Глава III
Тензорная алгебра над комплексным евклидовым пространством

Эта глава посвящена вопросам тензорной алгебры над комплексным евклидовым пространством. Тензор, как инвариантный объект, определяется, в отличие от общепринятых способов, как вектор некоторого комплексного евклидового пространства. Такой подход к определению тензора продиктован требованиями физических приложений, которые мы будем рассматривать далее. Для более полного понимания понятия тензора приводятся его типовые определения (тензор как закон преобразования, тензор как полилинейная функция). Далее рассматриваются алгебраические действия (сложение, умножение, свёртка) над тензорами, а так же симметрические и антисимметрические тензоры, операторы симметризации.

§3.1. Определение понятия тензора

Возьмём некоторую фиксированную размерность n. Далее возьмём p экземпляров $\overset{1}{C},\overset{2}{C},\ldots,\overset{p}{C}$ пространства $C(n)$ и q экземпляров $\underset{1}{\tilde{C}},\underset{2}{\tilde{C}},\ldots,\underset{q}{\tilde{C}}$ дуального пространства $\tilde{C}(n)$ и построим комплексное евклидово пространство

$$C(p,q)=\overset{1}{C}\otimes\overset{2}{C}\otimes\ldots\otimes\overset{p}{C}\otimes\underset{1}{\tilde{C}}\otimes\underset{2}{\tilde{C}}\otimes\ldots\otimes\underset{q}{\tilde{C}} \qquad (3.1.1)$$

размерности n^{p+q}.

Вектор этого пространства называется тензором над $C(n)$ *вален-*

тности (p,q)*, или, иначе, комплексным тензором над* $C(n)$*,* p *раз контравариантным и* q *раз ковариантным.*

По аналогии с определением тензорного произведения пространств, представим тензор $T(p,q)$ из $C(p,q)$ в виде формального полинома

$$T(p,q)=\sum_j \overset{1}{x}_j\otimes\ldots\otimes\overset{p}{x}_j\otimes\underset{1}{\tilde{x}}^j\otimes\ldots\otimes\underset{q}{\tilde{x}}^j\,, \tag{3.1.2}$$

где $\overset{i}{x}_j$ - вектор из $\overset{i}{C}$, $\underset{k}{\tilde{x}}^j$ - вектор из $\underset{k}{\tilde{C}}$, индекс j служит для обозначения векторов, входящих в j-й член суммы.

В соответствии с определением скалярного произведения в $C(p,q)$ (см. §2.7), мы можем написать:

$$\left(\sum_i \overset{1}{x'_i}\otimes\ldots\overset{p}{x'_i}\otimes\underset{1}{\tilde{x}}'^i\otimes\ldots\otimes\underset{q}{\tilde{x}}'^i\,\middle|\,\sum_j \overset{1}{x''_j}\otimes\ldots\otimes\overset{p}{x''_j}\otimes\underset{1}{\tilde{x}}''^j\otimes\ldots\underset{q}{\tilde{x}}''^j\right)=$$

$$=\sum_{i,j}\prod_{k=1}^{p}\left(\overset{k}{x'_i}\,\middle|\,\overset{k}{x''_j}\right)\cdot\prod_{l=1}^{q}\left(\underset{l}{\tilde{x}}'^i\,\middle|\,\underset{l}{\tilde{x}}''^j\right). \tag{3.1.3}$$

Замечания.

Рассмотрим подробнее векторную природу тензоров. Единственное, что существенно для того, чтобы некоторые объекты можно было трактовать как векторы, это возможность производить над ними действия по определённым правилам, с соблюдением общих алгебраических законов перечисленных в §1.10. Так как $C(p,q)$ есть частный случай тензорного произведения пространств $C(p)$ и $C(q)$, мы можем рассмотреть формальные суммы (3.1.2) как векторы (при этом надо иметь в виду, что такое представление вектора неоднозначно, суммы представляющие один и тот же вектор, отличаются друг от друга преобразованиями типа (2.9.3)). Таким образом, мы видим, что представления (3.1.2) удобно для изображения тензоров.

В литературе редко вводится скалярное произведение для тензоров и поэтому истолкование тензора как вектора некоторого комплексного евклидового пространства может показаться несколько необычным, так как чаще всего понятие тензора вводится с помощью координатного метода.

Определение тензора как вектора комплексного пространства необходимо нам для интересующих нас физических приложений. Мы часто будем отступать от общепринятых определений, руководствуясь единственно требованиями физики.

Векторы из $C(n)$ и ковекторы из $\tilde{C}(n)$ представляют частный случай тензоров. В самом деле, $T(1,0)$ имеет вид $\sum_j \overset{1}{x}_j = \overset{1}{x}$, а $T(0,1)$ вид $\sum_j \tilde{x}^j_1 = \tilde{x}_1$.

Моном $T(1,1) = x \otimes \tilde{y}$ можно рассматривать как оператор на $C(n)$: действия этого оператора на вектор z из $C(n)$ определяется формулой

$$Tz = x\langle \tilde{y}|z\rangle = \langle \tilde{y}|z\rangle x. \tag{3.1.4}$$

Естественно, это не самый общий оператор на $C(n)$; но любой оператор в $C(n)$ можно отождествить с некоторым полиномом, то есть тензором типа $T(1,1) = x_i \otimes \tilde{y}^i$:

$$Tz = \langle \tilde{y}^i|z\rangle x_i, \tag{3.1.5}$$

таким образом, операторы в $C(n)$ представляют собой тензоры валентности $(1,1)$.

Моном $T(0,2) = \tilde{x}_1 \otimes \tilde{x}_2$ можно рассматривать как билинейную форму на $C(n)$; её значения на паре векторов u и v определяется как

$$T(u,v) = \langle \tilde{x}_1|u\rangle \cdot \langle \tilde{x}_2|v\rangle. \tag{3.1.6}$$

Наиболее общая билинейная форма на $C(n)$ задаётся тензором

$$T(0,2)=\sum_j \underset{1}{\tilde{x}}^j \otimes \underset{2}{\tilde{x}}^j : \qquad (3.1.7)$$

$$T(u,v)=\sum_j \left\langle \underset{1}{\tilde{x}}^j \middle| u \right\rangle \cdot \left\langle \underset{2}{\tilde{x}}^j \middle| v \right\rangle , \qquad (3.1.8)$$

таким образом, билинейная форма на $C(n)$ представляет собой тензоры валентности $(0,2)$.

§3.2. Задание тензора координатами

Как вектор *из* $C(n)$ тензор любой валентности *над* $C(n)$ не требует для своего определения никаких координатных систем: это – инвариантный объект (см. (3.1.2)). Но если в пространстве $C(p,q)$, *векторами которого являются тензоры* T *валентности* (p,q), введён некоторый базис, то можно найти координаты тензора T относительно этого базиса.

Вспомним, как строится базис тензорного произведения пространств из базисов пространств-сомножителей.

Для этого надо: 1) задать базис в каждом сомножителе, в нашем случае это экземпляры $C(n)$ и $\tilde{C}(n)$; 2) фиксируем базис $e_1,\ldots,e_n$ в $C(n)$ и дуальный базис $\tilde{e}^1,\ldots,\tilde{e}^n$ в $\tilde{C}(n)$; 3) в пространстве $\overset{i}{C}$ - i - ом экземпляре $C(n)$ - возьмём в качестве базиса i -й экземпляр базиса $C(n)$, состоящий из векторов $\overset{i}{e}_1,\ldots,\overset{i}{e}_n$, и аналогично в $\underset{k}{\tilde{C}}$ - k -й экземпляр базиса $\tilde{C}(n)$, состоящий из векторов $\underset{k}{\tilde{e}}^1,\ldots,\underset{k}{\tilde{e}}^n$. Тогда базисные векторы пространства $C(p,q)$, образующие в $C(p,q)$ ортонормированную систему, имеют вид

$$\overset{1}{e}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \overset{p}{e}_{\alpha_p} \otimes \underset{1}{\tilde{e}}^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{e}}^{\beta_q}, \tag{3.2.1}$$

где индексы $\alpha_1,\ldots,\alpha_p,\beta_1,\ldots,\beta_q$ пробегают независимо значения от 1 до n.

Обозначим базисный вектор (или, что тоже самое, базисный тензор) (3.2.1) чрез $\Psi^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$. Тогда для любого монома

$$T_0 = \overset{1}{x} \otimes \overset{2}{x} \otimes \ldots \otimes \overset{p}{x} \otimes \underset{1}{\tilde{x}} \otimes \underset{2}{\tilde{x}} \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{x}} \tag{3.2.2}$$

имеем

$$\overset{i}{x} = \overset{i}{x}{}^j \overset{i}{e}_j, \quad \underset{k}{\tilde{x}} = \underset{k}{\tilde{x}}_l \underset{k}{\tilde{e}}^l, \tag{3.2.3}$$

$$T_0 = \overset{1}{x}{}^{\alpha_1} \overset{2}{x}{}^{\alpha_2} \ldots \overset{p}{x}{}^{\alpha_p} \underset{1}{\tilde{x}}_{\beta_1} \underset{2}{\tilde{x}}_{\beta_2} \ldots \underset{q}{\tilde{x}}_{\beta_q} \cdot \Psi^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}. \tag{3.2.4}$$

Любой тензор $T(p,q)$ имеет, поэтому разложение вида

$$T(p,q) = T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} \cdot \Psi^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}. \tag{3.2.5}$$

Числа $T^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$ и есть координаты тензора $T(p,q)$ в выбранном базисе (3.2.1).

Для векторов $T(1,0)$ и ковекторов $T(0,1)$ мы можем записать их координаты в $C(n)$ и соответственно в $\tilde{C}(n)$:

$$T(1,0) = T^{\alpha} e_{\alpha}, \tag{3.2.6}$$

$$T(0,1) = T_{\beta} \tilde{e}^{\beta}. \tag{3.2.7}$$

Для тензоров валентности $(1,1)$ имеем

$$T(1,1) = T^{\alpha}_{\beta} e_{\alpha} \otimes \tilde{e}^{\beta} = T^{\alpha}_{\beta} \Psi^{\beta}_{\alpha}. \tag{3.2.8}$$

В соответствии с (3.1.5) действие оператора $T(1,1)$, на вектор

$z = z^i e_i$ зададим формулой

$$u = T(1,1)z = T_\beta^\alpha \langle \tilde{e}^\beta | z \rangle e_\alpha = T_\beta^\alpha z^\beta e_\alpha, \tag{3.2.9}$$

или

$$u^\alpha = T_\beta^\alpha z^\beta. \tag{3.2.10}$$

мы пришли к обычной записи оператора в координатах. Тождественный оператор задаётся тензором δ, имеющим в любом базисе координаты δ_β^α.

Аналогично тензор

$$T(0,2) = T_{\beta_1\beta_2} \tilde{e}^{\beta_1} \otimes \tilde{e}^{\beta_2} \tag{3.2.11}$$

определяет, согласно (3.1.7), (3.1.8), билинейную форму

$$T(u,v) = T_{\beta_1\beta_2} u^{\beta_1} v^{\beta_2}. \tag{3.2.12}$$

Операции над тензорами одинаковой валентности записываются в координатах следующим образом:

$$(T + S)_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = T_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} + S_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}, \tag{3.2.13}$$

$$(\lambda T)_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = \lambda \cdot T_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}, \tag{3.2.14}$$

$$(T|S) = \sum_{\alpha,\beta} \bar{T}_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} S_{\beta_1 \ldots \beta_q}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}. \tag{3.2.15}$$

В формуле (3.2.15) суммирование производится по всем индексам $\alpha_i \ (i = 1,2,\ldots,p), \beta_j \ (j = 1,2,\ldots,q)$.

§3.3. Индуцированный оператор

Пусть нам заданы: пространство $C(n)$ с действующим в нём оператором L и дуальное пространство $\tilde{C}(n)$ с действующим в нём дуальным оператором $\tilde{L}$. Возьмём в i-м экземпляре $C(n)$ (то есть в $\overset{i}{C}$) оператор $\overset{i}{L}$ - i-й экземпляр оператора L, а в k-м экземпляре $\tilde{C}(n)$ (то есть в $\underset{k}{\tilde{C}}$) - $\underset{k}{\tilde{L}}$, k-й экземпляр $\tilde{L}$.

Тогда в $C(p,q)$ действует тензорное произведение операторов

$$\hat{L} = \overset{1}{L} \otimes \ldots \otimes \overset{p}{L} \otimes \underset{1}{\tilde{L}} \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{L}}. \tag{3.3.1}$$

Отметим формальный смысл только что проведённой операции: *по данному оператору* L*, действующему на векторы* x *из* $C(n)$*, мы построили стандартным образом оператор* $\hat{L}$*, действующий на векторы* $T(p,q)$ *из пространства* $C(p,q)$.

Этот закон соответствия, по которому оператору в n - мерном пространстве ставится в соответствие оператор в пространстве другой, более высокой размерности, имеет основное значение для теории представлений, которую мы рассмотрим далее.

Обозначим это соответствие символом Π:

$$\hat{L} = \Pi L. \tag{3.3.2}$$

$\hat{L}$ *называется оператором индуцированным оператором* L *в* $C(p,q)$.

Выясним, как действует оператор $\hat{L}$ на вектор $T(p,q)$. Учитывая линейность оператора $\hat{L}$, достаточно рассмотреть, как действует $\hat{L}$ на базисные векторы (3.2.1). По определению тензорного произведения операторов (2.9.5) $\hat{L}$ действует «почленно»:

$$\hat{L}\left(\overset{1}{e}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \overset{p}{e}_{\alpha_p} \otimes \underset{1}{\tilde{e}}^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{e}}^{\beta_q}\right) =$$

$$= \overset{1}{L}\left(\overset{1}{e}_{\alpha_1}\right) \otimes \ldots \otimes \overset{p}{L}\left(\overset{p}{e}_{\alpha_p}\right) \otimes \underset{1}{\tilde{L}}\left(\underset{1}{\tilde{e}}^{\beta_1}\right) \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{L}}\left(\underset{q}{\tilde{e}}^{\beta_q}\right). \tag{3.3.3}$$

Учитывая (2.3.2), запишем

$$\overset{i}{L}\overset{i}{e}_\alpha = L^\gamma_\alpha \overset{i}{e}_\gamma, \qquad \underset{k}{\widetilde{L}}\,\underset{k}{\widetilde{e}}^\beta = L^\beta_\delta\,\underset{k}{\widetilde{e}}^\delta, \tag{3.3.4}$$

так как все операторы $\overset{i}{L}$ имеют одну и ту же матрицу L^γ_α, а все операторы $\underset{k}{\widetilde{L}}$ - одну и ту же матрицу $\widetilde{L}^\beta_\delta$. Поэтому

$$\widehat{L}\left(\Psi^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}\right) = L^{\gamma_1}_{\alpha_1} L^{\gamma_2}_{\alpha_2} \ldots L^{\gamma_p}_{\alpha_p} \widetilde{L}^{\beta_1}_{\delta_1} \widetilde{L}^{\beta_2}_{\delta_2} \ldots L^{\beta_q}_{\delta_q} \Psi^{\delta_1 \ldots \delta_q}_{\gamma_1 \ldots \gamma_p}, \tag{3.3.5}$$

то есть мы нашли матричные элементы оператора $\widehat{L}$ в базисе (3.2.1). В силу общего выражения для линейного оператора $y^j = L^j_i x^i$, мы можем записать уравнение

$$T' = \widehat{L}T \tag{3.3.6}$$

в координатной форме:

$$T'^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = L^{\alpha_1}_{\gamma_1} \ldots L^{\alpha_p}_{\gamma_p} \widetilde{L}^{\delta_1}_{\beta_1} \ldots \widetilde{L}^{\delta_q}_{\beta_q} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}_{\delta_1 \ldots \delta_q}. \tag{3.3.7}$$

В соответствии с (2.3.4) перепишем (3.3.7) в виде

$$T'^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = L^{\alpha_1}_{\gamma_1} \ldots L^{\alpha_p}_{\gamma_p} \left(L^{-1}\right)^{\delta_1}_{\beta_1} \ldots \left(L^{-1}\right)^{\delta_q}_{\beta_q} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}_{\delta_1 \ldots \delta_q}. \tag{3.3.8}$$

Если $L = U$ - унитарный оператор, действующий в $C(n)$ (наиболее интересный для дальнейших приложений случай), то можно записать (3.3.8) (с учётом того, что $\left(U^{-1}\right)^j_i = \overset{+}{U}{}^j_i = \overline{U}{}^i_j$, см. (1.3.15)) так:

$$T'^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = U^{\alpha_1}_{\gamma_1} \ldots U^{\alpha_p}_{\gamma_p} \left(U^{-1}\right)^{\delta_1}_{\beta_1} \ldots \left(U^{-1}\right)^{\delta_q}_{\beta_q} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}_{\delta_1 \ldots \delta_q}, \tag{3.3.9}$$

$$T'^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = \sum_{\gamma,\delta} U^{\alpha_1}_{\gamma_1} \ldots U^{\alpha_p}_{\gamma_p} \overline{U}{}^{\beta_1}_{\delta_1} \ldots \overline{U}{}^{\beta_q}_{\delta_q} T^{\gamma_1 \ldots \gamma_p}_{\delta_1 \ldots \delta_q}. \tag{3.3.10}$$

Суммирование в (3.3.10) не по правилу Эйнштейна связано с тем, что операция перехода от матрицы к комплексно сопряжённой матрице не имеет инвариантного (не зависящего от выбора базиса) смысла.

Подчеркнём ещё раз, что формула (3.3.8) представляет собой запись в координатах действия в пространстве $C(p,q)$ оператора $\widehat{L}$ есть квадратная матрица порядка n^{p+q}.

Докажем следующее свойство соответствия Π: если операторы L', L'' действуют в $C(n)$, $L = L'L''$ и L, L', L'' индуцируют операторы $\widehat{L}, \widehat{L}', \widehat{L}''$, действующие в $C(p,q)$, то $\widehat{L} = \widehat{L}'\widehat{L}''$, или

$$\Pi(L'L'') = \Pi(L') \cdot \Pi(L''). \tag{3.3.11}$$

Покажем, что $\widehat{L}$ и $\widehat{L}'\widehat{L}''$ одинаково действуют на базисные векторы (3.2.1).

Согласно определению тензорного произведения операторов (2.9.5),

$$\widehat{L}\left(\Psi^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\right) = \widehat{L}\left(\overset{1}{e}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \overset{p}{e}_{\alpha_p} \otimes \underset{1}{\tilde{e}}^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{e}}^{\beta_q}\right) =$$

$$= \overset{1}{L}\left(\overset{1}{e}_{\alpha_1}\right) \otimes \ldots \otimes \overset{p}{L}\left(\overset{p}{e}_{\alpha_p}\right) \otimes \underset{1}{\tilde{L}}\left(\underset{1}{\tilde{e}}^{\beta_1}\right) \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{L}}\left(\underset{q}{\tilde{e}}^{\beta_q}\right) =$$

$$= \overset{1}{L}{}' \overset{1}{L}{}''\left(\overset{1}{e}_{\alpha_1}\right) \otimes \ldots \otimes \overset{p}{L}{}' \overset{p}{L}{}''\left(\overset{p}{e}_{\alpha_p}\right) \otimes \underset{1}{\tilde{L}}{}' \underset{1}{\tilde{L}}{}''\left(\underset{1}{\tilde{e}}^{\beta_1}\right) \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{L}}{}' \underset{q}{\tilde{L}}{}''\left(\underset{q}{\tilde{e}}^{\beta_q}\right) =$$

$$= \widehat{L}'\widehat{L}''\left(\Psi^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\right). \tag{3.3.12}$$

Единичному оператору $E(n)$ соответствует единичный оператор:

$$\Pi(E(n)) = E\left(n^{p+q}\right). \tag{3.3.13}$$

Покажем теперь, что если U - унитарный оператор в $C(n)$, то и индуцированный оператор $\widehat{U} = \Pi U$ унитарен в $C(p,q)$.

Докажем равенство

$$\left(\widehat{U}T \middle| \widehat{U}S\right) = \left(T \middle| S\right) \tag{3.3.14}$$

для случая, когда T и S - базисные векторы (3.2.1) Согласно (3.3.3)

$$\widehat{U}T = \widehat{U}\Psi^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \overset{1}{U}\overset{1}{e}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \overset{p}{U}\overset{p}{e}_{\alpha_p} \otimes \underset{1}{\tilde{U}}\underset{1}{\tilde{e}}^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{U}}\underset{q}{\tilde{e}}^{\beta_q},$$

а

$$\widehat{U}S = \widehat{U}\Psi^{\tau_1\ldots\tau_q}_{\sigma_1\ldots\sigma_p} = \overset{1}{U}\overset{1}{e}_{\sigma_1} \otimes \ldots \otimes \overset{p}{U}\overset{p}{e}_{\sigma_p} \otimes \underset{1}{\tilde{U}}\underset{1}{\tilde{e}}^{\tau_1} \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{U}}\underset{q}{\tilde{e}}^{\tau_q}.$$

По определению скалярного произведения в $C(p,q)$ (см. (2.7.8), (3.1.3))

$$\left(\widehat{U}T\middle|\widehat{U}S\right)=\left(Ue_{\alpha_1}\middle|Ue_{\sigma_1}\right)\ldots\left(Ue_{\alpha_p}\middle|Ue_{\sigma_p}\right)\left(\widetilde{U}\widetilde{e}^{\beta_1}\middle|\widetilde{U}\widetilde{e}^{\tau_1}\right)\ldots\left(\widetilde{U}\widetilde{e}^{\beta_q}\middle|\widetilde{U}\widetilde{e}^{\tau_q}\right).$$

Учитывая, что оператор, дуальный U , унитарен в $\widetilde{C}(n)$, запишем:

$$\left(Ue_\alpha\middle|Ue_\sigma\right)=\left(e_\alpha\middle|e_\sigma\right),\qquad \left(\widetilde{U}\widetilde{e}^{\beta}\middle|\widetilde{U}\widetilde{e}^{\tau}\right)=\left(\widetilde{e}^{\beta}\middle|\widetilde{e}^{\tau}\right),$$

что доказывает (3.3.14).

§3.4. Тензор как закон преобразования

Ранее мы показали, что тензор $T(p,q)$ в произвольном базисе имеет координаты $T^{\gamma_1\ldots\gamma_q}_{\delta_1\ldots\delta_p}$:

$$T(p,q)=T^{\gamma_1\ldots\gamma_q}_{\delta_1\ldots\delta_p}\Psi^{\delta_1\ldots\delta_p}_{\gamma_1\ldots\gamma_q}. \tag{3.4.1}$$

Поскольку базис в $C(p,q)$ получен с помощью (см. §3.2) стандартного построения из заданного базиса $e_1,\ldots,e_n$ в $C(n)$, то можно считать, что система из n^{p+q} чисел $T^{\gamma_1\ldots\gamma_q}_{\delta_1\ldots\delta_p}$ однозначно соответствует выбранному базису $e_1,\ldots,e_n$ в $C(n)$.

Выберем теперь в $C(n)$ новый базис $e'_1,\ldots,e'_n$, а по нему построим в $C(p,q)$ новый базис

$$\Psi'^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=\overset{1}{e}'_{\alpha_1}\otimes\ldots\otimes\overset{p}{e}'_{\alpha_p}\otimes\underset{1}{\widetilde{e}}'^{\beta_1}\otimes\ldots\otimes\underset{q}{\widetilde{e}}'^{\beta_q}. \tag{3.4.2}$$

Разлагая тензор $T(p,q)$ (см. (3.4.1)) по базису (3.4.2), имеем

$$T(p,q)=T'^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\Psi'^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}. \tag{3.4.3}$$

Получим теперь базис $e_1,\ldots,e_n$ из базиса $e'_1,\ldots,e'_n$ действием некоторого унитарного оператора U в $C(n)$:

$$Ue_i' = e_i\,. \tag{3.4.4}$$

Тогда

$$e_i = U_i^{\,j} e_j'\,. \tag{3.4.5}$$

В силу (2.3.2), (2.3.4)

$$\tilde{e}^k = \left(U^{-1}\right)_j^k \tilde{e}'^{\,j}\,. \tag{3.4.6}$$

Подставляя (3.4.5) и (3.4.6) в (3.2.1), получим:

$$\Psi_{\gamma_1\ldots\gamma_p}^{\delta_1\ldots\delta_q} = U_{\gamma_1}^{\alpha_1}\ldots U_{\gamma_p}^{\alpha_p}\left(U^{-1}\right)_{\beta_1}^{\delta_1}\ldots\left(U^{-1}\right)_{\beta_q}^{\delta_q}\Psi'^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\,. \tag{3.4.7}$$

Подставляя правую часть (3.4.7) в (3.4.1) и сравнивая коэффициенты при соответствующих базисных векторах найдём выражения «новых» координат тензора $T(p,q)$ через «старые»:

$$T'^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} = U_{\gamma_1}^{\alpha_1}\ldots U_{\gamma_p}^{\alpha_p}\left(U^{-1}\right)_{\beta_1}^{\delta_1}\ldots\left(U^{-1}\right)_{\beta_q}^{\delta_q} T_{\delta_1\ldots\delta_q}^{\gamma_1\ldots\gamma_p}\,. \tag{3.4.8}$$

Полученное выражение имеет *формальное сходство* с (3.3.9), но смысл формул совершенно различен: (3.3.9) выражает координаты тензора T' через координаты в том же базисе *другого* тензора T, из которого T' получается действием оператора $\widehat{U}$, тогда как (3.4.8) выражает координаты тензора T в новом базисе через координаты *того же* тензора в старом базисе пространства $C(p,q)$.

Пусть теперь *каждому базису в* $C(n)$ *поставлена в соответствие некоторая система из* n^{p+q} *чисел* $T_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}$*, причём закон соответствия таков, что системы чисел, соответствующие разным базисам, связаны соотношением* (3.4.8).

Тогда существует один, и только один, тензор $T(p,q)$ из пространства $C(p,q)$, имеющий в каждом базисе координаты, равные заданным числам $T_{\beta_1\ldots\beta_q}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}$. Поэтому можно было бы определить тензор как закон соответствия $e \to T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q}$, обладающий свойством (3.4.8).

Такое определение тензора, выдвигает на передний план закон преобразования координат. Нам же в дальнейшем, например, при определении собственных значений операторов на пространстве тензоров $C(p,q)$, надо, прежде всего, представлять себе тензор как элемент векторного пространства $C(p,q)$.

§3.5. Тензор как полилинейная форма

Рассмотрим ещё один способ определения тензора основанный на следующем замечании. Пусть нам задан произвольный набор из p ковекторов и q векторов

$$\xi = \left(\underset{1}{\tilde{y}}, \ldots, \underset{p}{\tilde{y}}, \overset{1}{y}, \ldots, \overset{q}{y} \right). \tag{3.5.1}$$

Мы можем для тензора $T(p,q)$ (3.2.1) определить значение на ξ по формуле

$$T(\xi) = \sum_j \left\langle \underset{1}{\tilde{y}} \middle| \overset{1}{x}_j \right\rangle \ldots \left\langle \underset{p}{\tilde{y}} \middle| \overset{p}{x}_j \right\rangle \left\langle \underset{1}{\tilde{x}}{}^j \middle| \overset{1}{y} \right\rangle \ldots \left\langle \underset{q}{\tilde{x}}{}^j \middle| \overset{q}{y} \right\rangle. \tag{3.5.2}$$

Если закрепить все аргументы $\tilde{y}$, $\overset{k}{y}$ кроме одного, то получаем функцию с комплексными значениями от ковектора или вектора, и все такие функции *линейны*.

Пусть нам задана произвольная функция

$$T(\xi) = T\left(\underset{1}{\tilde{y}}, \ldots, \underset{p}{\tilde{y}}, \overset{1}{y}, \ldots, \overset{q}{y} \right) \tag{3.5.2}$$

от p ковекторов и q векторов, линейная по отношению к каждому аргументу при закреплённых остальных (такая функция называется *полилинейной*). Тогда, как можно показать, существует один, и только один, тензор $T(p,q)$, определяющий $T(\xi)$ по формуле (3.5.1) и можно было бы определить тензор как полилинейную функцию вида (3.5.2). Однако принятое в начале этой главы определение имеет то преимущество, что позволяет использовать алгебраические навыки работы с произведениями и суммами.

Кроме того, формулы вида (3.1.2) позволяют особенно наглядно описать приём составления сложных частиц из более простых.

§3.6. Умножение и свёртывание тензоров

Рассмотрим операции над тензорами, меняющие их валентность. Предположим, что нам заданы тензоры $T(p,q)$ и $T(r,s)$:

$$\left.\begin{aligned} T(p,q) &= \sum_j \overset{1}{x}_j \otimes \ldots \otimes \overset{p}{x}_j \otimes \underset{1}{\tilde{x}}^j \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{x}}^j, \\ T(r,s) &= \sum_k \overset{1}{y}_k \otimes \ldots \otimes \overset{r}{y}_k \otimes \underset{1}{\tilde{y}}^k \otimes \ldots \otimes \underset{s}{\tilde{y}}^k, \end{aligned}\right\} \tag{3.6.1}$$

где $\overset{i}{x}_j$ и $\overset{i}{y}_k$ - векторы пространства $C(n)$, а $\underset{i}{\tilde{x}}^j$ и $\underset{i}{\tilde{y}}^k$ - ковекторы дуального пространства $\tilde{C}(n)$. Поставим этим тензорам в соответствие тензор $T(p+r,q+s)$, называемый их *произведением*:

$$\begin{aligned} T(p+r,q+s) &= T(p,q) \otimes T(r,s) = \\ &= \sum_{j,k} \overset{1}{x}_j \otimes \ldots \otimes \overset{p}{x}_j \otimes \overset{1}{y}_k \otimes \ldots \otimes \overset{r}{y}_k \otimes \underset{1}{\tilde{x}}^j \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{x}}^j \otimes \underset{1}{\tilde{y}}^k \otimes \ldots \otimes \underset{s}{\tilde{y}}^k . \end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Заметим, что в отличие от сложения тензоров и умножения их на число, которые производятся *в одном и том же пространстве* тензоров данной валентности, умножение тензоров есть операция над тензорами из *разных пространств*. $T(p,q) \in C(p,q)$, $T(r,s) \in C(r,s)$, а их произведение $T(p+r,q+s) \in C(p+r,q+s)$. Отметим, что несмотря на то, что произведения $T(p,q) \otimes T(r,s)$ и $T(r,s) \otimes T(p,q)$ имеют одинаковую валентность, они, вообще говоря, различны, то есть *умножение тензоров не коммутативно*, при этом остаются справедливыми свойства ассоциативности и дистрибутивности:

$$\left.\begin{array}{l}(T_1 \otimes T_2) \otimes T_3 = T_1 \otimes (T_2 \otimes T_3), \\ T \otimes (T_1 + T_2) = T \otimes T_1 + T \otimes T_2, \\ (\lambda T_1) \otimes T_2 = T_1 \otimes \lambda T_2 = \lambda (T_1 \otimes T_2).\end{array}\right\} \tag{3.6.3}$$

В силу (3.6.2), пространство $C(p+r, q+s)$ есть тензорное (кронекерово) произведение пространств $C(p,q)$ и $C(r,s)$.

$$C(p+q, r+s) = C(p,q) \otimes C(r,s). \tag{3.6.4}$$

Разлагая сомножители по соответствующим базисам (3.2.1), получим выражение координат произведения через координаты сомножителей.

Если

$$T = T' \otimes T'',$$

то

$$T^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_p \alpha''_1 \ldots \alpha''_r}_{\beta'_1 \ldots \beta'_q \beta''_1 \ldots \beta''_s} = T'^{\alpha'_1 \ldots \alpha'_p}_{\beta'_1 \ldots \beta'_q} \cdot T''^{\alpha''_1 \ldots \alpha''_r}_{\beta''_1 \ldots \beta''_s}. \tag{3.6.5}$$

Определим теперь другую операцию, ставящую в соответствие каждому тензору $T(p,q)$ (см. (3.6.1)) тензор $T(p-1, q-1)$, в предположении, что $p \ge 1, q \ge 1$.

Фиксируем некоторые номера i,k, $1 \le i \le p$, $1 \le k \le q$, и положим

$$T(p-1, q-1) = Sp^i_k T(p,q) =$$

$$= \sum_j \left\langle \underset{k}{\tilde{x}}^j \middle| \overset{i}{x}_j \right\rangle \otimes \overset{1}{x}_j \otimes \ldots \otimes \overset{i-1}{x}_j \otimes \overset{i+1}{x}_j \otimes \ldots \otimes \overset{p}{x}_j \otimes$$

$$\otimes \underset{1}{\tilde{x}}^j \otimes \ldots \otimes \underset{k-1}{\tilde{x}}^j \otimes \underset{k+1}{\tilde{x}}^j \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{x}}^j. \tag{3.6.6}$$

Sp^i_k есть линейное отображение пространства $C(p,q)$ в пространство $C(p-1, q-1)$, поэтому для любого тензора

$$T(p,q) = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \cdot \Psi^{\beta_1 \ldots \beta_q}_{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$$

имеем

$$T(p-1,q-1) = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} Sp^i_k \overset{1}{e}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \overset{i}{e}_{\alpha_i} \otimes \ldots \otimes \overset{p}{e}_{\alpha_p} \otimes$$

$$\otimes \underset{1}{\tilde{e}}^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \underset{k}{\tilde{e}}^{\beta_k} \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{e}}^{\beta_q} =$$

$$= T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \delta^{\beta_k}_{\alpha_i} \overset{1}{e}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \overset{i-1}{e}_{\alpha_{i-1}} \otimes \overset{i+1}{e}_{\alpha_{i+1}} \otimes \ldots \otimes \overset{p}{e}_{\alpha_p} \otimes$$

$$\otimes \underset{1}{\tilde{e}}^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \underset{k-1}{\tilde{e}}^{\beta_{k-1}} \otimes \underset{k+1}{\tilde{e}}^{\beta_{k+1}} \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{e}}^{\beta_q} =$$

$$= T^{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \sigma \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_{k-1} \sigma \beta_{k+1} \ldots \beta_q} \overset{1}{e}_{\alpha_1} \otimes \ldots \otimes \overset{i-1}{e}_{\alpha_{i-1}} \otimes \overset{i+1}{e}_{\alpha_{i+1}} \otimes \ldots \otimes \overset{p}{e}_{\alpha_p} \otimes$$

$$\otimes \underset{1}{\tilde{e}}^{\beta_1} \otimes \ldots \otimes \underset{k-1}{\tilde{e}}^{\beta_{k-1}} \otimes \underset{k+1}{\tilde{e}}^{\beta_{k+1}} \otimes \ldots \otimes \underset{q}{\tilde{e}}^{\beta_q}, \qquad (3.6.7)$$

где в правой части производится суммирование по σ, согласно правилу Эйнштейна. Операция Sp^i_k называется *свёртыванием*.

Таким образом, координаты свёрнутого тензора $T' = T(p-1,q-1)$ выражаются через координаты исходного тензора $T(p,q)$ по формуле

$$T'^{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_{k-1} \beta_{k+1} \ldots \beta_q} = \delta^{\beta_k}_{\alpha_i} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_q} = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_{i-1} \sigma \alpha_{i+1} \ldots \alpha_p}_{\beta_1 \ldots \beta_{k-1} \sigma \beta_{k+1} \ldots \beta_q}. \qquad (3.6.8)$$

§3.7. Симметрические и антисимметрические тензоры

Рассмотрим тензор $T(p,0)$ вида

$$\sum_j \overset{1}{x}_j \otimes \overset{2}{x}_j \otimes \ldots \otimes \overset{p}{x}_j, \qquad (3.7.1)$$

где $\overset{i}{x}_j$ - векторы пространства $C(n)$.

Каждой подстановке p чисел

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \qquad (3.7.2)$$

соответствует операция над тензорами, сопоставляющая тензору $T(p,0)$ тензор

$$sT(p,0) = \sum_j \overset{k_1}{x}_j \otimes \overset{k_2}{x}_j \otimes \dots \otimes \overset{k_p}{x}_j\ , \qquad (3.7.3)$$

где k_i - число, расположенное над i в подстановке (3.7.2). Очевидно, что s есть линейный оператор на пространстве $C(p,0)$ и не зависит от способа записи тензора.

Установим связь координат тензоров T и sT, для чего разложим тензор T по базису (3.2.1) и применим оператор s к обеим частям полученного равенства. Чтобы сформулировать результат, введём следующее обозначение: пусть $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ - некоторая последовательность индексов (индексы, в отличие от координат, разделяются запятыми), $s(i)$- число, расположенное под i в подстановке (3.7.2). Обозначим через $s(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$ последовательность индексов $\alpha_{(s_1)},\alpha_{(s_2)},\dots,\alpha_{(s_p)}$. Таким образом, индексы меняются местами, но их состав в последовательности остаётся неизменным.

Пример 3.7.1.
Если

$$p = 3,\ s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

то $s(1,1,2) = 1,2,1$.

Мы расположили индексы 112 в соответствии с номерами нижней строки в s: то есть на первое место поставили второй индекс, на второе – третий, на третье – первый.

В этих обозначениях можно выразить *координаты* тензора sT через координаты тензора T с помощью формулы

$$(sT)^{\alpha_1 \ldots \alpha_p} = T^{s(\alpha_1 \ldots \alpha_p)}. \tag{3.7.4}$$

Будем называть тензор T *симметрическим*, если для любой подстановки s

$$sT = T. \tag{3.7.5}$$

В координатах (3.7.5) выражается равенством

$$T^{s(\alpha_1 \ldots \alpha_p)} = T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}, \tag{3.7.6}$$

откуда следует, что значение координаты тензора $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ зависит только от *состава* последовательности индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, но не от их порядка.

Симметрические тензоры удобно задавать с *помощью чисел заполнения*. Пусть последовательность $\alpha_1 \ldots \alpha_p$ содержит p_1 индексов, равных единице, p_2 индексов, равных 2, …, p_n индексов, равных n, тогда

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = p, \quad (0 \le p_i \le p), \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{3.7.7}$$

Теперь, общее значение всех координат симметрического тензора T, у которых p_1 индексов, равных единице, p_2 индексов, равных 2, …, p_n индексов, равных n, обозначается через $T^{p_1, \ldots, p_n}$:

$$T^{p_1, \ldots, p_n} = T^{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}. \tag{3.7.8}$$

Числа $T^{p_1, \ldots, p_n}$ называются *числами заполнения* тензора T.

С помощью чисел заполнения легко определить размерность $d_{p,n}$ пространства $Sym_n(p,0)$ всех симметрических тензоров валентности $(p,0)$ над пространством $C(n)$, которая равна числу чисел заполнения, необходимых для задания такого тензора, так как эти числа служат независимыми координатами в пространстве $Sym_n(p,0)$.

Нам надо найти число целочисленных решений уравнения (3.7.7). Эти решения можно наглядно представить с помощью расположения p шаров и $n-1$ перегородки: числам $p_1, p_2, ..., p_n$ удовлетворяющим (3.7.7), поставим в соответствие ряд предметов, состоящий из p_1 шаров $(p_1 \geq 0)$, затем одной перегородки; p_2 шаров и ещё одной перегородки и так далее. Наконец, p_{n-1} шаров, перегородки и p_n шаров. Всего мы при этом использовали $p+n-1$ предметов, и решений уравнения (3.7.7) столько, сколько есть способов расставить перегородки на $n-1$ место из $p+n-1$ возможных, таким образом,

$$d_{p,n} = C_{n-1+p}^{n-1}, \tag{3.7.9}$$

в частности, при $n=2$

$$d_{p,2} = n+1. \tag{3.7.10}$$

В таблице (3.7.1) приведены значения $d_{p,n}$ для n и p от 2 до 6.

Таблица 3.7.1

n \ p	2	3	4	5	6
2	3	4	5	6	7
3	6	10	15	21	28
4	10	20	35	56	84
5	15	35	70	126	210
6	21	56	126	252	462

§3.8. Бисимметрические тензоры

Тензор $T(p,q)$ называется *бисимметрическим*, если для любых подстановок

$$s=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & p\\ i_1 & i_2 & \dots & i_p\end{pmatrix},\qquad t=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & q\\ j_1 & j_2 & \dots & j_q\end{pmatrix} \tag{3.8.1}$$

координаты $T(p,q)$ удовлетворяют равенству

$$T_{t(\beta_1\dots\beta_q)}^{s(\alpha_1\dots\alpha_p)}=T_{\beta_1\dots\beta_q}^{\alpha_1\dots\alpha_p}. \tag{3.8.2}$$

Бисимметрические тензоры можно задать числами заполнения

$$T_{q_1,\dots,q_n}^{p_1,\dots,p_n}, \tag{3.8.3}$$

где p_1 - число верхних индексов, равных единице, …, q_n - число нижних индексов, равных n.

Размерность пространства таких тензоров равна

$$d_{p,n}\cdot d_{q,n}=C_{n-1+p}^{n-1}\cdot C_{n-1+q}^{n-1}. \tag{3.8.4}$$

Если компоненты тензора симметричны в одном базисе, то такая же симметрия будет иметь место и в любом другом базисе.

§3.9. Антисимметрические тензоры

Тензор $T(p,0)$ вида (3.7.1), называется антисимметрическим, если для любой подстановки s

$$sT(p,0)=Sgns\cdot T(p,0), \tag{3.9.1}$$

где $Sgns$ 1 для чётной подстановки s и –1 для нечётной, то есть координаты тензора меняют знак при перестановке любых двух индексов.

Если в наборе индексов некоторой координаты есть два равных индекса, то эта координата равна нулю.

Все антисимметрические тензоры типа $T(p,0)$ над пространством $C(n)$ образуют пространство, которое мы обозначим через

$Asym_n(p,0)$. Размерность этого пространства $\bar{d}_{p,n}$ равна числу независимых координат, задающих принадлежащий ему тензор. Такие наборы не должны содержать повторяющихся чисел, порядок индексов в таком наборе при подсчёте *независимых координат* не учитывается:

$$\bar{d}_{p,n} = C_n^p, \quad (p \le n). \tag{3.9.2}$$

При $p > n$ не существует ненулевых антисимметрических тензоров $T(p,0)$ над $C(n)$.

§3.10. Операторы симметризации

Построение симметрических и антисимметрических тензоров можно описать геометрически с помощью *оператора симметризации*

$$\mathbf{S} = \frac{1}{s!}\sum_s s \tag{3.10.1}$$

и *оператора антисимметризации*

$$\mathbf{A} = \frac{1}{s!}\sum_s (-1)^{Sgns} s, \tag{3.10.2}$$

где $Sgns$ равна 1 или –1 в зависимости от того, чётна или нечётна подстановка s, а суммирование производится по всем подстановкам чисел $(1,2,\ldots,n)$.

Нетрудно показать, что операторы s *унитарны*, а операторы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{A}$ - эрмитовы, при этом

$$\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}, \qquad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}. \tag{3.10.3}$$

согласно (1.13.12), операторы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{A}$ *являются операторами проектирования*, которые проектируют пространство $C(p,0)$ на подпространство всех симметрических (антисимметрических) тензоров. При этом симметрическими будут тензоры *инвариантные* по отношению к оператору $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S}T = T, \tag{3.10.4}$$

а антисимметрическими

$$\mathbf{A}T = T. \tag{3.10.5}$$