Глава II
Конструкции над пространствами и операторами

В этой главе мы рассмотрим основные конструкции над комплексными евклидовыми пространствами, имеющие некоторую аналогию с операциями над комплексными числами.

Комплексному сопряжению соответствует антиизоморфизм, связывающий пару взаимно дуальных пространств; сумме чисел соответствует ортогональная сумма пространств; произведению чисел соответствует тензорное (кронекерово) произведение пространств.

Каждой конструкции над пространствами соответствует конструкция над операторами, то есть оператору в данном пространстве ставится в соответствие некоторый оператор в дуальном пространстве; системе операторов, заданных в слагаемых пространствах (по одному в каждом слагаемом), соответствует оператор в сумме этих пространств; системе операторов, заданных в пространствах-сомножителях, соответствует оператор, заданный в их произведении.

Эти конструкции составляют основу тензорной алгебры и теории представлений групп, которые мы рассмотрим в следующих главах.

§2.1. Дуальные пространства

Рассмотрим пару комплексных евклидовых пространств C и $\tilde{C}$. Векторы, принадлежащие C, мы будем обозначать через $x, y, \ldots$, а векторы в $\tilde{C}$ обозначим через $\tilde{x}, \tilde{y}, \ldots$. Таким образом, векторы пространства C всегда отличимы от векторов пространства $\tilde{C}$ и их не следует смешивать.

Пусть нам задан антиизоморфизм

$$\varphi : C \to \tilde{C}\,. \tag{2.1.1}$$

Пространства C и $\tilde{C}$ называются *дуальными*[1] по отношению к антиизоморфизму φ (или просто дуальными, подразумевая задание φ).

Для различия векторов пространства C от векторов пространства $\tilde{C}$ мы будем называть векторы пространства $\tilde{C}$ ***ковекторами***.

В соответствии с определением антиизоморфизма (1.10.13), для векторов $x, \tilde{y}$ имеем:

$$\left(\varphi^{-1}\tilde{y}\middle|x\right)_C = \overline{\left(\varphi\varphi^{-1}\tilde{y}\middle|\varphi x\right)_{\tilde{C}}} = \overline{\left(\tilde{y}\middle|\varphi x\right)_{\tilde{C}}}\,. \tag{2.1.2}$$

Для того, чтобы различать *скалярное произведение ковектора на вектор*, определим его как

$$\left\langle\tilde{y}\middle|x\right\rangle = \left(\varphi^{-1}\tilde{y}\middle|x\right)_C = \overline{\left(\tilde{y}\middle|\varphi x\right)_{\tilde{C}}}\,. \tag{2.1.3}$$

Нетрудно показать, что это скалярное произведение обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} \left\langle\alpha\tilde{x}+\beta\tilde{y}\middle|z\right\rangle &= \alpha\left\langle\tilde{x}\middle|z\right\rangle + \beta\left\langle\tilde{y}\middle|z\right\rangle, \\ \left\langle\tilde{z}\middle|\alpha x+\beta y\right\rangle &= \alpha\left\langle\tilde{z}\middle|x\right\rangle + \beta\left\langle\tilde{z}\middle|y\right\rangle. \end{aligned}\right\} \tag{2.1.4}$$

Примечания.

1. Скалярное произведение $\left\langle\tilde{x}\middle|y\right\rangle$ существенно отличается от введённого ранее скалярного произведения $(x|y)$; так как речь идёт о произведении векторов *разных пространств*. На первом месте всегда стоит ковектор, а на втором – вектор. Поэтому выражение вида $\left\langle x\middle|\tilde{y}\right\rangle$ не рассматривается; не имеет смысла и вопрос о коммутационных свойствах произведения и о «произведении с равными сомножителями».

Первое свойство дистрибутивности (2.1.4) отличается от (1.10.1): числа теперь выносятся за знак произведения без комплексного сопряжения.

[1] Можно в различной литературе встретить вместо дуального пространства выражения: сопряжённое (двойственное) пространство.

Таковы формальные различия между скалярными произведениями $(x|y)$ и $\langle\tilde{x}|y\rangle$.

2. Каждый фиксированный ковектор $\tilde{y}$ определяет линейную функцию

$$l(x)=\langle\tilde{y}|x\rangle \tag{2.1.5}$$

с комплексными значениями на C, и аналогично, каждый фиксированный вектор x определяет линейную функцию

$$\tilde{l}(\tilde{y})=\langle\tilde{y}|x\rangle \tag{2.1.6}$$

на $\tilde{C}$. В соответствии с (2.1.2) ненулевые векторы (ковекторы) определяют при этом ненулевые функции. Можно показать, что все линейные функции на C и $\tilde{C}$ могут быть получены указанным выше способом с помощью ковекторов и векторов, таким образом каждое из двух дуальных пространств можно отождествить с *пространством всех линейных функций на другом*.

Рассмотрим различия между (2.1.4) и (1.10.1),(1.10.2): по отношению к первому аргументу «внутреннее» скалярное произведение $(x|y)$ есть не линейная функция в обычном смысле, как (2.1.6), а «антилинейная функция»:

$$l(\alpha x+\beta y)=\bar{\alpha}l(x)+\bar{\beta}l(y). \tag{2.1.7}$$

3. Можно показать, что размерности дуальных пространств совпадают и мы будем их обозначать далее как $C(n)$ и $\tilde{C}(n)$.

4. Отношение произведения $\langle\ |\ \rangle$ к произведению $(\ |\ )$ есть, по существу, отношение между пространствами состояний квантовой механики в трактовке Дирака и, соответственно, фон Неймана. Каждая из этих трактовок имеет свои преимущества в различных случаях, и мы в дальнейшем будем их использовать в соответствии с поставленными задачами.

5. В теории относительности векторы x называют *контравариантными* векторами, а ковекторы $\tilde{y}$ - *ковариантными* векторами.

6. Теория дуальности (двойственности) получила своё название благодаря тому, что она выявляет ряд свойств “дуальной симметрии” линейных пространств, трудных с точки зрения наглядного воображения, но имеющих фундаментальное значение. Достаточно отметить, что дуализм “волна-частица” в квантовой механике адекватно выражается именно на языке линейного дуализма бесконечно мерных комплексных евклидовых линейных пространств.

Учитывая эту трудность наглядного представления и важность для физических приложений понятия дуальности, рассмотрим эту проблему подробнее.

Пусть нам задана линейная форма $l(x)$ произвольного вектора из $C(n)$

$$\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n . \tag{2.1.8}$$

Это понятие инвариантно: оно может быть определено при помощи функциональных свойств

$$l(\alpha x) = \alpha l(x), \qquad l(x+y) = l(x) + l(y).$$

Ясно, что выражение (2.1.8) обладает этими свойствами. Фиксируя в $C(n)$ базис $e_1, \ldots, e_n$ мы можем записать:

$$x = x^i e_i ; \quad l(x) = x^i l(e_i) = \alpha_i x^i ; \quad \alpha_i = l(e_i).$$

Переходя к другой системе координат, в которой компоненты x^i произвольного вектора x подвергаются преобразованию (1.5.12)

$$x^i = A^i_{i'} x^{i'} ,$$

а линейная форма (2.1.8) примет вид

$$\alpha_i x^i = \alpha_{i'} x^{i'} ,$$

где коэффициенты $\alpha_{i'}$ связаны с первоначальными коэффициентами α_i равенствами

$$\alpha_{i'} = A^i_{i'} \alpha_i . \tag{2.1.9}$$

Говорят, что *коэффициенты* α_i *линейной формы* (2.1.8) *преобразуются* ***контрагредиентно*** *относительно переменных* x^i .

У нас нет необходимости рассматривать коэффициенты α_i как константы, а x^i как переменные. Если не все α_i равны нулю, уравнение $l(x)=0$ определяет “плоскость”, то есть $(n-1)$- мерное подпространство. Вектор x лежит в этой плоскости, если его компоненты удовлетворяют уравнению $l(x)=0$.

Зафиксируем теперь некоторый ненулевой вектор x^0 в $C(n)$ и рассмотрим уравнение всех плоскостей проходящих через этот вектор. Его компоненты $x^i = x^{0i}$ являются теперь константами, а коэффициенты α_i будут переменными и мы можем рассматривать наборы

$(x^1, x^2, ..., x^n)$ и $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$

равноправно, что даёт нам возможность ввести второе n - мерное пространство $\widetilde{C}(n)$, которое мы и будем называть дуальным.

По компонентам $(y_1, y_2, ..., y_n)$ ковектора $\widetilde{y}$ из $\widetilde{C}(n)$ и $(x^1, x^2, ..., x^n)$ вектора x из $C(n)$ мы можем построить скалярное произведение

$$y_1x^1 + y_2x^2 + ... + y_nx^n. \tag{2.1.10}$$

Это выражение по определению имеет инвариантный смысл, так как если отнести пространство $C(n)$ к новой системе координат посредством преобразования переменных x^i, переменные y_i из дуального пространства $\widetilde{C}(n)$ подвергнутся контрагредиентному преобразованию. Это дуальное пространство $\widetilde{C}(n)$ на самом деле для того и вводится, чтобы мы могли сопоставить каждому взаимно однозначному преобразованию контрагредиентное ему преобразование.

Итак, два обратимых линейных преобразования

$x = Ax'$ и $\widetilde{y} = \widetilde{A}\widetilde{y}'$

являются контрагредиентными друг другу, если они сохраняют линейную форму (2.1.8) неизменной

$$y_1 x^1 + y_2 x^2 + \ldots + y_n x^n = y_{1'} x^{1'} + y_{2'} x^{2'} + \ldots + y_{n'} x^{n'}.$$

Если линейная форма (2.1.8) равна нулю, то говорят, что вектор x из $C(n)$ и ковектор $\tilde{y}$ из $\tilde{C}(n)$ находятся в *инволюции*. *Прямая* из $C(n)$ определяет *плоскость* в $\tilde{C}(n)$, то есть плоскость, состоящую из ковекторов в инволюции с данной прямой и наоборот. Дуальность является обратимым соотношением.

§2.2. Дуальные базисы

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ортонормированный[1] базис в $C(n)$. Можно показать, что существует однозначно определённый базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базис $\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \ldots, \tilde{e}^n$ в $\tilde{C}(n)$ такой, что

$$\left\langle \tilde{e}^k \middle| e_i \right\rangle = \delta_i^k \tag{2.2.1}$$

и

$$\tilde{e}^k = \varphi(e_k), \tag{2.2.2}$$

где φ - антиизоморфизм, служащий для определения дуальности пространств.

Базисы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \ldots, \tilde{e}^n$ называются *дуальными*. Договоримся нумеровать координаты ковекторов верхними индексами, а координаты векторов – нижними:

$$\tilde{x} = x_i \tilde{e}^i = \sum_{i=1}^{n} x_i \tilde{e}^i . \tag{2.2.3}$$

Для скалярного произведения вектора y и ковектора $\tilde{x}$, разложенных по дуальным базисам, получим:

$$\left\langle \tilde{x} \middle| y \right\rangle = x_i y^i . \tag{2.2.4}$$

---

[1] Так как мы будем рассматривать только ортонормированные базисы, то слово «ортонормированный» в дальнейшем опускается.

В дальнейшем, рассматривая одновременно $C(n)$ и $\widetilde{C}(n)$, мы будем всегда выбирать в них дуальные базисы и вести вычисления в этом предположении.

В дуальных базисах антиизоморфизм φ запишется в виде

$$\widetilde{x}_i = \overline{x}_i\,, \quad (i = 1,2,\ldots,n). \tag{2.2.5}$$

§2.3. Дуальные операторы

Операторы A и $\widetilde{A}$, действующие, соответственно, в $C(n)$ и $\widetilde{C}(n)$, называются дуальными, если для всех $\widetilde{x}$ и y

$$\left\langle \widetilde{A}\widetilde{x} \middle| Ay \right\rangle = \left\langle \widetilde{x} \middle| y \right\rangle. \tag{2.3.1}$$

Найдём связь между матрицами операторов A и $\widetilde{A}$. По определению чисел A_i^j и $\widetilde{A}_j^k$

$$Ae_i = A_i^j e_j\,, \quad \widetilde{A}\widetilde{e}^{\,k} = \widetilde{A}_j^k \widetilde{e}^{\,j}\,, \tag{2.3.2}$$

откуда, в силу (2.3.1),

$$\left\langle \widetilde{A}\widetilde{e}^{\,k} \middle| Ae_i \right\rangle = \widetilde{A}_j^k A_i^j = \delta_i^k\,. \tag{2.3.3}$$

Мы видим, что матрицы A и $\widetilde{A}$ взаимно обратны:

$$\widetilde{A}_i^j = \left(A^{-1}\right)_i^j. \tag{2.3.4}$$

Оператор, имеющий дуальный оператор, имеет тем самым и обратный оператор.

Если, в частности, $A = U$ - унитарный оператор, то из (1.13.5) следует, что

$$\widetilde{U}_i^j = \overline{U}_j^i\,. \tag{2.3.5}$$

Из (1.3.6) теперь следует, что оператор, дуальный унитарному, унитарен в $\widetilde{C}(n)$.

Из определения (2.1.3) скалярного произведения $\langle\ |\ \rangle$ следует, что

$$\tilde{A} = \varphi \overset{+}{A}{}^{-1} \varphi^{-1}, \tag{2.3.6}$$

или, что тоже: если $\tilde{y} = \varphi(x)$, то

$$\tilde{A}\tilde{y} = \varphi\left(\overset{+}{A}{}^{-1} x\right). \tag{2.3.7}$$

Таким образом, дуальный к A оператор получается из $\overset{+}{A}{}^{-1}$ «переносом» с помощью антиизоморфизма φ.

§2.4. Ортогональная сумма пространств

Пусть $C(n_1), C(n_2), \ldots, C(n_s)$ - комплексные евклидовы пространства. Построим из них новое пространство C, векторы которого, есть формальные суммы

$$\overset{1}{x} \oplus \overset{2}{x} \oplus \ldots \oplus \overset{s}{x}, \tag{2.4.1}$$

где $\overset{i}{x}$ - векторы $C(n_i)$.

Знак $\oplus$ введён в отличие от обычного знака суммирования, так как «суммирование» в (2.4.1) есть просто формальное соединение векторов различных пространств в цепочку, следовательно, *не сложение* их в каком-либо заданном пространстве.

Некоторые из чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s$ могут быть равны друг другу и мы будем считать соответствующие пространства $C(n_i)$ различными экземплярами одного и того же пространства (в силу их изоморфности). Договоримся выписывать $C(n_i)$ в порядке убывания чисел n_i.

Определим в пространстве C сложение векторов, умножение векторов на число и скалярное умножение по правилам:

$$\left(\overset{1}{x} \oplus \ldots \oplus \overset{s}{x}\right) + \left(\overset{1}{y} \oplus \ldots \oplus \overset{s}{y}\right) = \left(\overset{1}{x} + \overset{1}{y}\right) \oplus \ldots \oplus \left(\overset{s}{x} + \overset{s}{y}\right), \tag{2.4.2}$$

то есть, чтобы сложить векторы, надо сложить их компоненты в каждом $C(n_i)$;

$$\lambda\left(\overset{1}{x}\oplus\ldots\oplus\overset{s}{x}\right)=\lambda\overset{1}{x}\oplus\ldots\oplus\lambda\overset{s}{x}, \tag{2.4.3}$$

то есть, чтобы умножить вектор на число λ, надо умножить на это число все его компоненты;

$$\left(\overset{1}{x}\oplus\ldots\oplus\overset{s}{x}\,\middle|\,\overset{1}{y}\oplus\ldots\oplus\overset{s}{y}\right)=\left(\overset{1}{x}\,\middle|\,\overset{1}{y}\right)_{C(n_1)}+\ldots+\left(\overset{s}{x}\,\middle|\,\overset{s}{y}\right)_{C(n_s)}, \tag{2.4.4}$$

то есть, чтобы перемножить векторы, надо скалярно перемножить их соответствующие компоненты и сложить полученные числа.

Выражения (2.4.2) – (2.4.4) показывают, что действия над векторами в C *полностью сводятся к действиям над их компонентами в соответствующих слагаемых пространствах* $C(n_i)$. C *называется ортогональной суммой пространств* $C(n_1),C(n_2),\ldots,C(n_s)$.

Ортогональные суммы пространств можно рассматривать с двух точек: можно сначала задавать пространства $C(n_1),C(n_2),\ldots,C(n_s)$ независимо друг от друга и строить из них пространство C с помощью формальных сумм (2.4.1), либо считать, что все $C(n_i)$ уже лежат в некотором пространстве C, и строить разложение векторов C на слагаемые, лежащие в $C(n_i)$, $i=1,2,\ldots,s$.

Найдём базис и подсчитаем размерность пространства C. Для этого в каждом $C(n_i)$ построим базис $\overset{i}{e}_1,\ldots,\overset{i}{e}_{n_i}$; тогда векторы

$$\overset{1}{e}_1,\ldots,\overset{1}{e}_{n_1},\ldots,\overset{s}{e}_1,\ldots,\overset{s}{e}_{n_s} \tag{2.4.5}$$

составляют базис пространства C, а его размерность равна сумме размерностей пространств $C(n_i)$, то есть

$$C=C(n_1+\ldots+n_s). \tag{2.4.6}$$

Тот факт, что C разлагается в ортогональную сумму пространств $C(n_i)$, запишется так:

$$C = C(n_1) \oplus \ldots \oplus C(n_s). \tag{2.4.7}$$

§2.5. Приводимые операторы

Значение разложения пространства в ортогональную сумму состоит в том, что такое разложение часто позволяет упростить изучение операторов, действующих в C.

Предположим, что оператор L, действующий в C, обладает следующим свойством: L *переводит каждый вектор пространства* $C(n_i)$ *в вектор того же пространства*, $i = 1,2,\ldots,s$. Это значит, что ортогональное разложение (2.4.7) *приводит оператор* L. Если рассматривать действие оператора L только на подпространстве $C(n_i)$, то получится оператор L_i, *действующий в* $C(n_i)$; отношение между оператором L и порождёнными им операторами L_i запишется в виде

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_s. \tag{2.5.1}$$

Справедливо и обратное: если в каждом $C(n_i)$ действует оператор L_i, то в C действует *их сумма* – оператор, представленный формулой (2.5.1).

При этом, *если все* L_i *унитарны, то и* L *унитарен.*

Если существует разложение C (не менее чем из двух слагаемых), приводящее оператор L, его называют *приводимым*, в противном случае – *неприводимым*.

Изучение приводимого оператора L полностью сводится к изучению операторов L_i, каждый из которых «автономно» действует в своём подпространстве $C(n_i)$ меньшей размерности, чем у пространства C. Это объясняет интерес к неприводимым операторам и к разложению произвольных операторов на неприводимые.

В физике играет важную роль более общее понятие приводимости для *системы операторов*. Пусть дана некоторая система (множество) операторов G, действующая в C.

Если каждый из операторов G переводит векторы каждого $C(n_i)$ в векторы того же $C(n_i)$, то говорят, что ортогональное разложение (2.4.7) *приводит* систему операторов G; система G называется в этом случае *приводимой*. Если же не существует разложения (2.4.7), приводящего G, то система G называется *неприводимой*.

Следует заметить, что каждый отдельный оператор из G может быть приводимым, тогда как система G в целом – неприводимой.

В дальнейшем мы покажем, что эрмитовы и унитарные операторы всегда приводимы; тогда как существуют неприводимые системы таких операторов. Это можно объяснить следующим образом: для каждого отдельного оператора из G можно иногда подобрать приводящее его разложение, но ни одно такое разложение не приводит их *всех сразу*.

Разложению (2.4.7) соответствует базис (2.4.5), в котором можно записать каждый действующий в C оператор L:

$$y^j = L_i^j x^i, \quad \left(j = 1, 2, \dots, n; n = n_1 + \dots + n_s\right). \tag{2.5.2}$$

Если x лежит в $C(n_k)$, то $x^i = 0$ для всех i, кроме тех, которые удовлетворяют неравенствам

$$n_1 + \dots + n_{k-1} + 1 \le i \le n_{k-1} + \dots + n_s; \tag{2.5.3}$$

для i, удовлетворяющих (2.5.3), x^i произвольны. Для всех таких x векторы y, определённые формулой (2.5.2), должны также иметь нулевые координаты при i, не удовлетворяющих (2.5.3). отсюда следует, что $L_i^j = 0$ при i, удовлетворяющих (2.5.3), и, j, не удовлетворяющих (2.5.3).

Итак, L_i^j могут быть отличны от нуля лишь в ящиках матрицы

L, в которых оба индекса удовлетворяют одному и тому же из неравенств (2.5.3), $k = 1,2,\ldots,s$. Таким образом, матрица приводимого оператора в специально приспособленном к разложению (2.4.7) базисе (2.4.6) имеет вид

$$\begin{vmatrix} L_1^1 & \ldots & L_{n_1}^1 & & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & & & \\ L_1^{n_1} & \ldots & L_{n_1}^{n_1} & & & & \\ & & & L_{n_1+1}^{n_1+1} & \ldots & L_{n_1+n_2}^{n_1+1} & \\ & & & \ldots & \ldots & \ldots & \\ & & & L_{n_1+1}^{n_1+n_2} & \ldots & L_{n_1+n_2}^{n_1+n_2} & \\ & & & & & & \ldots \end{vmatrix}. \qquad (2.5.4)$$

Из (2.5.4) ясно, как матричные элементы оператора L выражаются через матричные элементы операторов L_i, $i = 1,2,\ldots,s$. Оператор L называется *диагонализирующим*, если приводит некоторое разложение (2.4.7) на одномерные подпространства; в этом случае, при надлежащем выборе базиса, матрица (2.5.4) оказывается диагональной:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & . & . & \lambda_n \end{vmatrix}. \qquad (2.5.5)$$

§2.6. Собственные векторы и собственные значения

Пусть оператор L диагонализируем; тогда (2.4.7) имеет вид

$$C = \overset{1}{C}(1) \oplus \ldots \oplus \overset{n}{C}(1), \tag{2.6.1}$$

а из уравнений (2.5.2) видно, что

$$Le_i = \lambda_i e_i . \tag{2.6.2}$$

Уравнение вида

$$Lx = \lambda x \tag{2.6.3}$$

называется *уравнением собственных значений*. Все его ненулевые решения x, при данном значении параметра λ, называются *собственными векторами оператора* L, принадлежащими λ. Значение λ, для которого существует хотя бы один собственный вектор, называется *собственным значением оператора* L.

Задача о собственных значениях состоит в вычислении собственных значений и в определении собственных векторов заданного оператора. Выражение (2.6.2) показывает, что для диагонализируемого оператора L собственными значениями служат λ_i, а собственными векторами – векторы выбранного специального базиса e_i.

Обратно, если в C существует ортонормированный базис $e_1,\ldots,e_n$, состоящий из собственных векторов оператора L, то все векторы вида αe_i, где α - комплексное число, составляют подпространство $C(1)$ пространства C и имеет место разложение (2.6.1); тем самым оператор L оказывается диагонализируемым.

Важными примерами диагонализируемых операторов являются эрмитовы и унитарные операторы.

Можно показать, что для эрмитова оператора в $C(n)$ существует ортонормированный базис, состоящий из n его собственных векторов, причём все собственные значения λ_i действительны.

Можно, так же, показать, что унитарный оператор в $C(n)$ имеет ортонормированный базис, состоящий из n собственных векторов; соответствующие собственные значения по модулю равны единице:

$$\lambda_k = e^{i\varphi_k}\,. \qquad (2.6.4)$$

Если λ - собственное значение, то все собственные векторы, принадлежащие λ вместе с нулевыми вектором образуют *собственное подпространство* C_λ размерности r, называемой *кратностью* этого подпространства, а собственное значение λ - r-кратно вырожденным (при $r > 1$).

Если для эрмитовых операторов A, B существует ортонормированный базис, *состоящий из их общих собственных векторов, то эти операторы перестановочны*.

Верно и обратное: для двух или более перестановочных эрмитовых операторов можно построить ортонормированный базис, состоящий из общих собственных векторов. Для построения такого базиса заметим, что каждый из перестановочных операторов переводит в себя любое собственное подпространство другого, и можно строить собственные векторы B, не выходя из собственных подпространств A. Это не значит, однако, что *каждый* собственный вектор A является собственным вектором B: это справедливо лишь для вектора, принадлежащего простому собственному значению A кратности 1.

В случае произвольного оператора приведение к диагональному виду, в общем случае, невозможно.

Запишем уравнение собственных значений (2.6.3) в произвольном базисе в виде

$$\left(L_i^j - \lambda\delta_i^j\right)x^i = 0\,. \qquad (2.6.5)$$

Это уравнение имеет нетривиальные решения x^i в том и только том случае, когда

$$det\left|L_i^j - \lambda\delta_i^j\right| = 0\,. \qquad (2.6.6)$$

Уравнение (2.6.6) называют *вековым уравнением,* служащим для определения собственных значений, которые в подробном виде записываются так:

$$\begin{vmatrix} L_1^1-\lambda & L_2^1 & \dots & L_n^1 \\ L_1^2 & L_2^2-\lambda & \dots & L_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_1^n & L_2^n & \dots & L_n^n-\lambda \end{vmatrix} = 0 . \tag{2.6.7}$$

Левая часть (2.6.7) есть полином степени n относительно λ, то есть число собственных значений *любого* оператора не превышает n.

По теореме Виета сумма корней уравнения (2.6.7) взятых с их алгебраической кратностью (как корней уравнения, а не как собственных значений), равна коэффициенту при $(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}$:

$$SpL = \sum_{i=1}^{n} L_i^j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . \tag{2.6.8}$$

Ранее мы показали, что определитель оператора не зависит от выбора базиса. Применяя это к (2.6.6), мы увидим, что сумма $\sum_{i=1}^{n} L_i^j$ в (2.6.8) является числовым инвариантом оператора L. Инвариант SpL называется *следом оператора*.

Другой инвариант, $det\, L$, по теореме Виета равен произведению корней:

$$det\, L = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i . \tag{2.6.9}$$

Для каждого оператора L существует *однозначное* разложение

$$L = SpL \cdot E(n) + L_0 , \tag{2.6.10}$$

где $E(n)$- тождественный оператор, а L_0 - *бесследный* оператор (с нулевым следом).

Пример 2.6.1. Найти собственные значения и собственные векторы оператора L с матрицей

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

Характеристический многочлен оператора L есть

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0.$$

Его корни $\lambda_1 = 6$ и $\lambda_2 = -1$.

Собственные векторы находим из двух систем уравнений:

$$\begin{cases} (1-\lambda_1)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 + (4-\lambda_1)x_2 = 0 \end{cases}, \qquad (*)$$

$$\begin{cases} (1-\lambda_2)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 + (4-\lambda_2)x_2 = 0 \end{cases}. \qquad (**)$$

При $\lambda_1 = 6$ (*) сводится к одному уравнению $5x_1 - 2x_2 = 0$ откуда находим, что $\frac{x_1}{x_2} = \frac{2}{5}$ и в качестве собственного вектора, соответствующего собственному значению $\lambda_1 = 6$, можно взять $l_1 = \{2,5\}$, или любой вектор, кратный l_1.

При $\lambda_2 = -1$ имеем уравнение $x_1 + x_2 = 0$ или $\frac{x_1}{x_2} = -1$, и соответствующий собственный вектор будет $l_2 = \{1,-1\}$, или любой ему кратный.

Пример 2.6.2. Найдём собственные значения и собственные векторы оператора R поворота на угол φ с матрицей

$$R=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Решение.

Характеристический многочлен оператора R есть

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix}\cos\varphi-\lambda & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\cos\varphi\cdot\lambda+1=0\,.$$

Его корни $\lambda_{1,2}=\cos\varphi\pm i\sin\varphi$ комплексны, и если φ не кратно π, преобразование не имеет вещественных значений.

Если $\varphi=2k\pi$, преобразование является *тождественным*, и каждый вектор плоскости – собственный, причём $\lambda=1$.

Если $\varphi=(2k+1)\pi$, мы имеем преобразование *центральной симметрии*, и каждый вектор плоскости будет собственным с собственным значением $\lambda=-1$.

Примечание. Решать примеры на отыскание собственных значений и собственных векторов удобно с помощью программы MathCAD PLUS 6.0 PRO.

§2.7. Тензорное произведение пространств

В §2.4. мы научились из заданных пространств строить их «сумму» (2.4.7), причём операторы действующие в «слагаемых» пространствах, так же имеют «сумму» (2.5.1) – оператор, действующий в «сумме» пространств.

Рассмотрим теперь построение сложных пространств из более простых способом «умножения». При этом будут «перемножаться» и операторы, действующие в пространствах-«сомножителях» и мы получим оператор, действующий в «произведении» пространств.

Рассмотрим два пространства $C(m)$ и $C(n)$. Векторы первого пространства обозначим через $x,x_1,x',\ldots$, а векторы второго - $y,y_1,y',\ldots$. Базисы в $C(m)$ будем обозначать через $e_1,\ldots,e_m$, а в $C(n)$- через $f_1,\ldots,f_n$.

Рассмотрим всевозможные формальные выражения вида

$$\sum_{i=1}^{p} x_i \otimes y_i = x_1 \otimes y_1 + \ldots + x_p \otimes y_p \tag{2.7.1}$$

с любым числом «слагаемых» p, где x_i - векторы из $C(m)$, а y_i - из $C(n)$. Знак $\otimes$ играет роль чисто формального «разделителя» между x_i и y_i. Мы не можем здесь пользоваться записью вида $(x_i|y_i)$, так как надо всё время помнить, что речь идёт не о «внутреннем» (аналог скалярного произведения векторов одного пространства), а некотором формальном аналоге умножения для векторов из *разных пространств*. Знаки + и $\sum$ в (2.7.1) имеют тоже формальный характер и не означают суммирования ни в каком заранее заданном пространстве.

Совершенно несущественно, что «собой представляют» формальные суммы (2.7.1), имеют значение лишь правила действий над ними, которые мы сейчас перечислим.

Условимся считать два выражения вида (2.7.1) *равными*, если они могут быть получены друг из друга конечным числом следующих *элементарных операций*: если в (2.7.1) входит член $x \otimes y$ и $x = x' + x''$ в $C(m)$, то этот член заменяется на $x' \otimes y + x'' \otimes y$ и аналогичными (взаимозаменяемыми) будут выражения:

$$(x' + x'') \otimes y = x' \otimes y + x'' \otimes y, \tag{2.7.2}$$

$$x \otimes (y' + y'') = x \otimes y' + x \otimes y'', \tag{2.7.3}$$

$$\lambda x \otimes y = x \otimes \lambda y. \tag{2.7.4}$$

Если выражение (2.7.1) можно с помощью элементарных преобразований привести к виду $0 \otimes 0$ (слева нулевой вектор в $C(m)$, справа – нулевой вектор в $C(n)$), то $0 \otimes 0$ обозначается просто через 0. Множество всех выражений вида (2.7.1), с отождествлением равных выражений, обозначим через $C(m) \otimes C(n)$.

Для выражений (2.7.1) можно установить действия сложения, умножения на комплексное число и скалярного умножения, причём

$C(m)\otimes C(n)$ превращается в комплексное евклидово пространство размерности mn (в случае ортогональной суммы $C(m)\oplus C(n)$, размерности *складываются*).

Сумма определяется по правилу:

$$\left(x_1'\otimes y'+\ldots+x_p'\otimes y_p'\right)+\left(x_1''\otimes y_1''+\ldots+x_q''\otimes y_q''\right)=$$

$$=x_1'\otimes y_1'+\ldots x_p'\otimes y_p'+x_1''\otimes y_1''+\ldots+x_q''y_q''. \qquad (2.7.5)$$

Для сложения двух выражений (2.7.1) надо их просто выписать подряд, соединив знаком плюс. Часто при этом в правой части возможны упрощения с помощью элементарных операций, например

$$x\otimes y+x\otimes y=(x+x)\otimes y=2x\otimes y.$$

Умножение на комплексное число определяется по правилу:

$$\lambda\left(x_1\otimes y_1+\ldots+x_p\otimes y_p\right)=\lambda x_1\otimes y_1+\ldots+\lambda x_p y_p=$$

$$=x_1\otimes\lambda y_1+\ldots+x_p\otimes\lambda y_p. \qquad (2.7.6)$$

Скалярное произведение:

для мономов:

$$\left(x'\otimes y'\middle|x''\otimes y''\right)=\left(x'\middle|x''\right)_{C(m)}\cdot\left(y'\middle|y''\right)_{C(n)}; \qquad (2.7.7)$$

для «полиномов»:

$$\left(\sum_i x_i'\otimes y_i'\middle|\sum_j x_j''\otimes y_j''\right)=\sum_{i,j}\left(x_i'\otimes y_i'\middle|x_j''\otimes y_j''\right). \qquad (2.7.8)$$

Можно доказать, что эти действия удовлетворяют всем требованиям, наложенным выше на действия над векторами комплексного евклидова пространства.

Построим теперь базис и найдём размерность $C(m)\otimes C(n)$. Если $x=x^ie_i$, а $y=y^jf_j$, то

$$x\otimes y=x^iy^je_i\otimes f_j \qquad (2.7.9)$$

представляют разложение монома $x\otimes y$ по базисным мономам $e_i\otimes f_j$.

Разлагая, таким образом, все мономы (2.7.1), мы можем представить любой вектор ξ из $C(m)\otimes C(n)$ в виде

$$\xi = \xi^{ij} e_i \otimes f_j . \tag{2.7.10}$$

Так как векторы $e_i \otimes f_j$ ортонормированны, они составляют базис в $C(m)\otimes C(n)$. Когда мы это покажем, мы тем самым найдём и размерность пространства $C(m)\otimes C(n)$, поскольку число векторов $e_i \otimes f_j$ равно mn ($i = 1,...,m;\ j = 1,...,n$).

По определению скалярного произведения мономов (2.7.7)

$$\left(e_i \otimes f_j \middle| e_k \otimes f_l\right) = \left(e_i \middle| e_k\right) \cdot \left(f_j \middle| f_l\right) = \delta_{ik}\delta_{jl} ; \tag{2.7.11}$$

где правая часть отлична от нуля при $i = k$, $j = l$, то есть когда векторы $e_i \otimes f_j$, $e_k \otimes f_l$ совпадают, в этом случае $\delta_{ii}\delta_{jj} = 1$.

Таким образом, можно указать ортонормированный базис пространства $C(m)\otimes C(n)$

$$\left.\begin{array}{l} e_1 \otimes f_1; e_1 \otimes f_2; ...; e_1 \otimes f_n; \\ e_2 \otimes f_1; e_2 \otimes f_2; ...; e_2 \otimes f_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_m \otimes f_1; e_m \otimes f_2; ...; e_m \otimes f_n. \end{array}\right\} \tag{2.7.12}$$

Если занумеровать векторы базиса в написанном выше порядке, то становятся понятными выражения: «базисный вектор номер (k,l)», «матричный элемент из (i, j)-й строки» и так далее.

§2.8. Тензорное произведение операторов

Пусть в $C(m)$ действует оператор M, а в $C(n)$- оператор N. Построим по этим операторам новый оператор $M \otimes N$, действующий в $C(m)\otimes C(n)$.

Так как нам надо определить линейный оператор, то достаточно указать, как нужный нам оператор действует на мономы; по линейности он будет тогда определён для всех полиномов (2.7.1).

Пусть

$$L(x \otimes y) = Mx \otimes Ny\,; \tag{2.8.1}$$

тогда оператор L, действующий на $C(m)\otimes C(n)$ обозначим как

$$L = M \otimes N \tag{2.8.2}$$

и назовём *тензорным (кронекеровым) произведением* оператора M, действующим на $C(m)$, и оператора N, действующего на $C(n)$.

Фиксируем базисы $e_i, f_j, e_i \otimes f_j$ и выразим матрицу оператора $M \otimes N$ через матрицы M и N.

Если

$$Me_i = M_i^j e_j, \qquad (i = 1,\dots,m), \quad Nf_k = N_k^l f_l, \quad (j = 1,\dots,n),$$

то

$$L(e_i \otimes f_k) = Me_i \otimes Nf_k = M_i^k e_k \otimes N_j^l f_l = M_i^k N_j^l e_k \otimes f_l\,. \tag{2.8.3}$$

Таким образом, матричный элемент оператора L, стоящий в строке (k,l) и столбце (i,j) равен $M_i^k N_j^l$. Если базисные векторы в $C(m)\otimes C(n)$ занумерованы по правилу (2.7.12), то можно записать матрицу $M \otimes N$ в виде

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
M_1^1N_1^1 & . & M_1^1N_n^1 & M_2^1N_1^1 & . & M_2^1N_n^1 & & M_m^1N_1^1 & . & M_m^1N_n^1 \\
. & . & . & . & . & . & \dots & . & . & . \\
M_1^1N_1^n & . & M_1^1N_n^n & M_2^1N_1^n & . & M_2^1N_n^n & & M_m^1N_1^n & . & M_m^1N_n^n \\
M_1^2N_1^1 & . & M_1^2N_n^1 & M_2^2N_1^1 & . & M_2^2N_n^1 & & M_m^2N_1^1 & . & M_m^2N_n^1 \\
. & . & . & . & . & . & \dots & . & . & . \\
M_1^2N_1^n & . & M_1^2N_n^n & M_2^2N_1^n & . & M_2^2N_n^n & & M_m^2N_1^n & . & M_m^2N_n^n \\
 & \dots & & & \dots & & \dots & & \dots & \\
M_1^mN_1^1 & . & M_1^mN_n^1 & M_2^mN_1^1 & . & M_2^mN_n^1 & & M_m^mN_1^1 & . & M_m^mN_n^1 \\
. & . & . & . & . & . & \dots & . & . & . \\
M_1^mN_1^n & . & M_1^mN_n^n & M_2^mN_1^n & . & M_2^mN_n^n & & M_m^mN_1^n & . & M_m^mN_n^n
\end{array}\right| \tag{2.8.4}$$

Матрица (2.8.4) называется кронекеровым произведением матриц M_i^k и N_j^l.

Если операторы M и N унитарны, то и оператор $L = M \otimes N$ унитарен. Проверим условие унитарности (1.13.5); в следующем вычислении $\sum\limits_{(i,j)}$ означает суммирование по всем параметрам $i = 1,\dots,m$; $j = 1,\dots,n$:

$$\sum_{(i,j)} \overline{L}_{(k,l)}^{(i,j)} L_{(s,t)}^{(i,j)} = \sum_{(i,j)} \overline{M}_i^k \overline{N}_l^j M_s^i N_t^j =$$

$$= \left(\sum_i \overline{M}_k^i M_s^i \right) \cdot \left(\sum_j \overline{N}_l^j N_t^j \right) = \sigma_{ks}\sigma_{lt},$$

что и требовалось доказать.

§2.9. Произведение произвольного числа пространств

Совершенно аналогично определяется тензорное произведение любого числа пространств

$$C(n) = C(n_1) \otimes C(n_2) \otimes \ldots \otimes C(n_s), \quad n = n_1 n_2 \ldots n_s, \tag{2.9.1}$$

векторы которого имеют вид

$$\sum_j \overset{1}{x}_j \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x}_j, \tag{2.9.2}$$

где $\overset{i}{x}$ - вектор из $C(n_i)$.

По определению справедливы равенства

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{1}{x} \otimes \ldots \otimes \left(\overset{i}{x'} + \overset{i}{x''}\right) \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x} = \\
&= \overset{1}{x} \otimes \ldots \otimes \overset{i}{x'} \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x} + \overset{1}{x} \otimes \ldots \otimes \overset{i}{x''} \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x}, \\
&\lambda \overset{1}{x} \otimes \overset{2}{x} \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x} = \overset{1}{x} \otimes \lambda \overset{2}{x} \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x} = \\
&= \ldots = \overset{1}{x} \otimes \overset{2}{x} \otimes \ldots \otimes \lambda \overset{s}{x}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.9.3}$$

Замена левой части такого равенства правой или наоборот, есть *элементарная операция* над полиномом (2.9.2). Полиномы считаются равными, если переводятся друг в друга элементарными операциями. Действия над векторами из $C(n)$ (то есть над полиномами (2.9.2), среди которых равные отождествляются и считаются одним и тем же вектором) определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p} \overset{1}{x}_j \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x}_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \overset{1}{x}_j \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x}_j = \sum_{j=1}^{p+q} \overset{1}{x}_j \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x}_j ;\\
&\lambda \sum_j \overset{1}{x}_j \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x}_j = \sum_j \lambda \overset{1}{x}_j \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x}_j = \\
&= \ldots = \sum_j \overset{1}{x}_j \otimes \ldots \otimes \lambda \overset{s}{x}_j ;\\
&\left(\sum_j \overset{1}{x}{}'_j \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x}{}'_j \,\middle|\, \sum_j \overset{1}{x}{}''_j \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x}{}''_j \right) = \sum_{i,j} \prod_{k=1}^{s} \left(\overset{k}{x}{}'_i \,\middle|\, \overset{k}{x}{}''_j \right).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.9.4)$$

Наконец, если в каждом пространстве $C(n_i)$ действует оператор L_i, то можно определить тензорное произведение

$$L = L_1 \otimes L_2 \otimes \ldots \otimes L_s \qquad (2.9.5)$$

этих операторов, действующих на мономы по правилу:

$$L\left(\overset{1}{x} \otimes \ldots \otimes \overset{s}{x} \right) = L_1\left(\overset{1}{x} \right) \otimes L_2\left(\overset{2}{x} \right) \otimes \ldots \otimes L_s\left(\overset{s}{x} \right). \qquad (2.9.6)$$

Тензорное произведение любого числа унитарных операторов есть унитарный оператор.