

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. С.М.КИРОВА

А.А. КИРСАНОВ

**ЭЛЕМЕНТЫ
ТЕОРИИ
СИММЕТРИИ**

I

ПСКОВ 2000

ББК 22.311**К435**

Печатается по решению кафедры алгебры и геометрии,
редакционно-издательского совета ПГПИ им. С.М.Кирова.

Научный редактор:

Зав. кафедрой алгебры и геометрии,
кандидат физико-математических наук, доцент **И.Н. Медведева**

Рецензенты:

Зав. кафедрой теоретической механики Псковского
политехнического института, доктор технических наук,
профессор **Ю.Г. Баринов**.

Кафедра алгебры и геометрии ПГПИ им. С.М.Кирова

Кирсанов А.А.

К 435 Элементы теории симметрии. Часть I. Учебное пособие. Псков,
2000. - 272 с.

Учебное пособие представляет собой специальный курс лекций по выбору. В первой части пособия рассматриваются линейные пространства, конструкции над пространствами и операторами, тензорная алгебра, группы, представления групп, алгебры Ли, представления групп $SO(2)$, $SO(3)$, $SU(n)$, $SU(2)$ и $SU(3)$. Учебное пособие рассчитано на студентов старших курсов и аспирантов физико-математических факультетов педагогических вузов. Может быть полезным студентам технических вузов при более глубоком изучении математических основ теоретической физики.

К 435**ISBN 5-87854-130-0**

© Псковский государственный педагогический институт им. С.М.Кирова
(ПГПИ им. С.М.Кирова), 2000

Содержание

Предисловие	7
Глава I. Линейные пространства	
§1.1. Линейное пространство	9
§1.2. Примеры линейных пространств.	11
§1.3. Элементарные следствия из аксиом линейного пространства	15
§1.4. Линейная зависимость	17
§1.5. Конечномерные и бесконечномерные пространства. Базис	17
§1.6. Изоморфизм линейных пространств	21
§1.7. Соответствие между комплексными и действительными пространствами	22
§1.8. Линейное подпространство	24
§1.9. Скалярное произведение	24
§1.10. Комплексные евклидовы пространства	30
1.10.1. Общие определения	30
1.10.2. Изоморфизм комплексных евклидовых пространств	33
1.10.3. Антиизоморфизм пространств	34
1.10.4. Гильбертово пространство	34
§1.11. Линейные операторы	35
§1.12. Действия над операторами	38
§1.13. Сопряженный оператор	41
§ 1.14. Унитарный оператор	44
§ 1.15. Эрмитов оператор	45
§ 1.16. Проектирующий оператор	46
§1.17. Произвольный линейный оператор в комплексном евклидовом пространстве	47
 Глава II. Конструкции над пространствами и операторами	
§2.1. Дуальные пространства	49
§2.2. Дуальные базисы	54
§2.3. Дуальные операторы	55

§2.4.	Ортогональная сумма пространств	56
§2.5.	Приводимые операторы	58
§2.6.	Собственные векторы и собственные значения	61
§2.7.	Тензорное произведение пространств	65
§2.8.	Тензорное произведение операторов	69
§2.9.	произведение произвольного числа пространств	71

Глава III. Тензорная алгебра над комплексным евклидовым пространством

§3.1.	Определение понятия тензора	73
§3.2.	Задание тензора координатами	76
§3.3.	Индукцированный оператор	78
§3.4.	Тензор как закон преобразования	82
§3.5.	Тензор как полилинейная форма	84
§3.6.	Умножение и свёртывание тензоров	85
§3.7.	Симметрические и антисимметрические тензоры	87
§3.8.	Бисимметрические тензоры	91
§3.9.	Антисимметрические тензоры	91
§3.10.	Операторы симметризации	92

Глава IV. Группы и их свойства

§4.1.	Определение групп	93
§4.2.	Группы в матричной форме	96
§4.3.	Дискретные и непрерывные группы	97
§4.4.	Гомоморфизм, изоморфизм и автоморфизм групп	101
§4.5.	Примеры групп	103
§4.6.	Группы Ли	110
§4.7.	Прямое произведение групп	114
§4.8.	Сопряженные элементы и классы	115
§4.9.	Примеры классов	116
§4.10.	Классы произведения групп	119
§4.11.	Теорема о перечислении групп	120

Глава V. Представления групп

§ 5.1.	Определение представления группы	121
§ 5.2.	Матричные представления	122
§ 5.3.	Примеры представлений групп	123
§ 5.4.	Сумма представлений	130
§ 5.5.	Произведение представлений	131
§ 5.6.	Эквивалентность представлений	132

§ 5.7. Неприводимые представления	133
§ 5.8. Неэквивалентные неприводимые представления	135
§ 5.9. Леммы Шура	136
§ 5.10. Характеры представлений	144
§ 5.11. Соотношение ортогональности для характеров неприводимых представлений	145
§ 5.12. Приведение представлений с помощью характеров групп	146
§ 5.13. Критерий неприводимости	148
§ 5.14. Число неэквивалентных неприводимых представлений, регулярное представление	149
§ 5.15. Второе соотношение ортогональности для характеров групп	152
§ 5.16. Построение таблицы характеров	153
§ 5.17. Ортогональность базисных функций неприводимых представлений	154

Глава VI. Алгебры Ли

§ 6.1. Основные понятия и общие свойства	158
§ 6.2. Изоморфизм алгебр Ли	159
§ 6.3. Свойства коммутаторов алгебры Ли	159
§ 6.4. Задание алгебры Ли с помощью образующих и соотношений	160
§ 6.5. Подалгебры Ли	161
§ 6.6. Примеры алгебр Ли	162
§ 6.7. Экспоненциальное отображение	173
§ 6.8. Группы Ли и алгебры Ли	178
§ 6.9. Подгруппы и подалгебры	178
§ 6.10. Представления алгебр Ли	180

Глава VII. Представления непрерывных групп вращения $SO(2)$ и $SO(3)$

§ 7.1. Общие замечания	185
§ 7.2. Инфинитезимальные операторы	187
§ 7.3. Группа $SO(2)$	192
7.3.1. Неприводимые представления	192
7.3.2. Характер	194
7.3.3. Примеры базисных векторов	194
7.3.4. Инфинитезимальные операторы	196

§7.4.	Группа $SO(3)$	198
7.4.1.	Инфинитезимальные операторы	199
7.4.2.	Неприводимые представления	201
7.4.3.	Характеры	207
7.4.4.	Произведение представлений	208
§7.5.	Оператор Казимира	215

Глава VIII. Группа $SU(n)$ и её представления

§8.1.	Унитарные представления	217
§8.2.	Неприводимые представления	219
§8.3.	Сопряженные и контрагredientные преобразования	222
§8.4.	Генераторы группы $SU(n)$ и её основные представления	223
§8.5.	Спиноры высших рангов	226
§8.6.	Неприводимые представления	230

Глава IX. Представления групп $SU(2)$ и $SU(3)$

§9.1.	Группа $SU(2)$ и её представления	237
9.1.1.	Представления группы $SU(2)$	237
9.1.2.	Инфинитезимальные операторы группы $SU(2)$	241
9.1.3.	Примеры спиноров низших рангов	242
§9.2.	Группа $SU(3)$ и её представления	245
9.2.1.	Генераторы группы $SU(3)$	245
9.2.2.	Неприводимые представления группы $SU(3)$	249
9.2.3.	Спиноры низших рангов	255
9.2.4.	Подгруппы $SU(2)$	260
	Литература	265
	Предметный указатель	267

Предисловие

Предлагаемое учебное пособие охватывает материал, необходимый при изучении вопросов симметрии в теоретической физике, особенно квантовой механики и теории построения унитарной симметрии элементарных частиц. Все основные понятия, такие как: линейное пространство, базис, скалярное произведение, оператор, тензор, дуальные пространства, коммутатор и т.д. вводятся так, как это принято обозначать и использовать в теоретической физике, что позволяет существенно упростить их практическое применение.

Учебное пособие предназначено студентам и аспирантам физико-математических факультетов педагогических вузов, но может быть полезным студентам технических вузов при более глубоком изучении математических основ классической механики, статистической физики и квантовой механики.

Первая глава учебного пособия посвящена теории линейных пространств и линейных операторов, действующих в этих пространствах.

Во второй главе рассматриваются конструкции над пространствами и операторами, имеющие некоторую аналогию с операциями над комплексными числами и составляющие основу тензорной алгебры и теории представлений.

Третья глава посвящена тензорной алгебре над комплексным евклидовым пространством. Исходя из требований физических приложений тензор определяется, в отличие от общепринятых способов, как вектор некоторого комплексного евклидова пространства. Для более полного понимания понятия тензора приводятся его типовые определения: тензор как закон преобразования, тензор как полилинейная функция. Рассматриваются алгебраические действия над тензорами.

В четвёртой главе вводится понятие группы и рассматриваются их свойства, приведена классификация групп Ли.

Пятая глава посвящена объединению понятий группы и векторного пространства. Рассматривается взаимосвязь между элементами группы преобразований и преобразованиями векторного пространства.

Шестая глава посвящена алгебрам Ли, которые так же рассматриваются с позиций требований физических приложений. Рассмат-

риваются вопросы взаимосвязи алгебр Ли с группами Ли, представления алгебр Ли.

В седьмой главе рассматриваются представления непрерывных групп вращения $SO(2)$ и $SO(3)$, приводятся их характеры и инфинитезимальные операторы, вводится понятие оператора Казимира.

Восьмая и девятая главы посвящены построению представлений специальных унитарных групп $SU(n)$, $SU(2)$ и $SU(3)$, имеющих исключительное значение в теории спина и теории классификации элементарных частиц.

Выражаю искреннюю признательность заведующей кафедрой алгебры и геометрии, кандидату физико-математических наук, доценту **Ирине Николаевне Медведевой**, заведующему кафедрой теоретической механики Псковского политехнического института, доктору технических наук, профессору **Юрию Григорьевичу Баринову**, кандидату физико-математических наук, доценту кафедры алгебры и геометрии **Владимиру Александровичу Матвееву** критические замечания, добрые советы и поддержка которых оказали большую помощь в работе над рукописью. Мне хочется также отметить решающее влияние на характер и направленность предлагаемого учебного пособия доктора физико-математических наук, профессора кафедры физики Псковского государственного педагогического института им. С.М.Кирова **Германа Ароновича Розмана**. Выражаю, также, свою признательность генеральному директору ЗАО «Телеком» **Виктору Михайловичу Соловьёву** за финансовую поддержку издания учебного пособия.

*Автор.
Псков, 2000 г.*