Отсюда

$$T_y = T_z = \frac{\mu}{1-\mu} T_x, \tag{77.7}$$

$$\varepsilon_x = \frac{T_x}{E}\left(1 - \frac{2\mu^2}{1-\mu}\right). \tag{77.8}$$

Введем обозначение

$$E' = E\,\frac{1-\mu}{1-\mu-2\mu^2} = E\,\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \tag{77.9}$$

или

$$E' = \left[\frac{2}{3(1+\mu)} + \frac{1}{3(1-2\mu)}\right] E. \tag{77.10}$$

Тогда

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{T_x}{E'}. \tag{77.11}$$

Это соотношение аналогично соотношениям (75.7). Постоянная E' называется *модулем одностороннего растяжения.*

ЗАДАЧА

Прямоугольная пластинка зажата между вертикальными плоскостями, перпендикулярными к оси X, так что в направлении этой оси частицы пластинки смещаться не могут (рис. 202). В направлении оси Z пластинка подвергается равномерному одностороннему давлению P. Определить давление P_x, которому подвергается пластинка со стороны плоскостей, между которыми она зажата. Найти выражение для плотности упругой энергии u, а также относительное сжатие пластинки в направлении оси Z и относительное расширение в направлении оси Y.

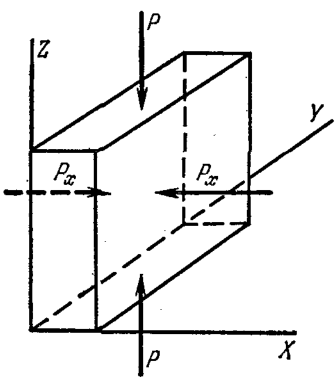

Рис. 202.

Ответ: $P_x = \mu P$, $\frac{\Delta y}{y} = \frac{\mu P}{E}(1+\mu)$, $\frac{\Delta z}{z} = -\frac{P}{E}(1-\mu^2)$, $u = \frac{P^2}{2E}(1-\mu^2)$.

§ 78. Сдвиг

1. Возьмем куб из однородного и изотропного вещества. Приложим к *противоположным граням* его AD и BC равные и противоположно направленные касательные силы (рис. 203, *а*). Они образуют пару сил, под действием которой куб начнет вращаться. Для устранения вращения приложим такие же касательные силы к граням AB и CD. Тогда куб вращаться не будет, а будет только деформироваться. Необходимость приложения касательных напряжений к граням AB и CD непосредственно следует также из симметрии тензора упругих напряжений (см. § 74).

Опыт показывает, что под действием приложенных напряжений квадрат $ABCD$ переходит в ромб $A'B'C'D'$. При этом длина диагонали AC увеличивается, а диагонали BD — уменьшается. Объем тела, как будет показано ниже, при такой деформации практически изменяться не будет. Относительные изменения объема будут величинами более высокого порядка малости, чем относительные изменения длин диагоналей AC и BD. В теории малых деформаций такими изменениями пренебрегают. Высшего порядка малости будут и изменения длин сторон квадрата $ABCD$. Поэтому куб после деформации можно повернуть так, чтобы новое основание $A'D'$ совместилось с прежним основанием AD (рис. 203, *б*). Отсюда видно, что рассматриваемая деформация состоит в том, что все слои куба,

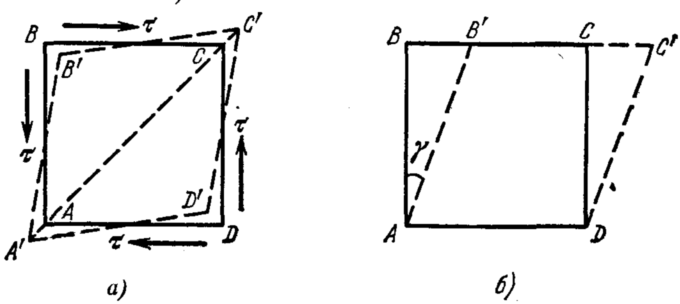

Рис. 203.

параллельные основанию AD, сдвигаются в одном и том же направлении, параллельном тому же основанию. Поэтому эта деформация называется *сдвигом*. Величина сдвига пропорциональна расстоянию сдвигаемого слоя от основания AD. Угол γ между гранью AB до деформации и той же гранью AB' после деформации называется *углом сдвига*. Конечно, ту же деформацию можно получить путем сдвига параллельно грани AB или CD на тот же угол γ. Мы предполагаем, конечно, что угол γ мал ($\gamma \ll 1$) и пользуемся законом Гука. Для деформации сдвига этот закон можно записать в виде

$$\tau = G\gamma, \qquad (78.1)$$

где τ — касательное напряжение, действующее на гранях куба. Постоянная G называется *модулем сдвига* и зависит от материала, из которого изготовлен куб.

2. Найдем выражение для плотности упругой энергии при деформации сдвига. Закрепив неподвижно основание AD (рис. 203, *б*), будем производить сдвиг квазистатически. Тогда вся работа, затрачиваемая на сдвиг, пойдет на увеличение упругой энергии тела. Совершаемая работа, очевидно, равна $A = {}^1/_2\tau S\Delta x$, где Δx — смещение грани BC при сдвиге, а S — площадь этой грани. Если a — длина ребра куба, то $\Delta x = a\gamma$, а потому $A = {}^1/_2\tau Sa\gamma = {}^1/_2V\tau\gamma$, где V — объем куба. Таким образом, объемная плотность упругой энергии выражается формулой

$$u = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G}. \tag{78.2}$$

3. Тангенциальные напряжения, действующие параллельно граням куба, можно свести к совокупности натяжения и давления, равных по величине и действующих во взаимно перпендикулярных направлениях. Действительно, проведем диагональное сечение куба AC (плоскостью, перпендикулярной к плоскости рис. 203, *а*). Сила F, действующая на часть куба ACD на плоскости AC, будет нормальна к этой плоскости и направлена внутрь рассматриваемой части. Это есть сила нормального давления. Определим величину этого давления. Если длина ребра куба есть a, то сила F, очевидно, равна

$$F = a^2(\tau \sin 45^\circ + \tau \cos 45^\circ) = \sqrt{2}a^2\tau.$$

Площадь диагонального сечения AC есть $a^2\sqrt{2}$. Разделив F на эту площадь, получим искомое давление $P = \tau$. Итак, в диагональном сечении AC и во всякой плоскости, ему параллельной, напряжение сводится к нормальному давлению, численно равному τ. Рассуждая аналогично, можно доказать, что в диагональном сечении BD и во всякой плоскости, параллельной ему, действует нормальное натяжение T, также численно равное τ.

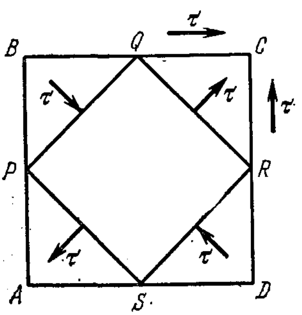

Рис. 204.

4. На основании изложенного ясно, что *сдвиг эквивалентен растяжению тела в некотором направлении и сжатию в перпендикулярном направлении.* Вырежем, например, мысленно из нашего куба прямоугольный параллелепипед с поперечным сечением $PQRS$ (рис. 204). В направлении диагонали куба AC он будет растянут натяжением $T = \tau$, в перпендикулярном направлении BD — сжат давлением $P = \tau$. В направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка, размеры параллелепипеда останутся неизменными. Направим ось X параллельно ребрам PQ и SR, а ось Y — параллельно ребрам QR и PS. Тогда, подставляя в формулы (76.1) $T_x = \tau$, $T_y = -\tau$, $T_z = 0$, получим $\varepsilon_z = 0$, $\varepsilon_x + \varepsilon_y = 0$. В силу соотношения (77.2) $\Delta V = 0$. Деформация не сопровождается изменением объема тела — утверждение, которое упоминалось выше без доказательства.

5. Таким же путем из формулы (76.3) получаем для плотности упругой энергии при сдвиге

$$u = \frac{1+\mu}{E}\tau^2. \tag{78.3}$$

Эта величина должна совпадать с (78.2), так как значение u не может зависеть от способа вычисления. Сравнивая оба выражения, получим

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{78.4}$$

Эта формула устанавливает связь между модулем Юнга E, коэффициентом Пуассона μ и модулем сдвига G. Используя ее, а также формулы (77.10) и (77.4), получим

$$E' = K + \frac{4}{3} G. \tag{78.5}$$

§ 79. Кручение

1. Деформации, о которых шла речь до сих пор, были деформациями *однородными,* т. е. такими, когда все бесконечно малые элементы тела деформированы одинаково. *Деформации кручения и изгиба*, к изучению которых мы обращаемся, *являются деформациями неоднородными.* Это значит, что в этих случаях деформации внутри тела меняются от точки к точке.

Возьмем однородную проволоку, закрепим ее верхний конец, а к нижнему концу приложим закручивающие силы, создающие вращающий момент M относительно продольной оси проволоки. Проволока закрутится — каждый радиус нижнего основания ее повернется вокруг продольной оси на угол φ. Такая деформация называется *кручением.* Закон Гука для деформации кручения записывается в виде

$$M = f\varphi, \tag{79.1}$$

где f — постоянная для данной проволоки величина, называемая ее *модулем кручения.* В отличие от ранее введенных модулей E, K, E', G и коэффициента μ, *модуль кручения зависит не только от материала, но и от геометрических размеров проволоки.*

2. Выведем выражение для модуля кручения f. Сначала сделаем это для цилиндрической трубки радиуса r и длины l, предполагая, что толщина δr стенки трубки очень мала по сравнению с радиусом r. Площадь основания трубки есть $2\pi r\delta r$. Момент сил, действующий на это основание, будет $M = 2\pi r\delta r \cdot \tau r$, где τ — касательное напряжение в том же основании. При квазистатическом закручивании проволоки на угол φ совершается работа $A = {}^1/_2 M\varphi = \frac{M^2}{2f}$. Разделив ее на объем трубки $V = 2\pi r l \delta r$, найдем плотность упругой энергии при деформации кручения

$$u = \frac{\pi\tau^2 r^3 \delta r}{fl}. \tag{79.2}$$