зом, *вектор* $\boldsymbol{g}$ *есть ускорение свободно падающего тела относительно Земли при условии, что его скорость в рассматриваемый момент равна нулю.* Оговорка относительно скорости тела необходима, так как при наличии скорости $\boldsymbol{v}$ появляется дополнительное ускорение из-за кориолисовой силы. Мы видим, что ускорение свободного падения состоит из двух слагаемых

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_{\text{абс}} + \omega^2 \boldsymbol{r}_\perp. \tag{65.4}$$

Первое из них, $\boldsymbol{g}_{\text{абс}} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}_З$ есть ускорение, вызванное силой гравитационного притяжения Земли. Такое ускорение мы получили бы, если бы измеряли ускорение свободного падения относительно неподвижной системы отсчета при условии, что, помимо земного гравитационного поля, никаких других полей нет. Второе слагаемое $\omega^2 r_\perp$ есть ускорение, сообщаемое центробежной силой инерции и связанное с вращением Земли.

§ 66. Вес и взвешивание тел

1. *Весом тела называется приложенная к нему сила* $\boldsymbol{P}$, *равная и противоположно направленная силе, с которой это тело действует на подставку, на которой оно лежит, или тянет за подвес, к которому оно подвешено. При этом предполагается, что тело, подставка и подвес покоятся в той системе отсчета, в которой производится взвешивание. Когда говорят о весе тела, обычно предполагают, что тело, подставка и подвес покоятся относительно Земли.* Допустим ради определенности, что тело лежит на подставке. Оно действует на подставку с силой $\boldsymbol{P}$, подставка действует на тело с противоположно направленной силой $\boldsymbol{F}$. По смыслу $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{F}$ суть силы взаимодействия подставки и тела. Они удовлетворяют третьему закону Ньютона: $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{P}$. Предполагая, что тело на подставке покоится, подставим в формулу (65.3) $\boldsymbol{v} = 0$, $\boldsymbol{a} = 0$, $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{P}$. Тогда для $\boldsymbol{P}$ найдем

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}. \tag{66.1}$$

Учитывая (65.4), видим, что $\boldsymbol{P}$ состоит из двух слагаемых:

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}_{\text{абс}} + m\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp = \boldsymbol{F}_З + m\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp. \tag{66.2}$$

Значит, *вес есть геометрическая сумма силы гравитационного притяжения Земли* $\boldsymbol{F}_З$ *и центробежной силы инерции* $m\omega^2 \boldsymbol{r}_\perp$.

Если тело подвешено на нити, то рассуждения остаются теми же самыми. В этом случае направление нити определяет направление силы $\boldsymbol{P}$, а следовательно, и ускорение свободного падения $\boldsymbol{g}$. Оно называется *направлением отвеса* или *отвесным направлением*.

2. Вектор $\boldsymbol{g}_{\text{абс}}$ характеризует гравитационное поле Земли. В каждой точке пространства он определяется только размерами

и формой Земли, а также распределением вещества в ней. Если бы Земля была правильным шаром, а вещество внутри нее было распределено сферически-симметрично, то вектор $\boldsymbol{g}_{\text{абс}}$ был бы направлен точно к центру Земли. Направление отвеса определяется вектором $\boldsymbol{g}$, т. е. диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{g}_{\text{абс}}$ и $\omega^2\boldsymbol{r}_\perp$ (рис. 186). Таким образом, если бы даже Земля была строго сферически-симметрична, то направление к ее центру не совпадало бы с направлением отвеса. Различие между этими двумя направлениями для сферически-симметричной Земли обусловлено центробежной силой. Реальная Земля сплюснута вдоль оси вращения, и это является второй причиной различия указанных двух направлений. Впрочем, ввиду медленности вращения Земли и малости ее сплюснутости, оба направления отличаются друг от друга весьма мало. Для сферически-симметричной Земли угол α между ними определяется формулой

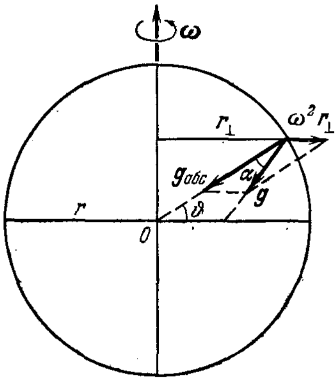

Рис. 186.

$$\sin\alpha = \frac{\omega^2 r_\perp}{g}\sin\vartheta = \frac{1}{2}\frac{\omega^2 r}{g}\sin 2\vartheta, \tag{66.3}$$

где ϑ — географическая широта рассматриваемого места (рис. 186). На полюсе и на экваторе угол α обращается в нуль. Для реальной (несферической) Земли формула (66.3), хотя и приближенна, но достаточно точна. Проектируя векторы $\boldsymbol{g}_{\text{абс}}$ и $\omega^2\boldsymbol{r}_\perp$ на направление вектора $\boldsymbol{g}$ и полагая $\cos\alpha \approx 1$, легко получить приближенную формулу

$$g = g_{\text{абс}} - \omega^2 r_\perp \cos\vartheta = g_{\text{абс}} - \omega^2 r\cos^2\vartheta. \tag{66.4}$$

Ошибка этого расчета порядка α^2.

Величина g может быть найдена путем взвешивания или из опытов по свободному падению тел. Более точно ее можно найти, измеряя период колебаний оборотного маятника (см. § 41). Опыты показали, что g зависит от географической широты. На полюсе $g = 983{,}2$ см/с², на экваторе $g = 978{,}0$ см/с². Зная g, можно по формуле (66.4) вычислить и $g_{\text{абс}}$. На полюсе $g_{\text{абс}} = g = 983{,}2$ см/с². На экваторе

$$g_{\text{абс}} = g + \omega^2 r = 978{,}0 + \frac{4\pi^2}{86\,164^2}\cdot 6{,}378\cdot 10^8 = 981{,}4 \text{ см/с}^2.$$

Если бы Земля была правильным шаром со сферически-симметричным распределением вещества в нем, то величина $g_{\text{абс}}$ должна была бы быть одной и той же на полюсе и на экваторе. В действительности на экваторе $g_{абс}$ меньше, чем на полюсе. Это объясняется сплюснутостью Земли, обусловленной действием центробежных сил. Точки экватора отстоят от центра Земли дальше, чем полюсы. Поэтому они притягиваются к центру Земли слабее, чем такие же точки на полюсе. Разумеется, изменение ускорения свободного падения g на земной поверхности нельзя обнаружить с помощью рычажных весов. Но это можно сделать с помощью пружинных весов.

3. Допустим теперь, что пружинные весы установлены на искусственном спутнике или космическом корабле. Что покажут эти весы, когда взвешиваемое тело покоится относительно корабля? Наши прежние рассуждения не изменятся, только в них Землю надо заменить космическим кораблем. В частности, движущуюся систему отсчета S мы связываем теперь с кораблем. Землю же надо рассматривать как внешнее тело, которое, наряду с Солнцем, Луной и прочими небесными телами, создает внутри корабля внешнее гравитационное поле. В силу малых размеров корабля это поле внутри корабля можно считать однородным. Оно полностью компенсируется поступательными силами инерции, возникающими в системе отсчета S из-за ускорения, сообщаемого ей этим гравитационным полем. Поэтому, если двигатели на корабле выключены и он свободно падает в гравитационном поле, то относительное движение внутри корабля описывается прежним уравнением (65.3). Только ввиду ничтожности гравитационного поля, создаваемого самим кораблем, член $m\boldsymbol{g}$ теперь обусловлен исключительно вращением корабля и равен $m\omega^2\boldsymbol{r}_\perp$ (центробежная сила). Если корабль не вращается, а взвешиваемое тело относительно него покоится, то из уравнения (65.3) получаем $\boldsymbol{F} = 0$. Величина $\boldsymbol{F}$ есть сила, с которой на тело действует растянутая пружина весов. Мы видим, что пружина не растянута, т. е. вес, показываемый весами, равен нулю. Весы не реагируют на внешние гравитационные поля, последние полностью компенсируются поступательными силами инерции. Такое состояние «*невесомости*» свойственно всем телам внутри космического корабля. Состояние «невесомости» проявляется в том, что в телах полностью отсутствуют внутренние упругие напряжения, которые в обычных условиях возникают под действием силы тяжести.

Если корабль вращается, то появляется центробежная сила, не компенсируемая внешними гравитационными полями. Эта сила создает на корабле «*искусственную тяжесть*».

Наконец, если включены двигатели, сообщающие кораблю дополнительное поступательное ускорение $\boldsymbol{w}$, то в правой части уравнения (65.3) добавляется член $-m\boldsymbol{w}$. Весы покажут вес $\boldsymbol{P} = -m\boldsymbol{w}$. Все тела внутри космического корабля снова становятся «весомыми». Этим «весом» и обусловлены перегрузки, которые испытывают космонавты при старте или торможении космических кораблей.

ЗАДАЧИ

1. Тело на экваторе взвешивается на пружинных весах в полдень, когда гравитационные силы Земли и Солнца тянут его в противоположные стороны. Одновременно такое же тело взвешивается в полночь в диаметрально противоположной точке земного шара, когда обе эти силы направлены в одну сторону. Вес какого тела будет больше?

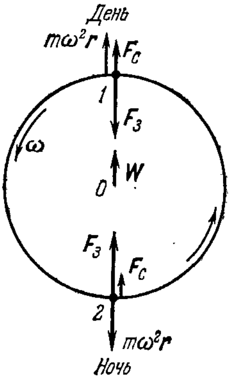

Рис. 187.

Решение. Если пренебречь неоднородностью гравитационного поля Солнца в окрестности Земли, то в обоих случаях получится один и тот же вес. Учтем теперь неоднородность гравитационного поля Солнца, пренебрегая влиянием Луны. Веса тел в диаметрально противоположных точках земного шара *1* (день) и *2* (ночь) будут соответственно

$$P_1 = F_З - F_C(R-r) - m\omega^2 r + mw,$$
$$P_2 = F_З + F_C(R+r) - m\omega^2 r - mw$$

(рис. 187). Здесь $F_З$ и F_C — силы гравитационного притяжения Земли и Солнца соответственно, R — расстояние между их центрами, r — радиус Земли, w — ускорение центра Земли под действием гравитационного притяжения Солнца. Очевидно $mw = F(R)$. Вычитая, находим

$$P_2 - P_1 = [F_C(R+r) - F_C(R)] + [F_C(R-r) - F_C(R)].$$

Разлагая обе разности в квадратных скобках по формуле Тейлора и ограничиваясь квадратичными членами по r, получим

$$P_2 - P_1 = r^2 \frac{d^2 F_C}{dR^2}.$$

Преобразуем это выражение, используя соотношения

$$F_C = G\frac{Mm}{R^2} = \frac{4\pi^2 R}{T^2} m; \qquad P = mg$$

(M — масса Солнца, T — период обращения Земли вокруг Солнца, P — вес тела). После несложных преобразований найдем

$$\frac{P_2 - P_1}{P} = \frac{24\pi^2}{gT^2}\frac{r^2}{R} = \frac{12\pi^2 r^2}{sR}.$$

Здесь $s = \frac{1}{2} gT^2$ означает расстояние, которое проходила бы Земля в течение года, если бы она двигалась равноускоренно с ускорением g. Вычисляя это расстояние, получим $s \approx 5 \cdot 10^{12}$ км и далее

$$\frac{P_2 - P_1}{P} \approx 6{,}5 \cdot 10^{-12}.$$

2. Найти разность между весами одинаковых тел в диаметрально противоположных точках земного шара, обусловленную неоднородностью гравитационного поля Луны. Считать, что центры Луны, Земли и обе рассматриваемые точки *1* и *2* лежат на одной прямой (см. предыдущую задачу).

Ответ. $\frac{P_2 - P_1}{P} = \frac{M_Л}{M_З}\frac{24\pi^2 r^2}{RgT^2} \approx 8 \cdot 10^{-10}$, где $M_З$ и $M_Л$ — массы Земли и Луны, R — расстояние между их центрами, T — период обращения Луны вокруг Земли, r — радиус Земли.

3. Пароход движется на восток вдоль параллели с географической широтой $\vartheta = 60^\circ$. Скорость парохода $v = 10$ м/с. Определить вес тела P на пароходе, если взвешивание производится на пружинных весах. Вес того же тела, неподвижного относительно Земли, в той же точке земной поверхности равен P_0.

Ответ. $P = P_0\left[1 - \frac{2\omega v\cos\vartheta + v^2/R}{g}\right] \approx P_0\left(1 - 2\frac{\omega v}{g}\cos\vartheta\right) \approx P_0(1 - 7{,}5\cdot 10^{-5})$ (R — радиус Земли).

4. Самолет летит с постоянной скоростью, описывая окружность на постоянной высоте. Какое направление будет указывать нить отвеса, подвешенного в салоне самолета? Найти период малых колебаний математического маятника внутри самолета, если длина маятника равна l, корпус самолета наклонен к направлению горизонта под углом α.

Ответ. Нить отвеса установится перпендикулярно к полу салона самолета. $T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha}{g}}$.

5. Самолет летает на постоянной высоте по окружности радиуса $R = 25$ км с постоянной скоростью $v = 250$ м/с. В кабине самолета установлены пружинные и маятниковые часы. Какое время полета t' покажут маятниковые часы, если это время, измеренное пружинными часами, равно $t = 1$ ч? Часы считать идеальными. Силу Кориолиса, ввиду ее малости, не учитывать.

Ответ. $t' = t\left(1 + \frac{v^4}{4R^2g^2}\right) = 1$ ч 56 с.

§ 67. Отклонение падающих тел от направления отвеса

1. Пусть тело свободно падает в поле тяжести Земли. В этом случае $\boldsymbol{F} = 0$, и уравнение (65.3) переходит в

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g} + 2[\boldsymbol{v}\boldsymbol{\omega}]. \tag{67.1}$$

Это уравнение описывает *свободное падение тел с учетом вращения Земли*. Влияние вращения Земли сводится к действию центробежной и кориолисовой сил. Центробежная сила учитывается автоматически, так как она включена в вес тела $m\boldsymbol{g}$ как его составная часть. Наличие этой силы не меняет вид уравнения. Только направление к центру Земли заменяется направлением отвеса. В остальном центробежная сила не приводит к качественно новым явлениям. Более существенно влияет на характер движения кориолисова сила. *При падении тел без начальной скорости кориолисова сила проявляется в отклонении свободно падающих тел к востоку и экватору от направления отвеса.* Теория этих явлений сводится к решению дифференциального уравнения (67.1). Если вектор $\boldsymbol{g}$ постоянен, то векторное уравнение (67.1) эквивалентно системе трех линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Точное решение такой системы получить нетрудно с помощью общеизвестных методов, излагаемых в теории дифференциальных уравнений. Однако мы по этому пути не пойдем. Он громоздок, а главное, получение точных решений вряд ли оправдано, когда в уравнении (67.1) пренебрегается зависимостью $\boldsymbol{g}$ от координат. Последнее допустимо лишь тогда, когда движение рассматривается в сравни-