}_{\text{отн}}]$ и момента импульса дополнительного вращения $\boldsymbol{L}_2 = mr^2\boldsymbol{\omega}$. Момент $\boldsymbol{L}$, очевидно, сохраняется, так как полная действующая сила $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2$ является центральной. Момент $\boldsymbol{L}_1$ тоже сохраняется. Действительно, таким моментом обладала бы планета, если бы вращения орбиты не было, и все ее движение происходило под действием только одной центральной силы $\boldsymbol{F}_1$. Поэтому должен сохраняться и момент $\boldsymbol{L}_2$, а планета должна вращаться с угловой скоростью

$$\omega = \frac{L_2}{mr^2} = \frac{\text{const}}{r^2}. \tag{64.19}$$

Вращение орбиты неравномерное за исключением случая, когда орбита круговая. В системе отсчета, вращающейся вместе с орбитой с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, уравнение движения планеты, с одной стороны, имеет вид

$$m\boldsymbol{a}_{\text{отн}} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + m\omega^2\boldsymbol{r} - m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}] + 2m[\boldsymbol{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\omega}].$$

С другой стороны, по условию, в этой системе планета должна двигаться по обычному кеплеровскому эллипсу, а потому $m\boldsymbol{a}_{\text{отн}} = \boldsymbol{F}_1$. Это дает

$$\boldsymbol{F}_2 = -m\omega^2\boldsymbol{r} + m[\dot{\boldsymbol{\omega}}\boldsymbol{r}] - 2m[\boldsymbol{v}_{\text{отн}}\boldsymbol{\omega}]. \tag{64.20}$$

Дифференцируя (64.19) по времени и принимая во внимание, что $\boldsymbol{L}_2 = \text{const}$, получим

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = -2\frac{\dot{r}}{r}\frac{\boldsymbol{L}_2}{mr^2} = -2\frac{\dot{r}}{r}\boldsymbol{\omega}.$$

Скорость $\boldsymbol{v}_{\text{отн}}$ можно разложить на две составляющие: вдоль радиуса $\frac{\dot{r}}{r}\boldsymbol{r}$ и перпендикулярную к нему. Последняя возникает из-за вращения планеты по кеплерову эллипсу с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}} = \frac{\boldsymbol{L}_1}{mr^2}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{v}_{\text{отн}} = \frac{\dot{r}}{r}\boldsymbol{r} + [\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}}\boldsymbol{r}].$$

Подставив это в (64.20), после простых преобразований получим

$$\boldsymbol{F}_2 = -m\{\omega^2 + 2(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\omega}_{\text{отн}})\}\boldsymbol{r}, \tag{64.21}$$

или

$$\boldsymbol{F}_2 = -[L_2^2 + 2(\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{L}_2)]\frac{\boldsymbol{r}}{mr^4} = \frac{\text{const}}{r^4}\boldsymbol{r}. \tag{64.22}$$

Отсюда видно, что дополнительная сила $\boldsymbol{F}_2$ должна меняться обратно пропорционально кубу расстояния планеты от Солнца.

7. Применить теорему Кориолиса для решения *обратной задачи* о движении симметричного гироскопа. Прямая задача механики состоит в том, чтобы по заданным силам определить движение механической системы. Обратная задача сводится к определению сил по заданному движению системы. Пусть гироскоп совершает вынужденную регулярную прецессию. Какие на него должны действовать силы, чтобы эта прецессия имела место?

Решение. Пусть гироскоп равномерно вращается вокруг своей оси фигуры с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, а ось фигуры вращается также равномерно с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$ (вынужденная прецессия). Перейдем к системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$. В этой системе ось фигуры гироскопа неподвижна, так что

$$v_{\text{отн}}=[\boldsymbol{\omega r}], \qquad v_{\text{пер}}=[\boldsymbol{\Omega r}], \qquad a_{\text{пер}}=[\boldsymbol{\Omega}\,[\boldsymbol{\Omega r}]]. \tag{64.23}$$

Мысленно выделим из тела гироскопа элемент массы dm с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ (см. рис. 185). Обозначим посредством $d\boldsymbol{f}$ действующую на него (реальную) силу. При использовании формулы (64.9) надо помнить, что теперь угловая скорость вращения системы отсчета обозначена $\boldsymbol{\Omega}$ (а не $\boldsymbol{\omega}$, как в этой формуле). Применив к выделенному элементу массы второй закон Ньютона, использовав формулу (64.9) и выражения (64.23), можем написать

$$d\boldsymbol{f}=dm\,[\boldsymbol{\omega}\,[\boldsymbol{\omega r}]]+2dm\,[\boldsymbol{\Omega}\,[\boldsymbol{\omega r}]]+dm\,[\boldsymbol{\Omega}\,[\boldsymbol{\Omega r}]]. \tag{64.24}$$

Поскольку гироскоп предполагается идеально твердым телом, его уравнения движения полностью определяются геометрической суммой $\boldsymbol{f}$ внешних сил и их моментов относительно точки опоры O. Для нахождения $\boldsymbol{f}$ проинтегрируем выражение (64.24). Векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ как постоянные при этом можно вынести из-под знака интеграла. Кроме того, учтем, что $\int \boldsymbol{r}\,dm = m\boldsymbol{r}_C$, где $\boldsymbol{r}_C$ — радиус-вектор центра масс гироскопа C. В результате получим

$$\boldsymbol{f}=m\left\{[\boldsymbol{\omega}\,[\boldsymbol{\omega r}_C]]+2\,[\boldsymbol{\Omega}\,[\boldsymbol{\omega r}_C]]+[\boldsymbol{\Omega}\,[\boldsymbol{\Omega r}_C]]\right\}.$$

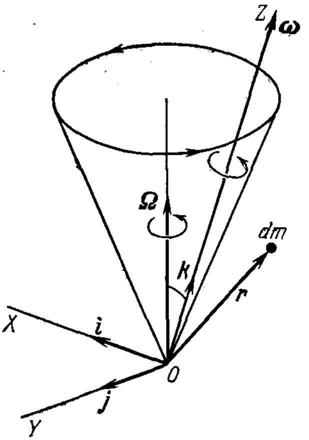

Рис. 185.

Первые два слагаемых в правой части этого соотношения равны нулю, так как центр масс C лежит на оси фигуры гироскопа, а потому векторы $\boldsymbol{r}_C$ и $\boldsymbol{\omega}$ коллинеарны. Поэтому окончательно

$$\boldsymbol{f}=m\,[\boldsymbol{\Omega}\,[\boldsymbol{\Omega r}_C]]. \tag{64.25}$$

Этот результат, конечно, можно было бы написать сразу на основании теоремы о движении центра масс, поскольку ускорение последнего происходит только из-за прецессионного вращения и равно $[\boldsymbol{\Omega}[\boldsymbol{\Omega r}_C]]$ (центростремительное ускорение). Сила $\boldsymbol{f}$ возникает автоматически как реакция точки опоры на прецессирующий гироскоп.

Перейдем теперь к вычислению момента сил $\boldsymbol{M}$. Для этого радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ надо векторно умножить на выражение (64.24) и проинтегрировать по m. Но и без вычислений ясно, что при таком интегрировании слагаемое $dm\,[\boldsymbol{\omega}\,[\boldsymbol{\omega r}]]$ не внесет никакого вклада в момент $\boldsymbol{M}$. Действительно, член, возникающий от интегрирования этого слагаемого, не зависит от того, содержатся в сумме (64.24) другие слагаемые или не содержатся. Но рассматриваемое слагаемое соответствует равномерному вращениию вокруг оси фигуры гироскопа, которая, как известно, является одной из свободных осей вращения, а для равномерного вращения вокруг свободной оси никаких внешних сил не требуется. По той же причине не повлияло бы на величину момента $\boldsymbol{M}$ и последнее слагаемое суммы (64.24), если бы прецессия происходила вокруг оси, перпендикулярной к оси фигуры гироскопа, а его центр масс C совпадал с точкой опоры O. Во всех остальных случаях это не так. Однако при вычислении момента $\boldsymbol{M}$ мы пренебрежем последним слагаемым в (64.24) и вот по какой причине. Мы будем предполагать прецессионное вращение Ω очень медленным по сравнению с собственным вращением ω и пренебрегать квадратами малой величины Ω. А последнее слагаемое в (64.24) как раз квадратично по Ω. Таким образом, момент $\boldsymbol{M}$ происходит лишь от второго слагаемого в сумме (64.24). Разложив соответствующее двойное векторное произведение, умножив его векторно на $\boldsymbol{r}$ и проинтегрировав, получим

$$\boldsymbol{M}=2\int(\boldsymbol{\Omega r})\,[\boldsymbol{r\omega}]\,dm.$$

Для вычисления интеграла введем прямоугольную систему координат. Ось Z направим вдоль оси фигуры гироскопа, а ось X расположим в плоскости, в которой лежат векторы $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$ (см. рис. 185). В этой системе координат

$$M = -2j\omega\Omega_x \int x^2\,dm - 2j\omega\Omega_z \int zx\,dm + 2i\omega\Omega_x \int xy\,dm + 2i\omega\Omega_z \int yz\,dm.$$

Все входящие сюда интегралы, за исключением первого, обращаются в нуль из-за осесимметричного распределения масс. Первый же член может быть записан в виде

$$M = -j\omega\Omega_x \int (x^2+y^2)\,dm = -jI_\perp \omega\Omega \sin\vartheta,$$

где ϑ — угол между векторами $\boldsymbol{\omega}$ и $\boldsymbol{\Omega}$, а $I_\perp$ — соответствующий момент инерции гироскопа. В векторной форме

$$M = I_\perp [\boldsymbol{\Omega\omega}]. \tag{64.26}$$

Векторное произведение $[\boldsymbol{\Omega\omega}]$ есть вектор скорости, с которой при регулярной прецессии движется конец вектора $\boldsymbol{\omega}$, неизменно связанный с осью фигуры гироскопа. Таким образом, вершина гироскопа перемещается не в направлении приложенной силы, а в перпендикулярном к ней направлении — в направлении момента $\boldsymbol{M}$. Это — то, что кажется более всего удивительным в движении гироскопа. Если перейти к системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью прецессии $\boldsymbol{\Omega}$, то можно сказать, что в этой системе момент внешних сил должен уравновешивать момент сил инерции Кориолиса.

§ 65. Уравнение относительного движения материальной точки в гравитационном поле Земли с учетом ее вращения

1. Применим уравнение относительного движения (64.15) к движению тел относительно Земли. Движущуюся систему отсчета S свяжем с вращающейся Землей. Речь идет о вращении Земли относительно инерциальной системы отсчета, например системы Коперника. Начало координат O поместим в центре Земли. Таким образом, под $\boldsymbol{v}_0$ следует понимать скорость, а под $\dot{\boldsymbol{v}}_0$ — ускорение центра Земли. Земля вращается практически равномерно, а потому последний член в уравнении (64.15) выпадает. Далее, так как речь будет идти только об относительном движении, условимся опускать в уравнении (64.15) индекс «отн», т. е. будем полагать $\boldsymbol{v} \equiv \boldsymbol{v}_{\text{отн}}$, $\boldsymbol{a} \equiv \boldsymbol{a}_{\text{отн}}$. Внешнюю силу представим в виде суммы трех сил $\boldsymbol{F}_З + \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}$, где $\boldsymbol{F}_З$ — сила гравитационного притяжения Земли, $\boldsymbol{F}_0$ — равнодействующая сил гравитационного притяжения Солнца, Луны, планет, звезд и прочих небесных тел, $\boldsymbol{F}$ — геометрическая сумма всех остальных сил, действующих на материальную точку. Сила $\boldsymbol{F}$ слагается, например, из силы сопротивления воздуха, силы трения, силы натяжения нити и пр. В этих обозначениях уравнение (64.15) примет вид

$$m\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{F}_З + m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp) + 2m[\boldsymbol{v\omega}] + \boldsymbol{F} + (\boldsymbol{F}_0 - m\dot{\boldsymbol{v}}_0). \tag{65.1}$$

2. Используем далее фундаментальный физический закон, согласно которому *все тела в одном и том же поле тяготения падают*