Глава I
Линейные пространства

Данная глава посвящена понятию линейного пространства, где в качестве его элементов рассматриваются инвариантные векторы любой природы. Конкретизируя природу вектора (см.§1.2.) мы будем получать конкретные примеры линейных векторных пространств.

С помощью введения понятия скалярного произведения элементов (векторов) линейного пространства мы вводим в него метрику, в результате чего получаем соответствующее (действительное или комплексное) евклидово пространство.

Рассмотрев основные понятия линейного пространства мы переходим к самому важному понятию всего учебного пособия - понятию линейного оператора (преобразования), определим действия над операторами в заданном пространстве и рассмотрим наиболе важные для дальнейших приложений виды операторов: сопряжённые, унитарные и эрмитовы.

§1.1. Линейное пространство

Нам часто приходится рассматривать некоторые множества объектов, для которых установлены так называемые линейные операции: сложение и умножение на число. Примером такого множества может служить множество свободных векторов. Вскоре оказалось, что многие другие математические множества подчиняются линейным операциям. Так, множество всех функций непрерывных на отрезке, множество решений линейных однородных дифференциальных уравнений, множество многочленов над некоторым полем удовлетворяют линейным операциям.

При этом ни сами объекты не похожи на свободные векторы, ни линейные операции над этими объектами не похожи на линейные операции над векторами. Однако, во всех приведённых примерах есть нечто общее, позволяющее изучать линейные операции абстрактно, отвлекаясь от конкретной природы объектов.

Прежде всего, во всех приведённых примерах линейные операции над элементами данного множества дают в результате элементы того же множества: складывая элементы множества или умножая их на число, мы вновь получаем элементы того же множества.

Линейные операции, различные для разных множеств, имеют ряд общих свойств, что позволяет изучать линейные операции вообще.

Изучая множества с данными в них линейными операциями, их объединяют понятием *линейного (векторного) пространства.* Название пространства "векторное" проистекает из того, что это понятие было вначале выделено при изучении свободных векторов, которые представляют собой первый пример линейного пространства с внутренним законом геометрического сложения векторов и внешним законом умножения вектора на число. В силу этого элементы линейных пространств принято называть векторами, а сами линейные пространства часто называют векторными пространствами.

Определение линейного пространства обобщает определение совокупности всех векторов. Обобщение производится, во-первых, путём отвлечения от конкретной природы элементов множества с сохранением свойств действий над ними, во-вторых, путём отвлечения от конкретной природы допустимых множителей.

Пусть имеется множество L, состоящее из каких угодно элементов $a,b,...;\,x,y,...$ Вместе с элементами множества L будем рассматривать действительные и комплексные числа $\alpha,\beta,\gamma,...$, образующие множество (поле) K.

Будем считать, что в множестве L определены действия сложения и умножения, если:

1) каждым двум элементам a и b из L сопоставлен некоторый элемент того же множества L, называемый их суммой. Сумма элементов a и b обозначается через $a+b$;

2) каждому числу α и каждому элементу a из L сопоставлен некоторый элемент из того же множества L, называемый произведением α на a или a на α, которое мы обозначим как αa или $a\alpha$.

Определение. *Линейным (векторным) пространством* L *над полем* K*, называется множество* L *рассматриваемое вместе с заданными в нём действиями сложения и умножения на число, удовлетворяющее следующим аксиомам*:

Аксиомы линейного пространства:

1. Для любых a и b из L

$$a+b=b+a\,, \tag{1}$$

то есть операция сложения элементов из L обладает перестановочным (коммутативным) свойством.

2. Для любых a, b и c из L

$$(a+b)+c=a+(b+c), \tag{2}$$

то есть операция сложения элементов из L обладает сочетательным (ассоциативным) свойством и позволяет писать сумму элементов без скобок.

3. В L существует такой элемент θ, что

$$a+\theta=a \tag{3}$$

для любого a из L. Элемент θ называется *нулевым*.

4. Для любого элемента x из L существует элемент y из L такой, что

$$x+y=\theta\,. \tag{4}$$

Элемент y является противоположным для элемента x и обозначается через $-x$.

Для любых a и b из L и любых чисел α и β

5. $1\cdot a=a$ (5)

6. $\alpha(\beta a)=(\alpha\beta)a$ (6)

7. $(\alpha+\beta)a=\alpha a+\beta a$ (7)

8. $\alpha(a+b)=\alpha a+\alpha b$ (8)

§1.2. Примеры линейных пространств.

1. 2.1 Пространство геометрических векторов.

Пусть элементами множества L являются векторы. Два элемента из такого множества считаются равными в том и только том случае, когда они коллинеарные, имеют равные длины и направлены в одну сторону. Таким образом, мы говорим о свободных векторах, точка приложения которых может выбираться произвольно.

Допустимые замены вектора заключаются в его параллельных переносах к новым точкам приложения. Соблюдение первых трёх условий §1.1. при этом очевидно. Сложение векторов выполняется по правилу параллелограмма, а умножение на действительное число α есть растяжение вектора в α раз, с учётом направления. Обе операции инвариантны относительно допустимых замен. В самом деле, если $a = a'$, $b = b'$, то параллелограмм, построенный на векторах a', b', получается параллельным переносом параллелограмма, построенного на векторах a, b, тем самым, вектор $a' + b'$ получается параллельным вектору $a + b$, то есть $a + b = a' + b'$. С помощью подобного рассуждения мы можем доказать, что $\alpha a' = \alpha a$.

Векторы с указанным определением линейных операций образуют действительное линейное пространство. В качестве нулевого элемента выступает нуль-вектор – вектор нулевой длины. В качестве вектора y противоположного вектору x примем вектор $y = -x$, то есть вектор той же длины, но противоположного направления.

Требования аксиом (1) $\div$ (8) при этом будут соблюдены.

1.2.2. Нулевое пространство.

Пусть L состоит из одного единственного элемента θ, такого, что $\theta + \theta = \theta$, а $\alpha\theta = \theta$. Легко убедиться, что при этом выполняются все восемь аксиом линейного пространства. Таким образом, мы построили пространство, состоящее из единственного нулевого элемента.

В зависимости от того, к какому полю принадлежат числа α, мы будем получать нулевые пространства над соответствующим полем, так как поле входит в определение понятия линейного пространства.

1.2.3. Координатное пространство.

Пусть теперь элементами L являются всевозможные упорядоченные наборы действительных чисел, по n чисел, не обязательно различных, в каждом наборе. Упорядоченность набора означает, что числа в наборе занумерованы. Имея в виду, что элемент x из L есть набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, будем его записывать в виде $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Считая x произвольным, рассмотрим ещё один произвольный набор

$y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$. Элементы x и y будем считать равными, если $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ..., x_n = y_n$.

Пусть

$$x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n\}, \tag{1.2.1}$$

$$\alpha x = \{\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n\}. \tag{1.2.2}$$

Определим нулевой элемент как

$$\theta = \{0,0,...,0\}, \tag{1.2.3}$$

а противоположный элемент как

$$-x = \{-x_1, -x_2, ..., -x_n\}. \tag{1.2.4}$$

При оговорённых выше условиях будут выполнены все восемь аксиом и множество L будет являться действительным линейным пространством, которое мы будем обозначать как $R(n)$.

1.2.4. Пространство матриц.

Пусть прямоугольная таблица $m \times n$ чисел представляет собой $m \times n$ матрицу, для обозначения которой используют вертикальные двойные линии или круглые скобки.

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik}). \tag{1.2.5}$$

Пусть L - множество всех действительных $m \times n$ матриц. Две матрицы будем считать равными элементами из L в том и только том случае, когда в этих матрицах соответствующие места заняты одинаковыми числами.

Определим линейные операции в L. Если $a = (a_{ik})$, $b = (b_{ik})$ - произвольные матрицы из L, а α - произвольное число действительное число, то положим

$$\left.\begin{aligned} a+b&=(a_{ik})+(b_{ik}),\\ \alpha a&=(\alpha a_{ik}).\end{aligned}\right\} \tag{1.2.6}$$

Если в качестве нулевого элемента мы возьмём $m \times n$ - матрицу состоящую из одних только нулей, а матрицу противоположную матрице a определим как $(-a_{ik})$, то, очевидно, будут выполнены все аксиомы линейного пространства. Таким образом, мы получили действительное линейное пространство L, элементами которого являются действительные матрицы.

Замечание: Если положить $m = 1$ (при данном n), мы получим матрицу-строку из n чисел. Линейное пространство таких матриц совпадает с координатным пространством $R(n)$.

Если положить $n = 1$ (при данном m), мы получим матрицу-столбец из m чисел. Линейное пространство таких матриц будет совпадать с координатным пространством $R(m)$.

Само пространство $m \times n$ - матриц образует координатное пространство $R(mn)$, так как ничто не мешает нам установить для всех элементов матриц общую нумерацию и выписать их в одну строку.

1.2.5. Пространство непрерывных функций.

Возьмём на числовой оси произвольный отрезок $\tau_1 \le \tau \le \tau_2$ и обозначим через L множество всех функций, непрерывных на этом отрезке и принимающих на нём действительные значения. Обозначим x из L как $x = \psi(\tau)$. Считая x произвольным, рассмотрим ещё один произвольный элемент из L $y = \varphi(\tau)$. Элементы x и y будем считать равными в том и только том случае, когда $\psi(\tau) \equiv \varphi(\tau)$, то есть когда $\psi(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ совпадают в любой точке τ отрезка $\tau_1 \le \tau \le \tau_2$. Определим линейные операции как

$$x + y = \psi(\tau) + \varphi(\tau), \qquad \alpha x = \alpha\psi(\tau), \tag{1.2.7}$$

где α - произвольное действительное число.

Полагая в качестве нулевого элемента функцию равную нулю во всех точках отрезка $[\tau_1, \tau_2]$, а для элемента $x = \psi(\tau)$ в качестве противоположного возьмём элемент $-\psi(\tau)$. Очевидно, что множество всех действительных непрерывных на $[\tau_1, \tau_2]$ функций с линейными операциями (1.2.7) образует действительное линейное пространство.

Заметим, что если все $|\psi(\tau)| \le 1$, то такое множество непрерывных функций не образует линейного пространства, так как в общем случае из того, что $|\psi(\tau)| \le 1$ и $|\varphi(\tau)| \le 1$, не следует, что $|\psi(\tau) + \varphi(\tau)| \le 1$.

1.2.6. Пространство многочленов.

Совокупность многочленов $\alpha_0 + \alpha_1 t + ... + \alpha_{n-1} t^{n-1}$ степени $< n$ с коэффициентами из K представляет собой n - мерное векторное пространство. В качестве основных операций берутся обычное сложение многочленов и умножение многочлена на число.

Замечание: множество многочленов степени n не образует линейного пространства, так как сумма двух многочленов степени n может оказаться многочленом более низкой степени.

Например:

$$(t^n + t) + (-t^n + t) = 2t .$$

§1.3. Элементарные следствия из аксиом линейного пространства

Независимо от частных особенностей конкретных линейных пространств, имеют место следующие предложения:

1. *В каждом линейном пространстве имеется только один нулевой элемент* (вектор).

Пусть θ_1 и θ_2 нулевые элементы, тогда в соответствии с аксиомами 1 и 3 мы можем написать

$$\theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_1 .$$

2. *Для любого вектора x существует только один противоположный элемент* (вектор).

Полагая $x+y_1=\theta$ и $x+y_2=\theta$, на основании аксиом $1\div 4$ получим:

$$y_2=y_2+\theta=y_2+(x+y_1)=(y_2+x)+y_1=$$
$$=(x+y_2)+y_1=\theta+y_1=y_1,$$

то есть $y_1=y_2$.

3. *Произведение любого вектора* x *на число 0 равно нулевому вектору* θ.

Пусть y - вектор противоположный вектору x, тогда с помощью аксиом $2\div 5$ и 7 получим:

$$0\cdot x=0\cdot x+\theta=0\cdot x+(x+y)=(0+1)\cdot x+y=x+y=\theta.$$

4. *Произведение любого вектора* x *на число –1 равно вектору, противоположному* x.

Покажем, что $x+(-1)\cdot x=\theta$.

Используя следствие 3 и аксиомы 5 и 7 получим:

$$x+(-1)\cdot x=(1-1)\cdot x=0\cdot x=\theta, \text{ то есть } (-1)\cdot x=-x.$$

5. Произведение нулевого вектора θ на любое число α равно нулевому вектору.

Для произвольного вектора x используя аксиому 6 и следствие 3, получим:

$$\alpha\theta=\alpha(0\cdot x)=(\alpha\cdot 0)\cdot x=0\cdot x=\theta.$$

6. *Для любых двух векторов* a *и* b *существует разность, и при этом единственная.*

Пусть $x=b+(-1)a$. Используя аксиомы 2,3,5,7 и свойство 3 получим:

$$x+a=b+(-1)\cdot a+a=b+(-1+1)\cdot a=b+0\cdot a=b,$$

то есть $x=b-a$.

Если вектор x есть разность $b-a$, то его всегда можно представить в виде $x=b+(-1)\cdot a$. Из равенства $x+a=b$ с помощью аксиом 2,3,5,7 и свойства 3 получим:

$$x=x+\theta=x+(1-1)\cdot a=x+a+(-1)\cdot a=b+(-1)\cdot a.$$

§1.4. Линейная зависимость

Предположим, что нам дано конечное число элементов линейного пространства $a,b,c,...,q$ и произвольный набор чисел $\alpha,\beta,\gamma,...,\chi$.

Определение 1. *Всякий элемент x пространства L, представимый в виде*

$$x = \alpha a + \beta b + \gamma c + ... + \chi q \qquad (1.4.1)$$

называется ***линейной комбинацией*** *элементов $a,b,c,...,q$.*

Определение 2. *Система векторов $a,b,c,...,q$* ***называется линейно зависимой****, если существует линейная комбинация* (1.4.1) *равная нулевому вектору θ, где среди чисел $\alpha,\beta,\gamma,...,\chi$ хотя бы одно отлично от нуля.*

Определение 3. *Система векторов $a,b,c,...,q$ называется* ***линейно независимой****, если равенство*

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + ... + \chi q = \theta$$

возможно только в одном случае, если

$$\alpha = \beta = \gamma = ... = \chi = 0.$$

Приведём некоторые свойства введённых понятий, доказательства которых можно найти в соответствующей литературе.

1. Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.

2. Если часть системы линейно зависима, то вся система линейно зависима.

3. Если вся система линейно независима, то независима и любая её часть.

4. Для линейной зависимости необходимо и достаточно существования вектора, который линейно выражается через остальные векторы этой системы.

§1.5. Конечномерные и бесконечномерные пространства. Базис

Линейное пространство называется n - мерным, если в нём имеется линейно независимая комбинация, состоящая из n векторов, а всякая комбинация, состоящая из большего числа векторов, является линейно зависимой.

Число n называется *размерностью* линейного пространства. Таким образом, *размерность пространства – это наибольшее число его линейно независимых векторов***.**

В пространстве геометрических векторов существуют три линейно независимых вектора, а любые четыре вектора связаны линейной зависимостью.

Все n - мерные пространства $(n = 0,1,2,...)$ образуют класс конечномерных пространств.

Линейное пространство называется бесконечномерным, если для любого целого числа $N > 0$ *в нём найдётся линейно независимая система, состоящая из* N *векторов.*

Пример 1.5.1.

Линейное пространство непрерывных на данном отрезке функций (см. §1.2., п.5) является бесконечномерным. Рассмотрим степенные функции $1, \tau, \tau^2, ..., \tau^N$. Они линейно независимы, так как любая их комбинация есть многочлен степени не выше N

$$\alpha_0 + \alpha_1\tau + \alpha_2\tau^2 + ... + \alpha_N\tau^N = P(\tau).$$

Всякий многочлен с отличными от нуля коэффициентами имеет лишь конечное число корней, поэтому $P(\tau) \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_N = 0$.

Таким образом, мы установили, что рассматриваемые элементы $1, \tau, \tau^2, ..., \tau^N$ независимы и так как на число N нет никаких ограничений рассматриваемое пространство бесконечномерно.

Система векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ *в пространстве* L *называется базисом, если*:

1) векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ линейно независимы;

2) любой вектор x из L есть линейная комбинация $e_1, e_2, ..., e_n$, то есть

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + ... + x^n e_n. \qquad (1.5.1)$$

Равенство (1.5.1) называется разложением вектора x по базису

$e_1, e_2, \dots, e_n$; числовые коэффициенты $x^1, x^2, \dots, x^n$ называются координатами вектора x в этом базисе.

Рассмотрим вопрос о произволе в выборе базиса и выведем правило перехода от одного базиса к другому.

Фиксируем некоторый базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и пусть $e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}$ некоторый новый базис.

Согласно (1.5.1) каждый из векторов нового базиса $e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}$ может быть разложен по векторам старого базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$. Обозначая коэффициенты этих разложений буквой A с соответствующими индексами, мы можем записать:

$$\left.\begin{aligned} e_{1'} &= A_{1'}^1 e_1 + A_{1'}^2 e_2 + \dots + A_{1'}^n e_n, \\ e_{2'} &= A_{2'}^1 e_1 + A_{2'}^2 e_2 + \dots + A_{2'}^n e_n, \\ e_{n'} &= A_{n'}^1 e_1 + A_{n'}^2 e_2 + \dots + A_{n'}^n e_n, \end{aligned}\right\} \tag{1.5.2}$$

или в сокращённой записи

$$e_{i'} = A_{i'}^i e_i. \tag{1.5.3}$$

Равенство (1.5.2) говорит о том, что векторы $e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}$ нового базиса могут быть выбраны произвольно при условии соблюдения *линейной независимости*. Линейная независимость векторов $e_{1'}, e_{2'}, \dots, e_{n'}$ равносильна линейной независимости строк матрицы преобразования (1.5.2):

$$A = \begin{pmatrix} A_{1'}^1 & A_{1'}^2 & \dots & A_{1'}^n \\ A_{2'}^1 & A_{2'}^2 & \dots & A_{2'}^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n'}^1 & A_{n'}^2 & \dots & A_{n'}^n \end{pmatrix}, \tag{1.5.4}$$

то есть, соответствующий определитель должен быть отличен от нуля:

$$\det\left|A_{i'}^i\right| \neq 0. \tag{1.5.5}$$

Это и есть единственное условие, наложенное на преобразование векторов базиса (1.5.2). В остальном коэффициенты $A_{i'}^{i}$, произвольны. Условие (1.5.5) допускает обратную матрицу, элементы которой мы обозначим через $A_i^{i'}$:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{1'} & A_1^{2'} & \ldots & A_1^{n'} \\ A_2^{1'} & A_2^{2'} & \ldots & A_2^{n'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_n^{1'} & A_n^{2'} & \ldots & A_n^{n'} \end{pmatrix}. \qquad (1.5.6)$$

Для того, чтобы выразить векторы старого базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ через векторы нового базиса $e_{1'}, e_{2'}, \ldots, e_{n'}$, мы можем воспользоваться матрицей обратного преобразования (1.5.6);

$$e_i = A_i^{i'} e_{i'}. \qquad (1.5.7)$$

При переходе к новому базису $e_{1'}, e_{2'}, \ldots, e_{n'}$ каждый вектор x пространства L получает новые координаты $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{n'}$ в отличие от старых координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Сам вектор x при этом остаётся *неизменным*, изменение координат обусловлено изменением базиса.

Рассмотрим, как будут выражаться новые координаты произвольного вектора x через старые координаты и обратно.

В соответствии с (1.5.1) координаты вектора x в старом и новом базисе будут:

$$x = x^i e_i, \qquad (1.5.8)$$

$$x = x^{i'} e_{i'}. \qquad (1.5.9)$$

Подставим в (1.5.8) вместо e_i его значения из (1.5.7), тогда получим

$$x = x^i A_i^{i'} e_{i'}. \qquad (1.5.10)$$

Сравнивая полученное выражение с (1.5.9), мы выразим координаты x в новом базисе

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i . \qquad (1.5.11)$$

Совершенно аналогично при помощи обратного преобразования выразим старые координаты вектора x, через новые координаты:

$$x^i = A_{i'}^i x^{i'} . \qquad (1.5.12)$$

Сравним формулы преобразования *векторов базиса* $e_1, e_2, ..., e_n$ (1.5.3) и *координат инвариантного вектора* $x^1, x^2, ..., x^n$ (1.5.10). Мы видим, что матрицы этих преобразований различны, матрица преобразования (1.5.10) есть *транспонированная обратная матрица* преобразования (1.5.3).

Действительно, матрица преобразования (1.5.11) имеет вид

$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{pmatrix} A_1^{1'} & A_2^{1'} & \ldots & A_n^{1'} \\ A_1^{2'} & A_2^{2'} & \ldots & A_n^{2'} \\ \ldots & .. & \ldots & \ldots \\ A_1^{n'} & A_2^{n'} & \ldots & A_n^{n'} \end{pmatrix}, \qquad (1.5.13)$$

то есть получается транспонированием (поворотом на 180^0 вокруг главной диагонали) матрицы (1.5.6), а эта последняя матрица – взаимно обратная с матрицей (1.5.4) преобразования (1.5.3).

Формулы преобразования *векторов базиса и координат инвариантного вектора* при переходе от старого базиса к новому

$$e_{i'} = A_{i'}^i e_i , \qquad (1.5.14)$$

$$x^{i'} = A_i^{i'} x^i \qquad (1.5.15)$$

являются фундаментальными для тензорного исчисления, которое мы рассмотрим в главе III.

§1.6. Изоморфизм линейных пространств

Рассмотрим два линейных пространства L и L' между которыми установлено взаимно однозначное соответствие, то есть:

1) каждому вектору a из L соответствует вектор a' из L';

2) разные векторы из L имеют разные образы из L';

3) образы элементов из L заполняют всё пространство L'.

Пространства L *и* L' *называются линейно изоморфными, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие с соблюдением следующих условий*:

$$(a+b)' = a' + b', \tag{1.6.1}$$

$$(\alpha a)' = \alpha a'. \tag{1.6.2}$$

Взаимно однозначное соответствие, удовлетворяющее условиям (1.6.1) и (1.6.2), называется *линейным изоморфизмом* пространств L и L'.

При линейном изоморфизме образ суммы равен сумме образов, а образ произведения вектора на число равен произведению образа на это же число. Алгебраические и геометрические свойства линейно изоморфных пространств тождественны.

Теорема 1.6.1. Для каждого n все действительные (комплексные) n-мерные пространства линейно изоморфны между собой.

Теорема 1.6.2. Линейное пространство изоморфное n-мерному, само является n-мерным.

Следствие 1.. Конечномерные пространства разных размерностей не изоморфны.

Следствие 2. Бесконечномерное пространство неизоморфно никакому конечномерному.

§1.7. Соответствие между комплексными и действительными пространствами

Множество геометрических векторов, расположенных на одной прямой, образуют одномерное действительное пространство, так как, умножая на действительное число произвольный ненулевой вектор, его можно преобразовать в любой другой коллинеарный ему вектор.

Множество геометрических векторов расположенных на плоскости образует двумерное действительное пространство. Однако, здесь мы не можем с помощью умножения преобразовывать фиксированный вектор в любой другой, так как запас действительных множителей мал, по сравнению с разнообразием векторов, входящих в это пространство, в котором два вектора могут оказаться линейно независимыми.

В данной ситуации мы можем воспользоваться комплексными множителями.

Умножение векторов на комплексные числа можно определить так, что множество геометрических векторов на плоскости преобразуется в одномерное комплексное пространство.

Эта задача может быть решена, если определить произведение геометрического вектора на комплексное число следующим образом.

Пусть a - произвольный вектор на плоскости отложенный из начала координат. Пусть далее $\alpha = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ - комплексный множитель. Повернём вектор a вокруг начала координат на угол φ и умножим на действительное число ρ. Полученный вектор обозначим через b и положим $\alpha a = b$. Складывать векторы будем по прежнему по правилу параллелограмма.

При таком определении сложения и умножения все аксиомы линейного пространства соблюдены. Это обеспечивается тем, что сами комплексные числа изображаются векторами на плоскости и что сложение векторов и умножение комплексного числа α на вектор a определены так же, как обычно определяют сложение комплексных чисел и умножение комплексного числа α на вектор a. Поэтому в данном случае аксиомы линейного пространства соблюдены, так как они справедливы для комплексных чисел. Теперь один ненулевой вектор образует линейно независимую систему, а любые два вектора линейно зависимы (умножение включает поворот). Таким образом, полученное комплексное пространство является одномерным.

Мы показали, что одномерное комплексное пространство и двумерное действительное пространство можно построить из одних и тех же элементов, а именно, из векторов на плоскости, причём сложение векторов будет определено одинаково в обеих случаях. Умножение определяется по-разному, вследствие различия множителей.

На основании рассмотренного выше примера, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.7.1. *Комплексное линейное пространство $C(n)$ размерности n можно взаимно однозначно отобразить на действительное линейное пространство $R(2n)$ так, что соблюдаются условия*

$$\left(a+b\right)' = a' + b', \tag{1.7.1}$$

а для действительных множителей λ будут соблюдены условия

$$\left(\lambda a\right)' = \lambda a', \tag{1.7.2}$$

где штрихом отмечен образ в $R(2n)$ *элемента из* $C(n)$.

§1.8. Линейное подпространство

Предположим, что нам задано линейное пространство L, а $\tilde{L}$ -некоторое множество элементов из L.

Множество $\tilde{L}$ в пространстве L называется линейным подпространством (подпространством), если выполнены следующие условия:

1) для любых x, y *из* $\tilde{L}$ *их сумма* $x + y$ *также принадлежит* $\tilde{L}$;

2) для любого $x \in \tilde{L}$ и любого числа α, $\alpha x \in \tilde{L}$.

Пусть $\tilde{L}$ подпространство в L. Операции сложения векторов и умножения их на числа, заданные в L, будем рассматривать применительно лишь к тем элементам, которые входят в $\tilde{L}$. Тогда справедливы следующие теоремы:

Теорема 1.8.1. *В линейном пространстве* L *каждое линейное подпространство* $\tilde{L}$ *само является линейным пространством.*

Теорема 1.8.2. *Пересечение любой совокупности подпространств данного линейного пространства* L *является подпространством*.

В любое подпространство $\tilde{L}$ входит нулевой вектор θ.

§1.9. Скалярное произведение

Пусть L - действительное линейное пространство. Введём в пространстве L операцию *скалярного умножения* векторов.

Скалярное умножение ставит в соответствие каждой паре векторов x, y из L действительное число, которое обозначается (x, y) и называется *скалярным произведением* вектора x на вектор y.

Скалярное произведение обладает следующими свойствами (удовлетворяет следующим аксиомам):

1. $(x,y)=(y,x)$. (1.9.1)

2. $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$. (1.9.2)

3. $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$. (1.9.3)

4. Скалярное произведение невырожденно: то есть если $(x,y)=0$ при фиксированном x и любом y из L, то $x=\theta$.

Здесь мы полагаем, что x,y,z - произвольные векторы пространства L.

Итак, *скалярное произведение* (x,y) *есть симметричная, невырожденная, билинейная форма*.

Пусть в пространстве L введено скалярное произведение

$$(x,y)=g(x,y). \tag{1.9.4}$$

Предполагая пространство n-мерным, возьмём в нём произвольный базис $e_1,e_2,...,e_n$. Если положить

$$x=\sum_{i=1}^{n}x^i e_i\ ,\ y=\sum_{k=1}^{n}y^k e_k\ , \tag{1.9.5}$$

то скалярное произведение запишется в координатах так

$$(x,y)=g(x,y)=\sum x^i e_i \sum y^k e_k=\sum\sum (e_i,e_k)x^i x^k=$$
$$=\sum\sum g_{ik}x^i x^k\ .$$

Используя правило Эйнштейна перепишем предыдущее равенство так

$$(x,y)=g(x,y)=g_{ik}x^i x^k\ . \tag{1.9.6}$$

Коэффициенты g_{ik} билинейной формы $g(x,y)$ в данном базисе $e_1,e_2,...,e_n$, являются значениями этой формы на базисных векторах, то есть их скалярными произведениями

$$(e_i,e_k)=g_{ik}\ , \tag{1.9.7}$$

где $g_{ik}=g_{ki}$. Равенства (1.9.7) составляют таблицу умножения базисных векторов.

Если правые части таблицы (1.9.7) заданы, то тем самым однозначно определено скалярное произведение любой пары векторов x, y согласно (1.9.6).

Векторы x, y называются *ортогональными*, если

$$(x, y) = 0 \text{ или } g_{ik} x^i y^k = 0. \tag{1.9.8}$$

Нормой (длиной) вектора x из L называется арифметическое число

$$|x| = \sqrt{(x, x)}. \tag{1.9.9}$$

Скалярное произведение (x, y) является действительным числом, но оно может не быть положительным, так что норма вектора может оказаться мнимой. Будем считать, что радикал в формуле (1.9.9) может быть неотрицательным действительным числом, либо мнимым числом с положительным множителем при i $\left(i = +\sqrt{-1}\right)$.

Из определения нормы следует, что

$$|\alpha x| = |\alpha| \cdot |x| \tag{1.9.10}$$

для любого $x \in L$ и любого α. В частности,

$$|-x| = |x|, \ |\theta| = 0. \tag{1.9.11}$$

Ненулевые векторы, норма которых равна нулю, называются *изотропными*. Изотропные векторы существуют тогда и только тогда, когда квадратичная форма (x, x) *не является знакопеременной.*

Квадратичная форма $|x|^2 = (x, y)$ называется *метрической формой рассматриваемого пространства*.

Задание квадратичной формы и задание скалярного произведения равнозначны, поэтому пространства с заданным скалярным произведением называют также пространствами с квадратичной метрикой.

Метрическая форма для n - мерного пространства имеет вид

$$|x|^2 = (x, y) = g_{ik} x^i y^k. \tag{1.9.12}$$

Если в n - мерном векторном пространстве задана раз и навсегда фиксированная билинейная скалярная функция двух векторных аргументов x и y, удовлетворяющих условию симметрии и невырожденности, то такое n - мерное пространство называется n - *мерным евклидовым пространством*.

Пример 1.9.1. Пусть R пространство многочленов степени не выше чем $n-1$. Определим скалярное произведение как

$$(P(t),Q(t))=\int_{-1}^{1}P(t)Q(t)dt\ .$$

Предполагая, что векторы $1,t,t^2,...,t^{n-1}$ образуют базис, ортогонализируем его, используя *алгоритм* ортогонализации *Грамма-Шмидта*.

Положим $e_1=1$и проведём плоскость через векторы e_1и t. Найдём в этой плоскости вектор e_2 ортогональный к вектору e_1. Вектор e_2 будем искать в виде $e_2=f_2+\alpha e_1$, где $f_2=t$, а α выбирается так, чтобы скалярное произведение $(e_2,e_1)=0$.

$$(e_2,e_1)=(f_2+\alpha e_1,e_1)=(f_2,e_1)+\alpha(e_1,e_1)=0\,,$$

откуда получаем

$$\alpha=-\frac{(f_2,e_1)}{(e_1,e_1)}.$$

Рассуждая подобным образом, предположим, что мы получили попарно ортогональные и отличные от нуля векторы $e_1,e_2,...,e_{k-1}$, тогда вектор e_k может быть найден в виде

$$e_k=f_k+\lambda_1e_1+...+\lambda_{k-1}e_{k-1}\,, \tag{1.9.13}$$

а коэффициенты λ_i находятся с помощью выражения

$$\lambda_i=-\frac{(f_k,e_i)}{(e_i,e_i)}. \tag{1.9.14}$$

Вернёмся к определению вектора e_2.

$$(e_2, e_1) = (t + \alpha \cdot 1, 1) = \int_{-1}^{1} (t + \alpha) dt = \frac{1}{2} t^2 + \alpha t \Big|_{-1}^{1} = 2\alpha = 0,$$

откуда сразу следует, что $\alpha = 0$ и $e_2 = t$.

Вектор e_3 будем искать в виде: $e_3 = t^2 + \beta t + \gamma \cdot 1$.

Тогда

$$\beta = -\frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)} = -\frac{\int_{-1}^{1} (t^2 \cdot t) dt}{\int_{-1}^{1} (t \cdot t) dt} = -\frac{0}{\frac{2}{3}} = 0,$$

$$\gamma = -\frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{\int_{-1}^{1} (t^2 \cdot 1) dt}{\int_{-1}^{1} (1 \cdot 1) dt} = -\frac{\frac{2}{3}}{2} = -\frac{1}{3}.$$

Окончательно получим

$$e_3 = t^2 - \frac{1}{3}.$$

Рассуждая аналогичным образом (предлагаем читателю проделать это самостоятельно), мы получим, что

$$e_4 = t^3 - \frac{3}{5} t \text{ и } e_5 = t^4 - \frac{6}{7} t^2 + \frac{3}{35}.$$

Процесс ортогонализации приводит нас к последовательности векторов (многочленов)

$$1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5} t, \ldots \tag{1.9.15}$$

Оказалось, что многочлены (1.9.15) с точностью до числовых множителей совпадают с многочленами, введеными в 1875 году французским математиком Лежандром, в связи с задачами теории потенциала.

Общая формула для многочленов Лежандра была найдена Родригом.

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}\left(t^2-1\right)^n. \qquad (1.9.16)$$

Если векторы ортогонального базиса (1.9.15) заменить на векторы

$$e'_k=\frac{e_k}{|e_k|}, \qquad (1.9.17)$$

мы получим ортонормированный базис.

Заметим, что если процесс ортогонализации мы начнём не с первого вектора, а с другого, мы получим другую ортогональную систему векторов.

Замечание.

Билинейные формы на линейных пространствах функций в анализе часто задаются выражением

$$\left(P(t),Q(t)\right)=\int_a^b G(t)P(t)Q(t)dt, \qquad (1.9.18)$$

где $G(t)$ фиксированная функция от $t\in(a,b)$, называемая весом билинейной формы. В частности, в предыдущем примере $G(t)=1$.

Если положить $G(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $(a,b)=(-1,1)$, то в результате ортогонализации базиса $1,t,t^2,\dots,t^{n-1}$ мы получим *многочлены Чебышева*:

$$T_n(t)=\frac{(-2)^n n!}{(2n)!}\sqrt{1-t^2}\frac{d^n}{dt^n}\left(1-t^2\right)^{n-\frac{1}{2}}=\cos(n\arccos t). \qquad (1.9.19)$$

Нормировка:

$$\int_{-1}^{1}\frac{T_m(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt=\begin{cases}0 \text{ при } m\neq n,\\ \frac{\pi}{2} \text{ при } m=n\neq 0,\\ \pi \text{ при } m=n=0.\end{cases} \qquad (1.9.20)$$

Если положить $G(t)=e^{-t^2}$, $(a,b)=(-\infty,\infty)$, то в результате ортогонализации базиса $1,t,t^2,...,t^{n-1}$ мы получим *многочлены Эрмита*:

$$H_n(t)=(-1)^n e^{t^2}\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t^2}\right). \tag{1.9.21}$$

Нормировка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} H_m(t) H_n(t) dt = \begin{cases} 0 \text{ при } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi} \text{ при } m = n. \end{cases} \tag{1.9.22}$$

§1.10. Комплексные евклидовы пространства

1.10.1. Общие определения

Комплексное евклидово пространство являясь естественным обобщением действительного пространства, играет исключительно важную роль при изучении приложений теории групп в квантовой механике. В силу этой важности рассмотрим подробно свойства комплексного евклидового пространства.

Пусть нам задано множество C, состоящее из элементов $x, y,...$ называемых *векторами* и наделённое следующими свойствами:

1. Векторы можно складывать в соответствии с аксиомами линейного пространства 1 и 2:

$$x+y=y+x; \qquad (x+y)+z=x+(y+z).$$

2. Существует такой вектор θ, что для всех векторов x, $x+\theta=x$. При любых x,y существует единственный вектор z такой, что

$$x+z=y.$$

3. Векторы можно умножать на комплексные числа (в этом состоит отличие комплексных евклидовых пространств от действительных евклидовых пространств), причём умножение на числа обладают обычными алгебраическими свойствами:

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y; \qquad (\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x;$$

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x); \qquad 1\cdot x = x.$$

4. Векторы можно скалярно умножать друг на друга. Так как мы рассматриваем комплексные пространства, скалярное произведение векторов будет отличаться от скалярного произведения векторов в действительном пространстве.

Обозначим *скалярное произведение векторов* x, y *в комплексном пространстве* через $(x|y)$. При этом предполагается, что для любых комплексных чисел α, β и любых векторов x, y, z

$$(\alpha x + \beta y|z) = \overline{\alpha}(x|z) + \overline{\beta}(y|z), \tag{1.10.1}$$

$$(z|\alpha x + \beta y) = \alpha(z|x) + \beta(z|y), \tag{1.10.2}$$

где $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$ - множители, комплексно сопряженные с α и β.

Положим, так же, что всегда

$$(x|x) \geq 0, \tag{1.10.3}$$

а при $x = \theta$

$$(x|x) = 0. \tag{1.10.4}$$

Норма вектора x определяется с помощью формулы

$$|x| = \sqrt{(x|x)}. \tag{1.10.5}$$

Комплексное евклидово пространство называется *конечномерным*, если существует система из n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, через которые можно линейно выразить каждый вектор

$$x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \ldots + x^n e_n. \tag{1.10.6}$$

Комплексные числа x^i называются координатами вектора x в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Число n называется *размерностью комплексного евклидового пространства*, которое мы будем в дальнейшем обозначать через $C(n)$. В математической литературе $C(n)$ называют ещё *унитарным пространством*.

Рассмотрим скалярное произведение $(x+y|x+y)$.

$$(x+y|x+y)=(x|x)+(x|y)+(y|x)+(y|y). \qquad (1.10.7)$$

Здесь в соответствии с (1.10.3) члены $(x|x)$ и $(y|y)$ действительны, а это означает, что действительной величиной должна быть и сумма $(x|y)+(y|x)$.

Рассматривая действительное число

$$(ix|y)+(y|ix)=-i(x|y)+i(y|x),$$

получим правило, заменяющее коммутативный закон умножения

$$(x|y)=\overline{(y|x)}. \qquad (1.10.8)$$

Из приведённых выше свойств 1 – 4 можно получить неравенство Коши

$$|(x|y)|\leq|x|\cdot|y|\cdot \qquad (1.10.9)$$

Замечание. Формула (1.10.6) позволяет сопоставить каждому вектору x систему из n комплексных чисел $(x^1,x^2,...,x^n)$. При этом *не следует считать, что вектор и есть эта система чисел*! Если мы возьмём другой базис $e_1',e_2',...,e_n'$, то получим для того же самого вектора x другое разложение $x=\sum_{i=1}^{n}x^{i'}e_i'$. Таким образом, мы видим, что значения координат вектора зависят как от значения самого вектора, так и от выбора базиса. Совокупность всех систем $(x^1,x^2,...,x^n)$, $(x^{1'},x^{2'},...,x^{n'})$,…, соответствующих всевозможным базисам, полностью характеризуется вектором x (и характеризует его). Эту совокупность и следует отождествить с вектором.

Можно показать, что в $C(n)$, как и в действительном евклидовом пространстве, существуют ортонормированные базисы $e_1,e_2,...,e_n$, то есть такие, что

$$\left(e_i \middle| e_k\right) = \delta_{ik}, \tag{1.10.9}$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k). \end{cases} \tag{1.10.10}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться только ортонормированными базисами, и все координаты берутся относительно таких базисов.

Применяя правило Эйнштейна, заметим, что если $x = x^i e_i$, то $x^i = \left(e_i \middle| x\right)$ и для фиксированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ имеем:

$$x + y = \left(x^i + y^i\right)e_i; \quad \lambda x = \lambda x^i e_i; \quad \left(x \middle| y\right) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i. \tag{1.10.11}$$

1.10.2. Изоморфизм комплексных евклидовых пространств

Пусть нам заданы два комплексных евклидовых пространства C и C', и соответствие (отображение) φ, сопоставляющее каждому вектору x пространства C вектор x' пространства C', которое мы будем записывать как

$$\varphi : C \to C'. \tag{1.10.12}$$

Рассмотрим частный случай *взаимно однозначного* соответствия, при котором каждый вектор x' соответствует одному, и только одному, вектору x.

Если φ удовлетворяет условиям

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \\ &\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x), \\ &\left(\varphi(x) \middle| \varphi(y)\right)_{C'} = \left(x \middle| y\right)_C, \end{aligned}\right\} \tag{1.10.13}$$

то φ называют *изоморфизмом* пространств C, C', которые в этом случае называются *изоморфными*.

Обратное отображение $\varphi^{-1} : \mathrm{C}' \to \mathrm{C}$, сопоставляющее вектору x'

его прообраз x, то есть тот единственный вектор x, для которого $\varphi(x) = x'$, обладает, очевидно, теми же свойствами (1.10.13) и является изоморфизмом пространств C', C.

Пусть в пространствах C и C' заданы базисы и тем самым координаты x^i и x'^i. Тогда изоморфизм может быть задан уравнениями вида

$$x'^i = A^i_j x^j . \tag{1.10.14}$$

1.10.3. Антиизоморфизм пространств

Если взаимно однозначное соответствие (1.10.12) удовлетворяет вместо (1.10.13) условиям

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \\ &\varphi(\lambda x) = \bar{\lambda}\varphi(x), \\ &(\varphi(x)|\varphi(y))_{C'} = \overline{(x|y)}_C , \end{aligned}\right\} \tag{1.10.15}$$

то φ называется *антиизоморфизмом* пространств C, C'. Обратное отображение φ^{-1} так же оказывается антиизоморфизмом.

Если в C и C' заданы базисы, то антиизоморфизм может быть задан уравнением вида

$$x'^i = A^i_j \bar{x}^j . \tag{1.10.16}$$

Подпространство. Пусть пространство C состоит из векторов пространства C'. Тогда C называется *подпространством* C', если сложение, умножение, умножение на числа и скалярное произведение в C определены так же, как в C'.

1.10.4. Гильбертово пространство

Рассмотрим бесконечномерное комплексное пространство $C(\infty)$, обладающее следующими свойствами:

1. Существует бесконечная последовательность векторов в $C(\infty)$

$$e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots, \tag{1.10.17}$$

такая, что для любого вектора x существует однозначное разложение

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x^i e_i\ , \tag{1.10.18}$$

где суммирование ряда (аналог (1.10.6)) понимается в смысле

$$\lim_{n\to\infty} \left| x - \sum_{i=1}^{\infty} x^i e_i \right| = 0\,. \tag{1.10.19}$$

2. Если последовательность векторов x_n такова, что

$$\lim_{m,n\to\infty} \left| x_m - x_n \right| = 0\,, \tag{1.10.20}$$

то существует вектор x_0, к которому x_n сходится (аналог критерия сходимости Коши):

$$\lim_{n\to\infty} \left| x_n - x_0 \right| = 0\,. \tag{1.10.21}$$

Пространство $C(\infty)$, удовлетворяющее условиям 1 и 2, перечисленным выше, называется *гильбертовым пространством. Все гильбертовы пространства изоморфны друг другу*.

§1.11. Линейные операторы

Рассмотрев основные понятия о линейном пространстве L, перейдём теперь к самому важному понятию всего учебного пособия – понятию *преобразования* (*отображения*).

Линейным оператором L *в* $C(n)$ *называется правило (закон, отображение), по которому каждому вектору* x *ставится в соответствие некоторый вектор* Lx (*образ* x), причём

$$L(x+y) = Lx + Ly\ , \tag{1.11.1а}$$

$$L(\lambda x) = \lambda L(x)\,. \tag{1.11.1б}$$

Фиксируем базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и опишем действия оператора L в координатах. Пусть

$$Le_i = L_i^j e_j, \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1.11.2}$$

Тогда для каждого x

$$Lx = L(x^i e_i) = x^i Le_i = x^i L_i^j e_j, \tag{1.11.3}$$

так что, полагая $Lx = y$, а $y = y^j e_j$ запишем

$$y^j = L_i^j x^i. \tag{1.11.4}$$

Матрица L_i^j называется *матрицей оператора* L *в базисе* $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Примеры.

1.11.1. Пусть $R(3)$ трёхмерное пространство, L - оператор проектирующий векторы $R(3)$ на плоскость XY. Пусть e_1, e_2, e_3 - единичные векторы направленные по осям координат X, Y, Z, тогда

$$Le_1 = e_1, \qquad Le_2 = e_2, \qquad Le_3 = 0,$$

то есть матрица оператора L в данном базисе e_1, e_2, e_3 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.11.2. Пусть R пространство многочленов степени $\leq n-1$ (см. §1.2 п.6), L - оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$, $LP(t) = P'(t)$.

Выберем в R базис

$$e_1 = 1,\ \ e_2 = t\ ,\ \ e_3 = \frac{t^2}{2}\ , \ldots,\ \ e_n = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\ .$$

Тогда

$$Le_1 = 0\ ,\ \ Le_2 = t' = 1 = e_1\ ,\ Le_3 = \left(\frac{t^2}{2}\right)' = t = e_2\ , \ldots,$$

$$Le_n = \left(\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right)' = \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} = e_{n-1}\ ,$$

то есть матрица оператора L в данном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание.

Не следует считать, что оператор L и матрица L_i^j - это одно и то же. Если мы изучаем разные операторы и соотношения между ними в одном и том же фиксированном базисе, мы можем пренебречь различиями между оператором и его матрицей, так как одно определяет другое. В другом базисе тот же самый оператор L будет изображаться другой матрицей.

Так как все системы координат равноправны, набор чисел L_i^j характеризует не оператор L, а совокупность оператора и выбранного базиса. Лишь система из всех матриц $L_i^j, L_i'^j, \ldots$ оператора L во *всевозможных* базисах может быть отождествлена с оператором L.

Настоящими объектами теории являются векторы и операторы, а не координаты и матрицы, призванные описывать векторы и операторы в произвольном базисе.

§1.12. Действия над операторами

Пусть L и M - операторы в векторном пространстве $C(n)$.

Суммой операторов L и M в векторном пространстве $C(n)$ называется оператор $L+M$, переводящий каждый вектор x в вектор $Lx+Mx$.

В любом базисе матрица оператора $L+M$ имеет вид

$$(L+M)_i^j = L_i^j + M_i^j. \tag{1.12.1}$$

Произведение оператора L *на комплексное число* λ есть оператор, переводящий вектор x в вектор λLx, а его матрица есть

$$(\lambda L)_i^j = \lambda L_i^j. \tag{1.12.2}$$

Произведением двух операторов L и M в векторном пространстве $C(n)$ называется оператор LM, переводящий каждый вектор x в вектор $L(Mx)$, то есть результат последовательного применения сначала оператора M, а затем оператора L.

Пусть

$$Me_i = M_i^k e_k; \qquad Le_k = L_k^j e_j, \tag{1.12.3}$$

тогда

$$LMe_i = LM_i^k e_k = L_k^j M_i^k e_j$$

или

$$(LM)_i^j = L_k^j M_i^k. \tag{1.12.4}$$

Таким образом, мы установили, что матрица произведения операторов LM есть обычное произведение матриц L и M в указанном выше порядке. Заметим, что операторы, как и матрицы, в общем случае не «коммутируют» $LM \neq ML$, то есть, порядок умножения влияет на результат.

Нетрудно убедиться в выполнении обычных законов умножения (кроме коммутативного!):

$$\left.\begin{aligned} &(LM)N = L(MN),\\ &(\lambda L)\cdot M = L\cdot(\lambda M) = \lambda\cdot(LM),\\ &L(M+N) = LM + LN,\\ &(M+N)L = ML + NL. \end{aligned}\right\} \qquad (1.12.4)$$

Тождественный (единичный) оператор $E(n)$ переводит каждый вектор x в тот же самый вектор:

$$E(n)x = x\,. \qquad (1.12.5)$$

Матрица тождественного преобразования в любом базисе есть

$$E(n)_i^j = \delta_i^j = \begin{cases} 0 & (i \neq j),\\ 1 & (i = j). \end{cases} \qquad (1.12.6)$$

Пусть имеется оператор L в векторном пространстве $C(n)$ и пусть $Lx = x'$, где x' есть преобразованный вектор x. Тогда, вообще говоря, можно определить «обратный» оператор L^{-1} соотношением

$$x = L^{-1}x'. \qquad (1.12.7)$$

Обратный оператор L^{-1} имеет очевидные свойства

$$L^{-1}L = LL^{-1} = E(n). \qquad (1.12.8)$$

Матрица L^{-1} это просто матрица, обратная матрице L.

Предполагается, что обратная операция существует, а это, в свою очередь, накладывает ограничения на L, а именно, преобразование должно быть взаимно однозначным. Применительно к матрице L, это означает, что её детерминант должен быть отличным от нуля.

Если $LM = E(n)$, то L и M называются *взаимно обратными* операторами: $M = L^{-1}$, а $L = M^{-1}$. Матрицы взаимно обратных операторов связаны соотношениями

$$L_k^j\left(L^{-1}\right)_i^k = \left(L^{-1}\right)_k^j L_i^k = \delta_i^j\,. \qquad (1.12.9)$$

Заметим, что оператор, обратный произведению операторов LM, даётся выражением

$$\left(LM\right)^{-1} = M^{-1}L^{-1}, \qquad (1.12.10)$$

в котором первоначальный порядок умножения изменяется на противоположный.

Докажем это утверждение. Обратный оператор по определению удовлетворяет тождеству $\left(LM\right)^{-1}LM = E(n)$. Умножим обе части тождества справа на M^{-1}, тогда $\left(LM\right)^{-1}LMM^{-1} = E(n)M^{-1}$, или $\left(LM\right)^{-1}L = M^{-1}$. Умножим обе части полученного равенства справа на L^{-1}, тогда $\left(LM\right)^{-1}LL^{-1} = M^{-1}L^{-1}$, или $\left(LM\right)^{-1} = M^{-1}L^{-1}$.

Этот результат можно сравнить с операцией надевания носков и ботинок. При операции обувания мы сначала надеваем носки и потом ботинки, при операции разувания ботинки снимают вначале, а носки потом.

Пусть некоторый оператор T в $C(n)$ переводит вектор x в вектор x', а $\tilde{x}$ - в $\tilde{x}'$, то есть $Tx = x'$, а $T\tilde{x} = \tilde{x}'$. Если при этом имеется другой оператор S, переводящий x в $\tilde{x}$, то есть $Sx = \tilde{x}$, резонно задать вопрос: какой вид имеет оператор S', переводящий x' в $\tilde{x}'$, то есть $S'x' = \tilde{x}'$? Так как векторы x' и $\tilde{x}'$ называются преобразованными (то есть трансформированными оператором T), оператор S' можно назвать трансформированным оператором. Чтобы выразить S' через исходные операторы, заметим, что $\tilde{x}' = T\tilde{x} = TSx = TST^{-1}x'$, то есть

$$S' = TST^{-1}. \qquad (1.12.11)$$

В примере с обуванием и разуванием, мы можем рассматривать T как операцию надевания носка, а S - как операцию его штопки. Если носок уже на ноге, то его надо сначала снять, операция T^{-1}, затем заштопать (S) и, наконец, снова надеть его (T).

§1.13. Сопряженный оператор

1. Связь линейных операторов с билинейными формами в $C(n)$.

Всякому оператору L *отвечает в евклидовом пространстве* $C(n)$ *билинейная форма* $L(x;y)$*, заданная формулой*

$$L(x;y)\equiv(Lx|y).$$

Действительно, функция $L(x;y)\equiv(Lx|y)$ удовлетворяет условиям определяющим билинейную форму:

$$(L(x+y)|z)=(Lx+Ly|z)=(Lx|z)+(Ly|z),$$

$$(L\lambda x|y)=(\lambda Lx|y)=\lambda(Lx|y),$$

$$(z|L(x+y))=(z|Lx+Ly)=(z|Lx)+(z|Ly),$$

$$(x|L\mu y)=(x|\mu Ly)=\bar{\mu}(x|Ly).$$

Покажем обратное. Пусть $L(x;y)$ билинейная форма в $C(n)$. Фиксируя в $C(n)$ базис $e_1,\ldots,e_n$ и полагая $x=x^i e_i$, а $y=y^k e_k$ запишем $L(x;y)$ в виде

$$\begin{aligned}L(x;y)=&L_1^1x^1\bar{y}^1+L_1^2x^1\bar{y}^2+\ldots+L_1^nx^1\bar{y}^n+\\&+L_2^1x^2\bar{y}^1+L_2^2x^2\bar{y}^2+\ldots+L_2^nx^2\bar{y}^n+\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&+L_n^1x^n\bar{y}^1+L_n^2x^n\bar{y}^2+\ldots+L_n^nx^n\bar{y}^n.\end{aligned}\tag{1.13.1}$$

Представим (1.13.1) в виде скалярного произведения, переписав его следующим образом:

$$\begin{aligned} L(x;y) = {} & \left(L_1^1 x^1 + L_2^1 x^2 + \ldots + L_n^1 x^n\right)\bar{y}^1 + \\ & + \left(L_1^2 x^1 + L_2^2 x^2 + \ldots + L_n^2 x^n\right)\bar{y}^2 + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \left(L_1^n x^1 + L_2^n x^2 + \ldots + L_n^n x^n\right)\bar{y}^n. \end{aligned} \tag{1.13.2}$$

Примем выражения стоящие в скобках за координаты некоторого вектора z:

$$\begin{aligned} z^1 &= L_1^1 x^1 + L_2^1 x^2 + \ldots + L_n^1 x^n, \\ z^2 &= L_1^2 x^1 + L_2^2 x^2 + \ldots + L_n^2 x^n, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z^n &= L_1^n x^1 + L_2^n x^2 + \ldots + L_n^n x^n. \end{aligned} \tag{1.13.3}$$

Таким образом мы видим, что вектор z получается из вектора x с помощью линейного оператора L с матрицей, транспонированной к матрице L_i^j билинейной формы $L(x;y)$ (1.13.1).

Полагая $z = Lx$, с учётом (1.10.1) мы можем записать:

$$L(x;y) = z^1\bar{y}^1 + z^2\bar{y}^2 + \ldots + z^n\bar{y}^n = (Lx|y).$$

Таким образом, *всякой билинейной форме* $L(x;y)$ *в* $C(n)$ *отвечает такой оператор* L*, что* $L(x;y) \equiv (Lx|y)$.

Сказанное выше можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Теорема 1.13.1. *Формула*

$$L(x;y) \equiv (Lx|y) \tag{1.13.4}$$

устанавливает в $C(n)$ *взаимно однозначное соответствие между билинейными формами* $L(x;y)$ *и линейными операторами* L.

Однозначность (1.13.4) указывает на независимость этого соответствия от выбора базиса.

Покажем теперь, что каждую билинейную форму можно представить в виде

$$L(x;y)=\left(x\middle|\overset{+}{L}\,y\right). \tag{1.13.5}$$

Для этого в формуле (1.13.1) вынесем за скобки координаты вектора x:

$$\begin{aligned}
L(x;y)&=x^1\left(L_1^1\bar{y}^1+L_2^1\bar{y}^2+\ldots+L_n^1\bar{y}^n\right)+\\
&+x^2\left(L_1^2\bar{y}^1+L_2^2\bar{y}^2+\ldots+L_n^2\bar{y}^n\right)+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+x^n\left(L_1^n\bar{y}^1+L_2^n\bar{y}^2+\ldots+L_n^n\bar{y}^n\right)=\\
&=x^1\overline{\left(\bar{L}_1^1y^1+\bar{L}_2^1y^2+\ldots+\bar{L}_n^1y^n\right)}+\\
&+x^2\overline{\left(\bar{L}_1^2y^1+\bar{L}_2^2y^2+\ldots+\bar{L}_n^2y^n\right)}+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+x^n\overline{\left(\bar{L}_1^ny^1+\bar{L}_2^ny^2+\ldots+\bar{L}_n^ny^n\right)}=\left(x\middle|\overset{+}{L}\,y\right).
\end{aligned}$$

При этом матрица оператора $\overset{+}{L}$, получается из матрицы оператора L в любом ортогональном базисе переходом к транспонированной и заменой её элементов комплексно сопряжёнными, то есть

$$\overset{+}{L}{}_i^j=\bar{L}_j^i\,. \tag{1.13.6}$$

2. Операция перехода от оператора L к сопряжённому оператору $\overset{+}{L}$.

Пусть L оператор в $C(n)$. *Оператор $\overset{+}{L}$, определённый условием*

$$\left(Lx\middle|y\right)=\left(x\middle|\overset{+}{L}\,y\right),$$

называется сопряжённым к оператору L.

Теорема 1.13.2. *В* $C(n)$ *каждому линейному оператору* L *отвечает сопряженный оператор* $\overset{+}{L}$ *и притом только один.*

Данная теорема прямо следует из (1.13.4) и (1.13.5).

$$(Lx|y) = L(x;y) = \left(x \middle| \overset{+}{L} y \right).$$

Матрица $\overset{+}{L}{}_i^j$ сопряженного оператора $\overset{+}{L}$ получается из матрицы L_i^j оператора L в ортогональном базисе переходом к транспонированной и комплексно сопряженной матрице $\overline{L_j^i}$. Операция перехода от L к $\overset{+}{L}$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $\overset{+}{(LM)} = \overset{+}{M}\,\overset{+}{L}$,
2. $\overset{+}{\left(\overset{+}{L}\right)} = L$,
3. $\overset{+}{(L+M)} = \overset{+}{L} + \overset{+}{M}$,
4. $\overset{+}{(\lambda L)} = \overline{\lambda}\,\overset{+}{L}$,
5. $\overset{+}{(E(n))} = E(n)$.

§1.14. Унитарный оператор

Оператор U *называется унитарным* (ортогональным), если он сохраняет скалярное произведение, то есть

$$(Ux|Uy) = (x|y). \tag{1.14.1}$$

Мы видим, что унитарный оператор U сохраняет длины векторов и, следовательно, аналогичен движениям обычного пространства, таким образом унитарные операторы, по определению, задают *движения комплексного евклидова пространства* $C(n)$.

Свойство (1.14.1) можно заменить эквивалентным свойством, которое может быть получено следующим образом. Можно показать, что унитарный оператор имеет обратный, то есть что уравнение $Ux = y$ разрешимо при любом y, и притом единственным образом.

Полагая в (1.13.3) $Ux = z$, $x = U^{-1}z$ имеем: $(z|Uy) = (U^{-1}z|y)$.

С другой стороны, по определению сопряженного оператора

$\left(\overset{+}{U} z|y\right) = (z|Uy)$; следовательно,

$$\overset{+}{U} = U^{-1}. \tag{1.14.2}$$

Можно показать, что из (1.14.2) следует (1.14.1).

В координатах (1.14.2) запишется в виде

$$\left(U^{-1}\right)_i^j = \overset{+}{U}{}_i^j = \overline{U}_j^i. \tag{1.14.3}$$

Произведение матриц $U_i^j, \left(U^{-1}\right)_i^j$ должно быть равно (при любом порядке умножения) единичной матрице, откуда

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} \overline{U}_i^j U_k^j = \delta_{ik}, \\ &\sum_{j=1}^{n} \overline{U}_j^i U_j^k = \delta^{ik}. \end{aligned}\right\} \tag{1.14.4}$$

§1.15. Эрмитов оператор

Эрмитовым или самосопряженным называется оператор, равный своему сопряженному, то есть

$$(Hx|y) = (x|Hy) \tag{1.15.1}$$

или в координатах

$$H_i^j = \overline{H}_j^i, \tag{1.15.2}$$

причем, свойство (1.15.2) сохраняется при замене базиса.

Свойство оператора быть унитарным (или эрмитовым) не зависит от системы координат, а только от характера его действия на векторы.

Подчеркнём, так же, что понятия унитарных и эрмитовых операторов имеют смысл только тогда, когда полностью определены векторное пространство и скалярное произведение.

Каждому оператору L можно поставить в соответствие число $det\, L$, *называемое определителем оператора* L.

Пусть в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ оператор L имеет матрицу $\left(L_i^j\right)_e$, а в базисе $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ матрицу $\left(L_i^j\right)_{e'}$, тогда нетрудно увидеть, что *матрицы* L_e *и* $L_{e'}$ *подобны*, то есть

$$L_{e'} = UL_eU^{-1}, \tag{1.13.9}$$

где унитарная матрица U изображает в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ оператор, переводящий e_i в e'_i, $i = 1,2,...,n$.

Так как при умножении матриц их определители перемножаются, то $det\left(U^{-1}\right) = \left(det\, U\right)^{-1}$, $det\, L_{e'} = det\, L_e$. Мы видим, что определитель матрицы оператора L не зависит от выбора базиса и может быть назван определителем самого оператора L.

Определитель унитарного оператора есть число, модуль которого равен единице.

Оператор, определитель которого равен единице, называется *унимодулярным*.

Отметим ещё класс *проектирующих* операторов, играющих важную роль в теории операторов.

§1.16. Проектирующий оператор

Пусть комплексное евклидово пространство $C(n)$ представлено в виде *ортогональной суммы* подпространств $C(k)$ и $C(l)$:

$$C(n) = C(k) \oplus C(l). \tag{1.16.1}$$

Это значит, что каждый вектор x пространства $C(n)$ однозначно разлагается в сумму

$$x = x' + x'', \tag{1.16.2}$$

где x' лежит в $C(k)$, а x'' - в $C(l)$ и $(x'|x'') = 0$. Оператор P, ставящий в соответствие вектору x *его проекцию* x' на подпространство $C(k)$, называется *проектирующим*. Проектирующий оператор эрмитов и идемпотентен:

$$(Px|y) = (x|Py), \qquad P^2 = P. \tag{1.16.3}$$

Обратно, всякий оператор в $C(n)$, обладающий свойствами (1.16.3), является, как можно показать, проектирующим; подпространство, на которое он проектирует, состоит из всех векторов вида Px, где x пробегает всё пространство $C(n)$.

§1.17. Произвольный линейный оператор в комплексном евклидовом пространстве

Теорема 1.17.1. *Произвольный линейный оператор* L *комплексного евклидового пространства* $C(n)$ *можно представить в виде*

$$L = M + iN, \tag{1.17.1}$$

где M *и* N *- эрмитовы операторы.*

Доказательство. Допустим, что представление (1.17.1) возможно; тогда

$$\overset{+}{L} = \overset{+}{M} + \overset{+}{(iN)} = \overset{+}{M} - i\overset{+}{N} = M - iN,$$

так как $\overset{+}{M} = M$ и $\overset{+}{N} = N$ в силу эрмитовости операторов M и N.

Из равенств $L = M + iN$ и $\overset{+}{L} = M - iN$ находим, что

$$M = \frac{1}{2}\left(\overset{+}{L} + L\right), \qquad N = \frac{i}{2}\left(\overset{+}{L} - L\right). \tag{1.17.2}$$

Легко видеть, что операторы (1.17.2) действительно являются самосопряжёнными и что $L = M + iN$.

Представление $L = M + iN$ напоминает разложение комплексного числа на вещественную и мнимую части.

Теорема 1.17.2. *Каждый невырожденный оператор* L *в* $C(n)$ *можно представить в виде произведения*

$$L = UH \ , \tag{1.17.3}$$

где U - *унитарный оператор* (собственные значения которого по модулю равны единице), а H - *положительно определённый эрмитов оператор*. Такое разложение оператора L напоминает тригонометрическую форму комплексного числа $a = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\rho > 0$, а число $\cos\varphi + i\sin\varphi$ по модулю равно единице.