Глава IV
Группы и их свойства

В этой главе мы рассмотрим понятие группы[1], представление группы операторов G группой $(n\times n)$ матриц с комплексными элементами, определим группу $GL(n,C)$ всех обратимых операторов в пространстве $C(n)$, дадим определение дискретных и непрерывных групп (групп Ли), рассмотрим классификацию групп Ли, имеющих принципиальное значение в геометрии и теоретической физике. Рассмотрим прямое произведение групп, сопряженные элементы и классы.

§4.1. Определение групп

Система операторов G в $C(n)$ (n произвольно, но фиксировано) называется *группой*, если G обладает следующими свойствами:

1. Произведение двух операторов из G есть снова оператор из G.

2. Тождественный (единичный) оператор $E(n)$ принадлежит G.

3. Для каждого оператора U из G существует обратный оператор U^{-1}, и этот обратный оператор принадлежит G.

Оператор U, имеющий обратный, называется *обратимым*. Если оператор U имеет обратный оператор, то этот последний определяется

[1] Теория групп, одна из старейших и богатейших по результатам областей алгебры, играет фундаментальную роль в геометрии и в приложениях математики к вопросам естествознания. Термин «группа» введён французским математиком Э.Галуа (1811-1832) - создателем теории групп.

единственным образом. В самом деле, если U имеет обратный оператор U^{-1}, то

$$U^{-1}U = E(n), \tag{4.1.1}$$

или, что то же:
если

$$Ux = y\text{, то } U^{-1}y = x, \tag{4.1.2}$$

что однозначно определяет обратный оператор. Для обратного оператора справедливо равенство

$$UU^{-1} = E(n), \tag{4.1.3}$$

или, что то же:
если

$$U^{-1}y = x\text{, то } Ux = y. \tag{4.1.4}$$

нетрудно показать, что

$$(UV)(V^{-1}U^{-1}) = U(VV^{-1})U^{-1} = UE(n)U^{-1} = UU^{-1} = E(n),$$

откуда следует важное правило обращения произведения:

$$(UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1}. \tag{4.1.5}$$

Вообще говоря, произведение операторов не коммутативно: $UV \neq VU$. Если $UV = VU$, то говорят, что операторы U и V *коммутируют*.

Для любого оператора U будет $E(n)U = UE(n)$, то есть $E(n)$ коммутирует со всеми операторами; кратное тождественного оператора $\lambda E(n)$ при любом комплексном λ коммутирует со всеми операторами в $C(n)$ и никакой другой оператор, кроме $\lambda E(n)$, не обладает таким свойством. Оператор U всегда коммутирует с U^{-1} (см. (4.1.1), (4.1.3)).

Если все операторы группы G коммутируют друг с другом, то G называется ***коммутативной*** *или* ***абелевой*** *группой.*

Если группа H состоит из подмножества группы G, то H называется *подгруппой* G. Для того, чтобы убедиться в том, что подмножество H группы G является её подгруппой, надо прежде всего проверить, что произведение (сумма) любых двух элементов из H принадлежит H и что если $U \in H$, то и $U^{-1} \in H$.

Пусть дана группа G и $U \in G$. Рассмотрим всевозможные степени (положительные и отрицательные) элемента U:

$$..., U^{-2}, U^{-1}, U^0 = E, U, U^2, U^3, ...,$$

где через E мы обозначим единичный элемент группы G.

Эти степени образуют подгруппу – *циклическую подгруппу, порождённую элементом* U. Здесь возможны два случая: либо все степени элемента U различны, либо среди них имеются одинаковые. Предположим, что $U^m = U^l$ и $m > l$. Тогда $U^{m-l} = E$. Обозначим через k наименьшую положительную степень, такую что $U^k = E$. Тогда, для того чтобы имело место равенство $U^n = E$, необходимо и достаточно, чтобы n делилось на k. В самом деле, если $n = ks$, то $U^n = \left(U^k\right)^s = E$. С другой стороны, если $U^n = E$ и $n = kp + q$, $0 \le q < k$, то, так как $U^n = U^{kp}U^q = U^q = E$,а k - наименьшая положительная степень, в которой $U^k = E$, $q = 0$, и n делится на k. Элемент U называется элементом k-го порядка. Если все степени элемента U различны, он называется элементом *бесконечного порядка.*

Каждая группа имеет подгруппу состоящую из единичного элемента и каждая группа сама является своей подгруппой. Подгруппа коммутативной группы всегда будет коммутативной.

С физической точки зрения подгруппы важны в теории возмущений. Когда на систему, симметрия которой соответствует группе G, действует возмущение, которое не подчиняется всем симметрическим операциям группы G, но сохраняет более низкую симметрию, соответствующую некой подгруппе H группы G.

Всё сказанное выше справедливо для группы операторов в гильбертовом пространстве.

§4.2. Группы в матричной форме

Выберем в $C(n)$ некоторый базис $e_1,\dots,e_n$, тогда каждому оператору U можно сопоставить изображающую его матрицу (см. §1.11). Смысл матричного изображения операторов состоит в том, что уравнение

$$Ux = y$$

записывается в координатах в виде

$$y^i = U^i_j x^j .$$

При этом произведение операторов изображается в базисе $e_1,\dots,e_n$ матрицей, полученной умножением в том же порядке матриц, изображающих сомножители:

$$(UV)_e = U_e V_e . \qquad (4.2.1)$$

Так как различные операторы изображаются разными матрицами, можно заменить каждый оператор группы G его матрицей; тождественный оператор, заменяется при этом единичной матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad (4.2.2)$$

обратные операторы – обратными матрицами; таким образом, вместо *группы операторов* G мы можем рассматривать соответствующую ей *группу* $(n \times n)$ *матриц* с комплексными элементами.

Не следует, однако, забывать, что в другом базисе $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ операторы из G будут изображаться другими матрицами, и замена «операторной группы» «матричной группой» возможно лишь в построениях, с использованием фиксированного базиса.

Матричное изображение даёт возможность ввести в группах *независимые операторы*.

Все обратимые операторы в $C(n)$ образуют группу; произведение обратимых операторов UV имеет обратный оператор $V^{-1}U^{-1}$ (см. (4.1.5)), который также обратим, так как $\left(V^{-1}U^{-1}\right)^{-1}=UV$; тождественный оператор $E(n)$ обратим $(E(n))^{-1}=E(n)$; каждый обратимый оператор U имеет обратный U^{-1}, который обратим $\left(U^{-1}\right)^{-1}=U$.

Обозначим *группу всех обратимых операторов* в $C(n)$ через $GL(n,C)$. Все группы операторов в $C(n)$ являются подгруппами $GL(n,C)$. Изобразим $GL(n,C)$ матрицами, как указано выше, тогда $GL(n,C)$ будет состоять из всех комплексных n - рядных обратимых матриц, то есть матриц с ненулевым определителем.

§4.3. Дискретные и непрерывные группы

По определению, любая группа G есть подгруппа $GL(n,C)$ при некотором n . Группы делятся на два основных класса – дискретные и непрерывные.

Пусть U - оператор из $GL(n,C)$. Выберем базис $e_1,...,e_n$ в $C(n)$; тогда U имеет в этом базисе матрицу U_e . Для любого положительного числа ε множество всех операторов V , все матричные элементы которых удовлетворяют неравенствам

$$\left|(V_e)_i^j-(U_e)_i^j\right|<\varepsilon, \qquad (4.3.1)$$

образуют ε -*окрестность* оператора U .

Если каждый оператор U из группы G имеет ε - окрестность, не содержащую других операторов из G , то группа G называется *дискретной*; а ε - окрестность может быть для каждого U выбрана отдельно.

Можно сказать, что операторы дискретной группы расположены в $GL(n,C)$ изолированно. Операторы дискретной группы можно занумеровать конечным числом натуральных чисел или всем рядом натуральных чисел. В первом случае мы получим *конечную* группу, во втором – *бесконечную*.

Группа G называется *непрерывной (топологической) группой*, или *группой Ли*[1], если каждый оператор U имеет ε - окрестность, обладающую следующими свойствами:

Существует n^2 функций k переменных

$$U_i^j(t_1,...,t_k), \tag{4.3.2}$$

определённых и непрерывных в кубе

$$|t_i| < \varepsilon, \qquad i = 1,2,...,k, \tag{4.3.3}$$

таких, что матрицы $U_i^j(t_1,...,t_k)$ задают в выбранном базисе $e_1,...,e_n$ всевозможные операторы из ε - окрестности оператора U, принадлежащие G, причём различным наборам (t_i) соответствуют различные операторы. Система функций (4.3.2) называется *параметризацией* группы в окрестности оператора U, число k называется *размерностью* группы, а G называется k - *мерной* (или k - метрической) группой Ли. Функции (4.3.2) всегда можно выбрать *аналитическими* (а не только непрерывными).

Каждая группа Ли может быть задана с помощью алгебраических соотношений, наложенных на коэффициенты матриц U_e; для k - мерной группы надо связать действительные и мнимые части матричных элементов $(U_e)_i^j$ посредством $2n^2 - k$ независимых алгебраических уравнений с действительными коэффициентами.

Каждой непрерывной (топологической) группе мы можем сопоставить соответствующее пространство, которое будем, так же называть *топологическим*. Если это топологическое пространство будет *компактным*, то и соответствующую группу будем называть *компактной*.

Проиллюстрируем эти определения на простых примерах. Действительная числовая прямая представляет собой некомпактное топологи-

[1] Софус Ли (1842-1899) норвежский математик.

ческое пространство, так как существует бесконечная последовательность точек, которая не содержит ни одной сходящейся последовательности. С другой стороны действительную числовую прямую можно представить как коммутативную некомпактную группу. Группа поворотов вокруг фиксированной оси компактна, так как каждый поворот характеризуется углом φ, значение которого лежит в интервале $0 \le \varphi \le 2\pi$, то есть в компактном множестве. Группа вращений в трёхмерном евклидовом пространстве так же компактна, так как каждое вращение характеризуется тремя вещественными числами, в качестве которых могут служить углы Эйлера, рассматриваемые как координаты точек в ограниченном множестве трёхмерного пространства – компактном множестве. В качестве примера некомпактной группы рассмотрим группу Лоренца. Рассмотрим гиперболоид

$$x^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 1.$$

В преобразовании Лоренца каждая точка этого гиперболоида переходит в его другую точку, причём для любой пары точек одной полы гиперболоида существует преобразование Лоренца, переводящее одну точку в другую. Выберем на фиксированной поле последовательность точек $x_1, x_2, \ldots$, уходящую в бесконечность. Пусть λ_n преобразование Лоренца, переводящее вершину x_0 данной полы в точку $x_n, n = 1,2,\ldots$ Мы получили бесконечную последовательность преобразований Лоренца и поскольку последовательность точек x_n не содержит сходящейся последовательности, то из последовательности преобразований Лоренца нельзя выделить сходящуюся последовательность.

Отметим одну особенность компактных групп. Пусть задана некоторая ограниченная функция на группе $f(g)$, $g \in G$ и пусть существует интеграл этой функции по всей группе

$$J = \int_G f(g)dg .$$

Если для всех $g_0 \in G$ выполняется равенство

$$J = \int_G f(g)dg = \int_G f(g_0 g)dg = \int_G f(g g_0)dg , \qquad (4.3.4)$$

мы будем говорить, что на группе G установлено *инвариантное интегрирование*. В качестве простого примера рассмотрим группу поворотов вокруг фиксированной оси. Каждый элемент группы характеризуется вещественным числом φ - углом поворота, причём углы φ и $\varphi + 2\pi$ соответствуют одному и тому же повороту. Каждая функция на группе будет тогда периодической функцией φ с периодом 2π . Если g_0 и g - повороты на углы φ_0 и φ соответственно, то $g_0 g$ является вращением на угол $\varphi_0 + \varphi$.

В данном случае равенство (4.3.4) означает, что

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} f(\varphi + \varphi_0) d\varphi .$$

Так как $f(\varphi)$- ограниченная периодическая функция с периодом 2π , то это равенство выполняется автоматически. Таким образом, для данного случая инвариантным интегрированием является обычное интегрирование по углу поворота φ от 0 до 2π .

Можно показать, что для группы трёхмерных вращений инвариантный интеграл по группе определяется формулой

$$\int f(g) dg = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\Omega \int_0^{2\pi} f(\varphi, \theta, \Omega) \sin\theta d\theta ,$$

где φ, Ω, θ - *углы Эйлера*.

Отметим, *что если группа* G *компактна, то инвариантный интеграл* (4.3.4) *существует для любой ограниченной функции на группе. Для некомпактной группы такого инвариантного интеграла ограниченной функции на группе не существует*. Можно показать, что *из существования инвариантного интегрирования на группе вытекает унитарность представления компактных групп*.

§4.4. Гомоморфизм, изоморфизм и автоморфизм групп

Предположим, что нам заданы две группы G_1 и G_2. Если существует соответствие между элементами групп G_1 и G_2, мы будем говорить, что имеется отображение одной группы в другую.

Если для каждого элемента $U_1 \in G_1$ существует единственный элемент $U_2 \in G_2$, который мы обозначим как $\varphi(U_1)$, $U_2 = \varphi(U_1)$, то мы можем говорить, что существует однозначное отображение φ группы G_1 в группу G_2

$$\varphi : G_1 \to G_2 . \qquad (4.4.1)$$

Это однозначное отображение φ назовём *гомоморфным* отображением, или *гомоморфизмом* группы G_1 в группу G_2, если оно сохраняет групповую операцию умножения, то есть для любых U, V из G_1 удовлетворяет условию

$$\varphi(UV) = \varphi(U) \cdot \varphi(V), \qquad (4.4.2)$$

Группы G_1 и G_2 называются *гомоморфными* группами.

Взаимно однозначное гомоморфное отображение (4.4.1) одной группы в другую называется *изоморфным* отображением или *изоморфизмом*, а сами группы *изоморфными*.

Единичный оператор φ переводит в единичный оператор, а обратный в обратный:

$$\varphi(E(n)) = E(n), \qquad (4.4.3)$$

$$\varphi(U^{-1}) = [\varphi(U)]^{-1} . \qquad (4.4.4)$$

Так как при изучении групп нас интересуют лишь групповые свойства элементов, все изоморфные группы можно считать одинаковыми. Можно показать, что все группы второго порядка (а также все группы третьего порядка) изоморфны между собой. Для групп четвёртого порядка это правило уже не выполняется (существуют две неизоморфные группы: например, группа вращений квадрата C_4 и группа симметрии ромба V). Можно также показать, что циклическая группа порядка n изоморфна группе вращений правильного n - угольника и все циклические группы одного порядка изоморфны между собой.

Изоморфизм группы G в себя называется *автоморфизмом*. Одним из примеров автоморфизма является отображение вида

$$U = \varphi_V(U) = VUV^{-1}, \qquad (4.4.5)$$

где V - некоторый элемент группы G . Это так называемый *внутренний* автоморфизм.

Рассмотрим гомоморфизм группы G_1 в группу G_2

$$\varphi : U_1 \to U_2 = \varphi(U_1).$$

Совокупность всех элементов $\varphi(U_1)$, где $U_1 \in G_1$, называется *образом* группы G_1 при гомоморфизме φ . Этот образ представляет собой, вообще говоря, некоторую подгруппу H_2 группы G_2 , причём единичным элементом всей подгруппы H_2 , то есть единичным элементом $E(n_2)$ группы G_2 , является образ единичного элемента $E(n_1)$ группы G_1

$$\varphi(E(n_1)) = E(n_2).$$

Пусть K множество всех элементов U_1 группы G_1 , превращающихся в единичный элемент $E(n_2)$ группы G_2 при гомоморфизме φ

$$\varphi(U_1) = E(n_2); \;\; U_1 \in K .$$

Это множество называется *ядром* гомоморфизма φ . Можно показать, что множество элементов K является *инвариантной* подгруппой группы G_1 . Действительно, если $U_1 \in K$ и U_1 - любой элемент из группы G_1 , то

$$\varphi(U_1V_1U_1^{-1}) = \varphi(U_1)\varphi(V_1)\varphi(U_1^{-1}) =$$
$$= \varphi(U_1)E(n_2)\varphi(U_1^{-1}) = E(n_2).$$

Это означает, что $U_1 V_1 U_1^{-1} \in K$, то есть K - инвариантная подгруппа.

§4.5. Примеры групп

1. Два числа 1 и –1 образуют группу. Единичный элемент – это 1. Элемент обратный единице – 1, элемент «-1», обратен сам себе. Составим таблицу умножения элементов (таблицу Кэли) данной группы:

Таблица 4.5.1.

$G_a \backslash G_b$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

2. Набор чисел $1, -1, i, -i$, так же образует группу.

Таблица 4.5.2.

$G_a \backslash G_b$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

В рассматриваемой группе элементы 1 и –1, очевидно, составляют подгруппу.

Обе рассмотренные группы абелевы, так как мы применяли обычный закон умножения.

При изучении симметрии физических систем важную роль играет их поведение при поворотах. Разнообразные наборы вращений образуют группы. Закон умножения при этом таков: если поворот R_1 переводит систему из положения А в положение В, а поворот R_2 - из положения В в положение С, то произведению R_1R_2 переводит систему из А в С. Здесь мы имеем пример не абелевой группы, так как в общем случае $R_1R_2 \neq R_2R_1$.

3. Пусть E - тождественная операция (поворот на нулевой угол), а R - поворот на угол π вокруг оси z (поворотом на положительный угол относительно направленной оси, мы будем считать поворот, соответствующий вращению правого винта, то есть вращению по часовой стрелке, если смотреть вдоль оси в её положительном направлении).

Составим таблицу умножения:

Таблица 4.5.3.

$G_a \backslash G_b$	E	R
E	E	R
R	R	E

Группу с таблицей умножения 4.5.3 обозначают через C_2. Взаимно однозначное соответствие $1 \leftrightarrow E$ и $-1 \leftrightarrow R$ указывают на изоморфизм группы из примера 1 и группы C_2 данного примера.

4. Пусть операция изменяющая направление вектора на обратный – оператор инверсии есть I. Тогда $I^2 = E$ (тождественная операция). Операции I и E образуют группу, называемую группой S_2.

Таблица 4.5.4.

$G_a \backslash G_b$	E	I
E	E	I
I	I	E

5. Пусть R_1 и R_2 повороты вокруг оси z на $\frac{2}{3}\pi$ и $\frac{4}{3}\pi$. Тогда операции E, R_1, R_2 образуют так называемую группу C_3, с таблицей умножения:

Таблица 4.5.5.

$G_a \backslash G_b$	E	R_1	R_2
E	E	R_1	R_2
R_1	R_1	R_2	E
R_2	R_2	E	R_1

6. Добавим к группе C_3 операции R_3, R_4 и R_5 - повороты на угол π вокруг каждой из осей, лежащих в плоскости xy (рис. 4.5.1). Такая группа D_3 с геометрической точки зрения есть группа вращений равностороннего треугольника, приводящих его в положение, неотличимое от исходного. Такое преобразование геометрической фигуры называют операцией «собственного совмещения». Если допускаются отражения, то говорят о «несобственном совмещении».

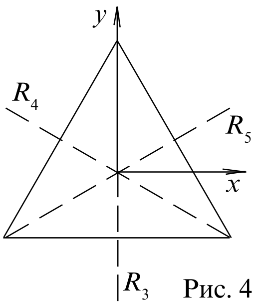

Рис. 4.5.1

Составим таблицу умножения группы D_3:

Таблица 4.5.6.

$G_a \backslash G_b$	E	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
E	E	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
R_1	R_1	R_2	E	R_4	R_5	R_3
R_2	R_2	E	R_1	R_5	R_3	R_4
R_3	R_3	R_5	R_4	E	R_2	R_1
R_4	R_4	R_3	R_5	R_1	E	R_2
R_5	R_5	R_4	R_3	R_2	R_1	E

Группа D_3 содержит несколько подгрупп. Это циклическая группа C_3, образованная элементами E, R_1, R_2, а также три группы из двух элементов: E, R_3; E, R_4 и E, R_5, каждая из которых изоморфна группе C_2, примера 3.

7. Если в приведенном в п.6 примере добавить операцию отражения в плоскости треугольника σ_h, то мы получим ряд новых элементов $R_1\sigma_h, R_2\sigma_h, ..., R_5\sigma_h$. Геометрически, например, $R_3\sigma_h$ означает отражение в вертикальной плоскости, в которой лежит ось R_3 и так далее.

Набор из 12 элементов

$$E, R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, \sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5,$$

где $\sigma_i = R_i\sigma_h$, образует группу D_{3h} (содержащую в себе группу D_3). Элементы типа $R_i\sigma_h$, содержащие вращения в сочетании с отражениями в плоскости, перпендикулярной оси вращения, называются зеркально-поворотными.

8. Совокупность всех вращений относительно заданной оси образует непрерывную группу $\Re_2$. Её элементы обозначаются символами $R(a)$, где a - угол поворота, $0 \le a \le 2\pi$. В этом случае мы имеем бесконечную таблицу умножения. Из геометрических соображений следует, что

$$R(a)R(b) = R(a+b), \tag{4.5.1}$$

причём

$$R(a+2\pi) = R(a). \tag{4.5.2}$$

Элементы $\Re_2$ коммутируют и для обратного элемента, мы можем написать:

$$R^{-1}(a) = R(2\pi - a). \tag{4.5.3}$$

Группу $\mathfrak{R}_2$ в соответствии с обозначениями, приведёнными в §4.6 можно обозначить как $SO(2)$.

9. Если мы возьмём набор всевозможных вращений вокруг трёх осей, проходящих через заданную точку, мы получим группу $\mathfrak{R}_3$ ($SO(3)$), состоящую из совокупности собственных операций совмещения сферы, которую более подробно мы рассмотрим далее.

Обычный способ параметризации включает задание двух полярных углов, фиксирующих ось вращения, и угла поворота относительно этой оси.

Очевидно, что группа $\mathfrak{R}_2$ предыдущего примера, есть подгруппа $\mathfrak{R}_3$.

10. Набор всех перестановок S из n объектов образует «симметрическую группу» $\mathfrak{I}_n$. Произведение двух перестановок, по определению, есть такая перестановка, которая прямо переводит исходное расположение в конечное.

Перестановка

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}, \tag{4.5.4}$$

указывает, что элемент i заменяется элементом p_i, то есть числа $p_1,\dots,p_n$ есть переставленные $n!$ способами числа $1,\dots,n$.

Элемент, обратный S, имеет вид

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{4.5.5}$$

Составим таблицу перестановок для $\mathfrak{I}_3$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ S_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ S_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = S_4.$$

Здесь мы переставили столбцы в S_1 так, чтобы верхняя строка матрицы S_1 совпала с нижней строкой матрицы S_2. Мы можем написать следующее общее соотношение:

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}, \quad (4.5.6)$$

которое является фактическим определением умножения двух перестановок. Используя (4.5.6) мы можем составить таблицу умножения для $\mathfrak{J}_3$.

Таблица 4.5.10.

$G_a \backslash G_b$	E	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
E	E	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
S_1	S_1	E	S_4	S_5	S_2	S_3
S_2	S_2	S_5	E	S_4	S_3	S_1
S_3	S_3	S_4	S_5	E	S_1	S_2
S_4	S_4	S_3	S_1	S_2	S_5	E
S_5	S_5	S_2	S_3	S_1	E	S_4

Рассмотренная в данном примере группа имеет ту же структуру, что и изоморфная ей группа D_3, и, следовательно, содержит те же самые подгруппы.

11. Группы Лоренца и Пуанкаре. В вещественном четырёхмерном пространстве Минковского со скалярным произведением

$$(x, y) = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} y^{\beta} \ , \tag{4.5.6}$$

где

$$G = (g_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{4.5.7}$$

и нормой $|x|$, определяемой соотношением

$$|x|^2 = (x, x) = g_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta}, \tag{4.5.8}$$

линейные преобразования

$$x_{\alpha} \to x'_{\alpha} = \lambda_{\alpha\beta} x^{\beta} \ , \tag{4.5.9}$$

сохраняющие норму (4.5.8) и, следовательно, скалярное произведение (4.5.6), образуют группу, называемую *однородной группой Лоренца*.

Рассмотрим более общее преобразование пространства Минковского:

$$x_{\alpha} \to x'_{\alpha} = a_{\alpha} + \lambda_{\alpha\beta} x^{\beta} \quad . \tag{4.5.10}$$

Каждое такое преобразование, обозначаемое $\{a, \lambda\}$, есть комбинация однородного преобразования Лоренца (4.5.9) и преобразования трансляции

$$x_{\alpha} \to x'_{\alpha} = x_{\alpha} + a_{\alpha} \ . \tag{4.5.11}$$

Эти преобразования образуют так называемую *неоднородную группу Лоренца*, или *группу Пуанкаре*. Можно показать, что групповая операция для этой группы даётся правилом

$$\{a_1, \lambda_1\}\{a_2, \lambda_2\} = \{a_1 + \lambda_1 a_2, \lambda_1 \lambda_2\}, \tag{4.5.12}$$

а обратный преобразованию $\{a, \lambda\}$ элемент равен

$$\{a, \lambda\}^{-1} = \{-\lambda^{-1} a, \lambda^{-1}\}. \tag{4.5.13}$$

В дальнейшем, группам Лоренца и Пуанкаре будет посвящена отдельная глава.

§4.6. Группы Ли

1. ***Полная линейная группа*** $GL(n,C)$. Состоит из всех обратимых операторов в $C(n)$, или (в матричном изображении) из всех комплексных обратимых n - рядных матриц, и имеет размерность $2n^2$. $GL(n,C)$ допускает умножение на комплексные числа, не равные нулю.

2. ***Действительная линейная группа*** $GL(n,R)$ состоит (в матричном изображении) из всех n - рядных обратимых матриц с действительными элементами. Для выделения таких матриц в $GL(n,C)$, надо приравнять нулю мнимые части всех n^2 элементов, что даёт n^2 независимых соотношений. Таким образом, размерность $GL(n,R)$ равна n^2. $GL(n,R)$ допускает умножение на не равные нулю действительные числа.

3. ***Специальная линейная, или унимодулярная, группа*** $SL(n,C)$ есть подгруппа $GL(n,C)$, состоящая из всех операторов с определителем равным единице, или, в матричном изображении, из всех матриц с определителем 1. Так как

$$\left.\begin{aligned} &det(UV) = det\,U \cdot det\,V, \\ &det\,E(n) = 1, \\ &det(U^{-1}) = (det\,U)^{-1}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.6.1)$$

то такие операторы образуют группу. $SL(n,C)$ выделяется соотношением

$$det\left|U_i^{\,j}\right| = 1, \qquad (4.6.2)$$

равносильным двум действительным соотношениям:

$$Re\,det\left|U_i^{\,j}\right| = 1, \qquad Im\,det\left|U_i^{\,j}\right| = 0. \qquad (4.6.3)$$

Таким образом, размерность $SL(n,C)$ равна $2n^2 - 2$. $SL(n,C)$ допускает умножение только на число 1.

4. ***Специальная действительная линейная группа*** $SL(n,R)$ есть подгруппа $GL(n,R)$, состоящая из матриц с определителем равным единице. $SL(n,R)$ есть группа размерности $n^2 - 1$, допускающая умножение только на число 1.

5. ***Унитарная группа*** $U(n)$ есть подгруппа $GL(n,C)$, состоящая из всех унитарных операторов, (в матричном изображении) из всех унитарных матриц. Так как унитарный оператор сохраняет скалярные произведения, то из соотношений

$$\left.\begin{aligned}&(UVx|UVy)=(Vx|Vy)=(x|y),\\&(E(n)x|E(n)y)=(x|y),\\&(U^{-1}x|U^{-1}y)=(UU^{-1}x|y)=(E(n)x|y)=(x|y)\end{aligned}\right\}\tag{4.6.4}$$

видно, что унитарные операторы образуют группу.

Для подсчёта размерности воспользуемся матричным изображением и равенствами (1.13.6), характеризующими унитарные матрицы. Тогда равенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left|U_i^j\right|^2=1\tag{4.6.5}$$

представляет *одно* соотношение, наложенное на действительные и мнимые части элементов U_i^j:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(ReU_i^j\right)^2+\left(ImU_i^j\right)^2\right]=1;\tag{4.6.6}$$

таких соотношений всего n $(j=1,2,\ldots,n)$.

Равенство вида

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{U}_i^jU_i^k=0,\qquad (j\neq k)\tag{4.6.7}$$

представляет *два* соотношения, наложенных на действительные и мнимые части U_i^j:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(ReU_i^j\, ReU_i^k + ImU_i^j\, ImU_i^k\right)=0,\\ \sum_{i=1}^{n}\left(ReU_i^j\, ImU_i^k - ImU_i^j\, ReU_i^k\right)=0.\end{aligned}\right\} \qquad (4.6.8)$$

Таких соотношений будет всего $2\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Таким образом, размерность $U(n)$ равна

$2n^2 - n - n(n-1) = n^2$.

$U(n)$ допускает умножение на комплексные числа, по модулю равные единице (то есть числа вида $e^{i\alpha}$, где α действительное число):

$$\left(e^{i\alpha}Ux \middle| e^{i\alpha}Uy\right) = e^{-i\alpha}e^{i\alpha}\left(Ux \middle| Uy\right) = \left(x \middle| y\right). \qquad (4.6.9)$$

В частности, операторы вида $e^{i\alpha}E(n)$ унитарны; они называются *градиентными преобразованиями* пространства $C(n)$. Геометрический смысл унитарных операторов заключён в их определении: это – *вращения в комплексном евклидовом пространстве* $C(n)$.

6. ***Ортогональная группа*** $O(n)$ есть подгруппа $U(n)$, состоящая из действительных матриц (действительные унитарные матрицы называются *ортогональными*). Для таких матриц равенства (4.6.5) дают n соотношений, а равенства (4.6.7) $\dfrac{n(n-1)}{2}$ соотношений между действительными элементами матриц; итак, размерность $O(n)$ есть $n^2 - n - \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$. $O(n)$ допускает умножение на числа ± 1.

Геометрический смысл операторов из $O(n)$ таков: это – вращения (собственные и несобственные) действительного евклидового пространства.

7. ***Специальная унитарная группа*** $SU(n)$ есть группа всех унитарных унимодулярных операторов в $C(n)$, то есть общая часть (пересечение) подгрупп $SL(n,C)$ и $U(n)$. Чтобы получить эту подгруппу, надо (в матричном изображении), кроме $n+n(n-1)$ соотношений, выражающих унитарность, наложить ещё условие унимодулярности: $det\left|U_i^j\right|=1$.

Условие унимодулярности не является независимым от уже наложенных ранее условий унимодулярности: из этих последних вытекает, что $\left|det\left|U_i^j\right|\right|=1$, так что условие унимодулярности фиксирует лишь аргумент определителя. Таким образом, здесь добавляется *одно* новое условие.

Размерность $SU(n)$ равна

$$2n^2-n(n-1)-n-1=n^2-1.$$

$SU(n)$ допускает умножение только на число 1. Группы $SU(n)$ играют центральную роль в теории элементарных частиц.

8. ***Специальная ортогональная группа*** $SO(n)$ есть пересечение подгрупп $O(n)$ и $SL(n,C)$. К соотношениям, выделяющим $O(n)$, добавляется соотношение унимодулярности $det\left|O_i^j\right|=1$. Каждая ортогональная матрица имеет определитель, равный ±1; в самом деле,

$$det\,O\cdot det\,O^{-1}=det\,E(n)=1; \qquad (4.6.10)$$

но $\left(O^{-1}\right)_i^j=O_j^i$ (транспонированная матрица), так что

$$det\,O^{-1}=det\,O\,,\quad (det\,O)^2=1. \qquad (4.6.11)$$

Поэтому условие $det\,O=1$ не является независимым от условий ортогональности и не уменьшает числа независимых параметров группы. В отличие от всех других групп, группа $O(n)$ не связана; матрицу с определителем 1 нельзя непрерывным изменением превратить в матрицу с определителем –1. $O(n)$ распадается на связные куски (компоненты), выделяемые условиями $det\,O = 1$ и $det\,O = -1$. Первая из этих компонент есть $SO(n)$. Размерность $SO(n)$ равна, следовательно, размерности $O(n)$, то есть $\frac{n(n-1)}{2}$. $SO(n)$ допускает умножение только на число 1.

Операторы $SO(n)$ представляют собой собственные (не меняющие ориентации) вращения действительного евклидова пространства $R(n)$.

§4.7. Прямое произведение групп

Пусть группа G содержит две подгруппы H и F, элементы которых коммутируют, так что $H_a F_b = F_b H_a$, где H_a - произвольный элемент подгруппы H, а F_b - произвольный элемент подгруппы F. Если при этом произвольный элемент группы G может быть записан единственным образом в виде произведения $H_a F_b$, то группу G называют «прямым произведением» групп H и F, записывая это в виде

$$G = H \times F \quad . \tag{4.7.1}$$

Заметим, что единственным общим элементом групп H и F является единичный элемент.

Построим прямое произведение групп C_2 и S_2, рассмотренных в примерах 3 и 4. Совокупность элементов E, R, I, RI образует группу, являющуюся прямым произведением групп C_2 и S_2, то есть $C_{2h} = C_2 \times S_2$. Заметим, что элемент RI есть операция отражения в плоскости xy и обозначается через σ. Составим таблицу Кэли для группы C_{2h}.

Таблица 4.7.1

$G_a \setminus G_b$	E	R	I	σ
E	E	R	I	σ
R	R	E	σ	I
I	I	σ	E	R
σ	σ	I	R	E

§4.8. Сопряженные элементы и классы

Рассмотренные выше примеры групп, заданные таблицами Кэли, говорят о том, что уже для небольшого числа элементов таблицы становятся громоздкими. Исследование строения групп можно упростить, выделив внутри группы «*классы*» элементов со сходными свойствами.

Элемент G_a некоторой группы называется *сопряженным* элементу G_b той же группы, если найдётся элемент G_n, такой, что

$$G_a = G_n G_b G_n^{-1}. \tag{4.8.1}$$

Если элементы G_b и G_c оба являются сопряженными элементу G_a, то отсюда сразу следует, что элементы G_b и G_c являются сопряженными друг другу, так как, если

$$G_a = G_n G_b G_n^{-1} \text{ и } G_a = G_m G_c G_m^{-1},$$

то

$$G_b = G_n^{-1} G_a G_n = G_n^{-1} G_m G_c G_m^{-1} G_n = \left(G_n^{-1} G_m\right) G_c \left(G_n^{-1} G_m\right)^{-1}.$$

Это приводит к понятию *класса*, в котором все элементы сопряжены друг с другом. При этом ни один элемент не может принадлежать более чем к одному классу. Если элемент принадлежит к двум классам, то он должен быть сопряжен со всеми элементами в обоих классах, и тогда элементы одного класса будут сопряжены с элементами другого класса, таким образом, эти два класса объединяются в один класс.

На основании вышеизложенного мы можем сделать вывод о том, что всякую группу можно разбить на непересекающиеся классы, которые мы будем обозначать символами E_p .

Если группа абелева, то каждый её элемент, вследствие коммутации, сам по себе образует класс. По этой же причине один единичный элемент всегда образует класс.

§4.9. Примеры классов

1. Группа вращений $\mathfrak{R}_3$

Чтобы найти элементы группы, принадлежащие к тому же классу, что и некоторый выбранный поворот $R_k(a)$, необходимо построить операцию вращения $RR_k(a)R^{-1}$ для произвольного R . Такое тройное произведение можно просто интерпретировать.

Покажем, что это есть поворот на тот же угол a вокруг оси $\mathbf{k}'$, связанный с исходной осью $\mathbf{k}$ соотношением

$$\mathbf{k}' = R\mathbf{k}\,; \tag{4.9.1}$$

другими словами,

$$RR_k(a)R^{-1} = R_{k'}(a). \tag{4.9.2}$$

Если представить себе, что операция R переводит все векторы из старых положений в новые (обозначенные штрихом), то результат почти очевиден. Правая часть равенства (4.9.2) – это поворот вокруг новой оси $\mathbf{k}'$ на угол a . Операция в левой части равенства – это перевод вектора из нового положения в старое, поворот вокруг старой оси $\mathbf{k}$, а затем возвращение вектора из старого положения в новое.

Докажем это более строго. Рассмотрим равенство

$$\left[RR_k(a)R^{-1}\right]\mathbf{k}' = RR_k(a)\mathbf{k} = R\mathbf{k} = \mathbf{k}' \tag{4.9.3}$$

с учётом равенства (4.9.1) и того обстоятельства, что поворот, ось которого совпадает с направлением вектора, оставляет этот вектор без изменения. Согласно формуле (4.9.3), левая часть равенства (4.9.2) оставляет на месте вектор $\mathbf{k}'$; следовательно, эта операция может быть только

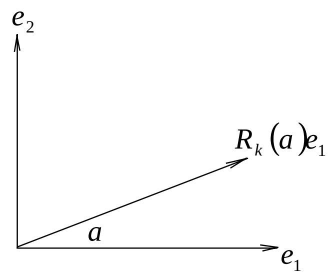

Рис. 4.9.1.

поворотом вокруг направления $\mathbf{k}'$. Наконец, чтобы показать, что угол поворота a не меняется, построим ортогональный базис e_1, e_2 в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$. Из рис. 4.9.1 видно, что

$$R_k(a)e_1 = \cos ae_1 + \sin ae_2 . \tag{4.9.4}$$

Поворот R в соответствии с равенством (4.9.1) переводит $\mathbf{k}$ в $\mathbf{k}'$, а e_1 и e_2 преобразует в два новых единичных ортогональных вектора $e_1' = R \cdot e_1$ и $e_2' = R \cdot e_2$, лежащих в плоскости, перпендикулярной вектору $\mathbf{k}'$. По аналогии с (4.9.4) напишем

$$R_{k'}(a)e_1' = cos\, ae_1' + sin\, ae_2' ; \tag{4.9.5}$$

но, с другой стороны,

$$\left[RR_k(a)R^{-1}\right]e_1' = RR_k(a)e_1 = R(\cos ae_1 + \sin ae_2) =$$

$$= \cos ae_1' + \sin ae_2' ;$$

сравнивая это выражение с (4.9.5), мы видим, что равенство (4.9.2) доказано.

Итак, классы группы $\Re_3$ ($SO(3)$) очень простые. Поскольку операция вращения R, переводящая направление вектора $\mathbf{k}$ в произвольно заданное направление $\mathbf{k}'$, существует всегда, любые два поворота на одинаковый угол вне зависимости от того, вокруг каких осей они осуществляются, будут относиться к одному и тому же классу.

2. Конечная группа вращений D_3

Так как группа D_3 является подгруппой $\mathfrak{R}_3$, мы можем искать классы сопряженных элементов на основе равенства (4.9.2). Из него следует, что для того, чтобы два элемента группы D_3 принадлежали одному классу, они должны отвечать поворотам на одинаковый угол. Но этого недостаточно, элементом группы D_3 обязан быть и поворот R, переводящий $\mathbf{k}$ в $\mathbf{k}'$. Таким образом можно установить, что в данном случае мы имеем три класса:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{E}_1 = E, \\ \mathrm{E}_2 = R_1, R_2, \\ \mathrm{E}_3 = R_3, R_4, R_5. \end{array}\right\} \qquad (4.9.6)$$

Единичная операция E сама по себе образует класс. Операции R_1, R_2 соответствуют углу поворота $\dfrac{2\pi}{3}$, а операции R_3, R_4, R_5 - повороту на угол π.

Покажем, что элементы R_1, R_2 попадают в один класс, для чего найдём операцию вращения, переводящую ось R_1 в ось R_2. Это есть не что иное как инверсия оси z, достигаемая при операциях R_3, R_4, R_5. Аналогично, повороты R_1, R_2 переводят друг в друга оси R_3, R_4, R_5:

$$R_2 = R_3 R_1 R_3^{-1}, \qquad R_3 = R_1 R_4 R_1^{-1}, \quad R_3 = R_2 R_5 R_2^{-1}.$$

Заметим, что симметрическая группа $\mathfrak{I}_3$ разбивается на классы аналогично группе D_3, так как они изоморфны.

§4.10. Классы произведения групп

Классы группы прямого произведения $H \times F$ легко установить, зная классы групп H и F. Пусть элементы $H_a F_b$ и $H_c F_d$ принадлежат одному и тому же классу. Тогда по определению должен существовать некоторый элемент $H_e F_f$, такой, что

$$H_e F_f H_a F_b \left(H_e F_f\right)^{-1} = H_c F_d ,$$

то есть

$$\left(H_e H_a H_e^{-1}\right)\left(F_f F_b F_f^{-1}\right) = H_c F_d ,$$

откуда

$$H_e H_a H_e^{-1} = H_c , \quad F_f F_b F_f^{-1} = F_d .$$

Таким образом, мы установили, что H_a и H_c принадлежат одному и тому же классу группы H, а F_b и F_d - одному и тому же классу группы F. Таким образом, в классе группы $H \times F$ будут содержаться все произведения элементов $H_a F_b$, где H_a пробегает целиком некоторый класс группы H, а F_b пробегает класс группы F. Каждой паре классов, одному из H, а другому из F, будут соответствовать один класс в группе $H \times F$.

Если группа H содержит p классов, а группа F - q классов сопряжённых элементов, то число классов сопряжённых элементов группы $G = H \times F$ равно pq.

Рассмотрим в качестве примера полную ортогональную группу $O(3)$ в которой каждому углу поворота a соответствуют два класса сопряженных элементов. В один из них попадают все собственные вращения $R_k(a)$, а в другой – все несобственные вращения $IR_k(a)$. Каждая такая пара классов соответствует двум классам группы: E и I. Если мы рассмотрим группу D_{3h}, то увидим, что она содержит шесть классов, соответствующих комбинациям трёх классов группы D_3, и двух классов (E и σ) группы S_1.

§4.11. Теорема о перечислении групп

Докажем одно простое свойство групп, называемое теоремой о перечислении. Теорема утверждает, что если G_a - некоторый фиксированный элемент группы G, а элемент G_b пробегает всю группу, то произведение $G_c = G_b G_a$ также пробегает всю группу, причём каждый из элементов группы появляется один и только один раз.

Для доказательства заметим, что при любом заданном G_c из условия $G_b = G_c G_a^{-1}$ следует равенство $G_c = G_b G_a$. Два разных элемента G_b и $G_{b'}$ не могут порождать один элемент G_c, так как возможным было бы равенство $G_c = G_b G_a = G_{b'} G_a$, умножив которое на G_a^{-1}, мы получили бы равенство $G_b = G_{b'}$ противоречащее нашим исходным положениям.