Натяжения T_x, T_y, T_z выражаются через ε_x, ε_y, ε_z линейно, как это следует из формул (76.1). Поэтому плотность упругой энергии является квадратичной однородной функцией деформаций ε_x, ε_y, ε_z. В частном случае ($\varepsilon_x = \varepsilon$, $\varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$) она пропорциональна *квадрату деформации*. При заданных деформациях ε_x, ε_y, ε_z плотность упругой энергии u пропорциональна модулю упругости E. Чем жестче пружина, тем больше ее упругая энергия (при неизменной деформации).

ЗАДАЧА

Определить относительное изменение объема полого латунного шара радиуса $R = 5$ см, в который накачан воздух до давления 11 атм (наружное давление 1 атм). Толщина сферической оболочки $d = 1$ мм. Модуль Юнга латуни $E = 10^{12}$ дин/см^2, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$.

Решение. В силу симметрии касательное напряжение τ, действующее в оболочке, одно и то же и одинаково во всех направлениях. Возьмем малый элемент оболочки, имеющий форму прямоугольника. При вычислении относительного изменения площади этого элемента под действием касательных напряжений τ можно отвлечься от кривизны элемента, приняв его за плоскую прямоугольную пластинку. Тогда вычисление дает

$$\frac{\Delta S}{S} = 2(1-\mu)\frac{\tau}{E}$$

(изменением площади, вызванным нормальным давлением, пренебрегаем). Поскольку площадь S пропорциональна $V^{2/3}$, относительное изменение объема будет $\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{\Delta S}{S}$. Так как поверхность искривлена, то натяжение τ создаст разность нормальных давлений. Для нее нетрудно получить $2\tau d/R$ (см. *формулу Лапласа* в учении о поверхностном натяжении, том II). Эта разность должна быть уравновешена разностью давлений газа ΔP по разные стороны оболочки. В результате получим

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2}\frac{(1-\mu)R}{Ed}\Delta P \approx 5\cdot 10^{-4}.$$

§ 77. Всестороннее и одностороннее растяжение и сжатие

1. Рассмотрим частный случай, когда все натяжения T_x, T_y, T_z равны и отрицательны. В этом случае на параллелепипед со всех сторон действует постоянное давление $P = -T_x = -T_y = -T_z$. Как видно из формул (76.1), все три относительные деформации ε_x, ε_y, ε_z равны между собой и определяются выражением

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{P}{E}(1-2\mu). \qquad (77.1)$$

Их легко выразить через относительное изменение объема параллелепипеда при деформации. Действительно, взяв логарифмические производные от обеих частей равенства $V = xyz$, получим

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta z}{z}$$

или

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \qquad (77.2)$$

Поэтому формулу (77.1) можно представить в виде

$$\frac{\Delta V}{V} = -\frac{P}{K}, \tag{77.3}$$

где постоянная K определяется выражением

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}. \tag{77.4}$$

Эта постоянная называется *модулем всестороннего сжатия*. Формула (77.3) применима к телам произвольной, а не только прямоугольной формы. Для доказательства достаточно заметить, что произвольное тело можно мысленно разделить на малые части, каждая из которых имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Эти части находятся под постоянным внешним давлением. Относительные изменения их объемов, а следовательно, и относительное изменение объема всего тела одинаковы и определяются формулой (77.13).

Выражение (76.3) для плотности упругой энергии в случае *деформации всестороннего сжатия* переходит в

$$u = \frac{3(1-2\mu)}{2E} P^2 = \frac{P^2}{2K}. \tag{77.5}$$

Так как величина u существенно положительна, то должно быть $1 - 2\mu > 0$, т. е.

$$\mu < \frac{1}{2}. \tag{77.6}$$

2. Рассмотрим другой важный случай — *деформацию одностороннего растяжения или сжатия*. Пусть однородный стержень может свободно растягиваться или сжиматься в направлении его оси (которую мы примем за координатную ось X), а его поперечные размеры изменяться не могут. Этот случай имеет важное значение в теории распространения продольных волн в неограниченной упругой среде (см. § 83). Можно мысленно вырезать часть среды, имеющую форму стержня, направленного вдоль распространения волны. Такой «стержень» может сжиматься или расширяться в продольном направлении. Однако изменениям его поперечных размеров препятствует окружающая среда. Форма поперечного сечения стержня не имеет значения. Возьмем стержень с прямоугольным поперечным сечением, чтобы можно было воспользоваться формулами (76.1). Пусть вдоль стержня действует постоянное натяжение T_x. Поперечные напряжения T_y и T_z найдутся из условия неизменности размеров стержня в направлениях координатных осей Y и Z. Полагая в формулах (76.1) $\Delta y = \Delta z = 0$, получим

$$T_y - \mu(T_z + T_x) = 0, \qquad T_z - \mu(T_x + T_y) = 0.$$

Отсюда

$$T_y = T_z = \frac{\mu}{1-\mu} T_x, \tag{77.7}$$

$$\varepsilon_x = \frac{T_x}{E}\left(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu}\right). \tag{77.8}$$

Введем обозначение

$$E' = E\frac{1-\mu}{1-\mu-2\mu^2} = E\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \tag{77.9}$$

или

$$E' = \left[\frac{2}{3(1+\mu)} + \frac{1}{3(1-2\mu)}\right]E. \tag{77.10}$$

Тогда

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{T_x}{E'}. \tag{77.11}$$

Это соотношение аналогично соотношениям (75.7). Постоянная E' называется *модулем одностороннего растяжения.*

ЗАДАЧА

Прямоугольная пластинка зажата между вертикальными плоскостями, перпендикулярными к оси X, так что в направлении этой оси частицы пластинки смещаться не могут (рис. 202). В направлении оси Z пластинка подвергается равномерному одностороннему давлению P. Определить давление P_x, которому подвергается пластинка со стороны плоскостей, между которыми она зажата. Найти выражение для плотности упругой энергии u, а также относительное сжатие пластинки в направлении оси Z и относительное расширение в направлении оси Y.

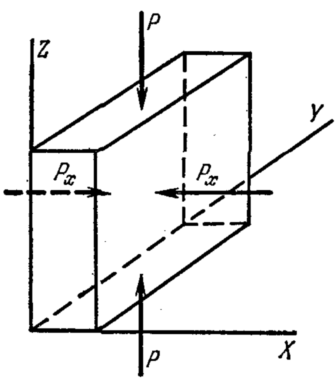

Рис. 202.

Ответ: $P_x = \mu P$, $\dfrac{\Delta y}{y} = \dfrac{\mu P}{E}(1+\mu)$, $\dfrac{\Delta z}{z} = -\dfrac{P}{E}(1-\mu^2)$, $u = \dfrac{P^2}{2E}(1-\mu^2)$.

§ 78. Сдвиг

1. Возьмем куб из однородного и изотропного вещества. Приложим к *противоположным граням* его AD и BC равные и противоположно направленные касательные силы (рис. 203, *а*). Они образуют пару сил, под действием которой куб начнет вращаться. Для устранения вращения приложим такие же касательные силы к граням AB и CD. Тогда куб вращаться не будет, а будет только деформироваться. Необходимость приложения касательных напряжений к граням AB и CD непосредственно следует также из симметрии тензора упругих напряжений (см. § 74).