Поэтому если в неограниченной среде возникло какое-либо возмущение, то, вообще говоря, оно разделится на продольное и поперечное, причем продольное возмущение придет в точку наблюдения быстрее поперечного. Необходимость такого разделения непосредственно следует из принципа суперпозиции малых возмущений, согласно которому продольное и поперечное возмущения должны распространяться *независимо друг от друга.*

В качестве примера вычислим скорости распространения упругих возмущений в железе или стали. Из опытов найдено $E = 21{,}2\cdot 10^{10}$ Н/м², $G = 8{,}2 \times 10^{10}$ Н/м², $\mu = 0{,}29$, $\rho = 7{,}8\cdot 10^3$ кг/м³. Используя эти данные, получим

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}=5{,}2\cdot 10^3 \text{ м/с},$$

$$c_{\|}=c\sqrt{\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}=6\cdot 10^3 \text{ м/с},$$

$$c_{\perp}=\sqrt{\frac{G}{\rho}}=3{,}4\cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

ЗАДАЧИ

1. Показать, что скорость распространения крутильных колебаний вдоль стержня совпадает со скоростью поперечных возмущений $c_{\perp}$.

Решение. Для общности будем считать, что стержень представляет собой цилиндрическую трубку с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2. Пусть к основанию трубки приложены постоянные касательные напряжения, создающие вращающий момент M относительно ее геометрической оси. В трубке возникнет деформация кручения, скорость распространения которой обозначим c. В возмущенной области вещество будет вращаться с постоянной угловой скоростью ω. Если момент M действовал в течение времени t, то, очевидно,

$$Mt=I\omega,$$

где I — момент инерции возмущенной области. С другой стороны, $M = f\varphi = f\omega t$. Это дает $ft^2 = I$. Подставляя сюда $I = {}^1/_2\,\pi\rho l\,(r_2^4 - r_1^4)$, $t = l/c$ (l — длина возмущенной области) и пользуясь соотношением (79.4), получим

$$\rho c^2 = G.$$

2. Найти выражение для скорости продольных звуковых возмущений, распространяющихся в безграничной двумерной тонкой пластинке. Показать, что эта скорость меньше, чем скорость продольных возмущений в неограниченной среде (см. задачу к § 77).

Ответ. $c=\sqrt{\dfrac{E}{\rho(1-\mu^2)}}$.

§ 84. Скорость распространения поперечных возмущений в натянутом шнуре

1. Возможность распространения поперечных возмущений в твердых телах обусловлена присущей им поперечной упругостью, т. е. способностью тел сопротивляться всякому изменению формы, происходящему без изменения объема. Поперечная упругость может быть создана искусственно и в случае таких тел, у которых в естественном состоянии она отсутствует. Примером может служить гибкий шнур или веревка. Если шнур не натянут, то поперечные возмущения в нем распространяться не могут. Если же закрепить один конец шнура, а к другому подвесить груз, перекинув шнур через блок, то в шнуре возникнет постоянное натяжение, обозначаемое в дальнейшем T. Такой шнур обладает *упругостью формы*, и в нем могут распространяться поперечные возмущения. Скорость таких возмущений можно вычислить по формуле (83.5). Но для этого надо решить вопрос, какая величина в натянутом шнуре играет роль модуля сдвига G. Рассмотрим небольшой участок AB натянутого и изогнутого шнура (рис. 227). Будем предполагать, что деформации натянутого шнура, связанные с поперечными смещениями его частиц, малы. Тогда можно пренебречь изменениями величины натяжения T, обусловленными изгибом шнура при таких малых деформациях. В этом приближении натяжения T, действующие на концы участка AB вдоль его оси, одни и те же. Их составляющие, касательные к основаниям участка AB, равны $T \sin\gamma \approx T\gamma$. Поэтому на основаниях рассматриваемого участка будут действовать касательные напряжения $\tau = (T/S)\,\gamma$, где S — площадь поперечного сечения шнура. Деформацию участка AB можно рассматривать как сдвиг под действием таких касательных напряжений. Сравнивая поэтому предыдущее выражение с формулой $\tau = G\gamma$, находим, что роль модуля сдвига играет величина $G = T/S$. Подставим это выражение в формулу (83.5) и введем обозначение $\delta = \rho S$. Тогда для скорости распространения поперечных возмущений в шнуре получим

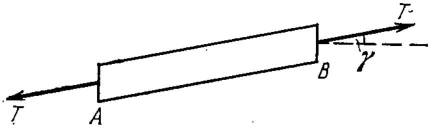

Рис. 227.

$$c = \sqrt{\frac{T}{\delta}}. \tag{84.1}$$

Величина δ равна массе, приходящейся на единицу длины шнура. Она называется *линейной плотностью* шнура.

2. Если возмущение в шнуре распространяется в одном направлении, то в таком возмущении плотности кинетической и потенциальной энергий в любой момент времени, конечно, будут одинаковы. Направление распространения возмущения можно определить из энергетических соображений. Для этого помимо формы шнура в рассматриваемый момент времени надо еще задать скорость каждой его точки. Так, например, возмущение, представленное на рис. 228, распространяется вправо. Вертикальными стрелками обозначены скорости частиц шнура в рассматриваемый момент времени. Если мысленно провести в шнуре какое-либо поперечное сечение, то угол между силой натяжения, действующей на правую часть шнура, и ее скоростью в рассматриваемом сечении будет острым. Напротив, сила натяжения, действующая на левую часть шнура, составляет с соответствующей скоростью тупой угол. Это значит, что над правой частью шнура сила натяжения совершает положительную, а над левой — отрицательную работу. Потому-то возмущение и распространяется вправо. Если изменить на противоположные направления скоростей всех частиц, то возмущение пойдет влево.

3. Формулу (84.1) можно получить также следующим, очень поучительным способом. Пусть в шнуре возбуждено поперечное возмущение, распространяющееся, например, вправо (рис. 228) со скоростью c. Рассмотрим явление в системе отсчета, равномерно движущейся вправо также со скоростью c. В этой системе отсчета возмущение будет стоять на месте, а весь шнур — двигаться влево со скоростью c. В возмущенной области на это движение будут накладываться малые поперечные колебания частиц шнура. Ось шнура является траекторией движущихся частиц, находящихся на этой оси. Если на шнур надеть надлежащим образом изогнутую цилиндрическую трубку, неподвижную в рассматриваемой движущейся системе отсчета, то наличие такой трубки никак не отразится на движении шнура. Шнур будет просто протягиваться через трубку, нигде не касаясь ее стенок. Для того чтобы это имело место, необходимо тянуть шнур с вполне определенной скоростью c. При малых возмущениях скорости поперечных движений частиц шнура v малы по сравнению с c. В выражении полной скорости частиц $\sqrt{c^2+v^2}$ квадратом малой величины v можно пренебречь.

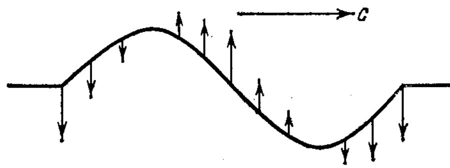

Рис. 228.

В этом приближении величина полной скорости частиц шнура считается одной и той же на протяжении всей его длины и равной c. Однако в области трубки, где шнур изогнут, его частицы движутся ускоренно. Их ускорения направлены нормально к траектории и определяются выражением $a = c^2/R$. Для создания таких ускорений нужна сила, действующая нормально к траектории. Она возникает из-за изгиба шнура. Найдем ее величину. Выделим мысленно бесконечно малый элемент изогнутого шнура AB, длину которого обозначим s (рис. 229). Его можно рассматривать как бесконечно малую дугу окружности радиуса R. На концы этого элемента действуют продольные натяжения T_1 и T_2. Их абсолютные величины в пределах принятой точности расчета одинаковы ($T_1 = T_2 = T$). Но направления немного отличаются друг от друга. Благодаря этому и появляется результирующая сила, направленная нормально к элементу AB. Она равна

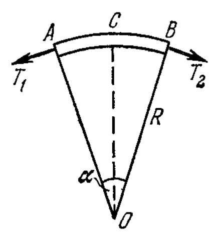

Рис. 229.

$$F = 2T\sin\frac{\alpha}{2} \approx T\alpha = T\,\frac{s}{R}.$$

Приравнивая эту силу массе элемента AB, умноженной на его ускорение, получим

$$T\frac{s}{R} = s\delta\frac{c^2}{R},$$

откуда снова получается формула (84.1).

§ 85. Скорость распространения звука в жидкостях и газах

1. Жидкости и газы обладают только *объемной упругостью*, но не упругостью формы. Поэтому в них могут распространяться только продольные возмущения, но не могут распространяться возмущения поперечные. Скорость распространения продольных возмущений в жидкой или газообразной среде можно вычислить по формуле (81.5). Но для этого надо решить, чтó в этом случае играет роль модуля Юнга E. Вообразим, что жидкая или газообразная среда заключена в гладкую прямолинейную трубу постоянного поперечного сечения. Трением между средой и стенками трубы пренебрежем. Стенки трубы будут препятствовать поперечному движению среды, нисколько не мешая продольному движению. Газ или жидкость в такой трубе можно рассматривать как стержень, вдоль которого распространяются продольные возмущения. Отличие от твердых тел состоит в том, что газы могут существовать *только под давлением*. При отсутствии такового всякий газ неограниченно расширился бы. Поэтому необходимо предполагать, что в невозмущенном состоянии давление внутри газа отлично от нуля. Обозначим его посредством P_0. Так же будем поступать в случае жидкости. Если давление внутри газа получит приращение и сделается равным $P = P_0 + \Delta P$, то изменится и объем рассматриваемой массы газа.

Определим, как изменение объема газа ΔV связано с приращением его давления ΔP. При этом мы будем предполагать, что ΔP малó по сравнению с P_0: $\Delta P \ll P_0$. Если газ заключен в трубе, один из концов которой закрыт подвижным поршнем, то при изменении давления на поршень на величину ΔP длина газового столба изменится на Δl. Величина — $(\Delta l/l)$ есть относительное сжатие столба газа. При малых сжатиях

$$\Delta P = -A\frac{\Delta l}{l},$$

где A — постоянная. С другой стороны, формулу (75.7) для стержня можно переписать в виде $\Delta P = -E\frac{\Delta(\Delta l)}{l}$, где $\Delta(\Delta l)$ — приращение длины стержня при изменении давления на ΔP. По смыслу оно совпадает с тем, что в случае газового столба мы обозначили посредством Δl. Поэтому, меняя обозначение, модуль Юнга можно определить также с помощью формулы

$$\Delta P = -E\frac{\Delta l}{l}. \tag{85.1}$$