Глава V
Представления групп

В этой главе мы объединим понятия группы и векторного пространства и рассмотрим взаимосвязь между элементами группы и преобразованиями векторного пространства.

§ 5.1. Определение представления группы

В предыдущей главе мы установили, что каждая группа G состоит из операторов, действующих в пространстве $C(n)$, или (в матричной форме) из n- рядных матриц. Таким образом, каждой группе можно сопоставить число n. Понятие *представления* служит для установления связи между группами операторов в пространствах различной размерности и необходимо нам для исследования свойств симметрии физических систем.

Мы будем говорить, что *нам дано k - рядное представление группы G (или гомоморфизм G в группу k - рядных операторов), если каждому оператору U из G поставлен в соответствие некоторый оператор $P(U)$, действующий в $C(k)$, причём произведению операторов в $C(n)$ соответствует произведение операторов в $C(k)$ и единичному оператору в $C(n)$ - единичный оператор в $C(k)$*:

$$P(UV)=P(U)\cdot P(V), \qquad P(E(n))=E(k). \tag{5.1.1}$$

Число k называется *степенью* представления P.

Из (5.1.1) ясно, что произведение операторов вида $P(U)$ есть оператор того же вида, а из условия $P(E(n)) = E(k)$ следует, что тождественный оператор в $C(k)$ так же имеет вид $P(U)$.

Далее, если $V = U^{-1}$, то

$$P(U)P(U^{-1}) = P(E(n)) = E(k)$$

или

$$P(U^{-1}) = [P(u)]^{-1}. \qquad (5.1.2)$$

Операторы $P(U)$, если U пробегает все элементы G, образуют группу, которую мы обозначим через $P(G)$. Представление называется *унитарным*, если все операторы $P(U)$ унитарны. Представление $P(G)$ можно наглядно истолковать как некоторое «изображение» n - рядных операторов k - рядными: действие оператора U в $C(n)$ «вызывает» связанное с ним по некоторому закону действие оператора $P(U)$ в $C(k)$.

§ 5.2. Матричные представления

Зафиксируем в пространстве L некоторый базис $e_1, e_2, ..., e_n$ и построим для каждого оператора $P(U)$ матрицу (см. гл. I, §1.11) по формуле

$$P(U)e_i = P_i^j(U)e_j. \qquad (5.2.1)$$

Набор матриц $P(U)$ с матричными элементами $P_i^j(U)$ образует *матричное представление* группы. Матрицы $P(U)$ удовлетворяют уравнению (5.1.1) обычного матричного умножения

$$P(U) \cdot P(V) = P(UV). \qquad (5.2.2)$$

Покажем это:

$$P(U) \cdot P(V)e_i = P(U)P_i^j(V)e_j = P_i^j(V) \cdot P_j^k(U)e_k$$

и

$$P(U)\cdot P(V)e_i = P(UV)e_i = P_i^k(UV)e_k\,,$$

так что

$$P_i^k(UV) = P_j^k(U)P_i^j(V). \qquad (5.2.3)$$

На практике для вычисления матричных элементов с использованием ортонормированного базиса, как правило, удобнее пользоваться соотношением

$$P_i^j(U) = \left(e_j \middle| P(U)e_i\right), \qquad (5.2.4)$$

которое прямо следует из равенства (5.2.1).

§ 5.3. Примеры представлений групп

1. Тождественное (фундаментальное) представление.

В данном случае $k = n$ и $P(U) = U$ для всех операторов U из G, то есть каждый оператор U «изображается» самим собой.

2. Тривиальное представление.

$P(U)$ для всех U из G полагается равным тождественному оператору $E(k)$.

3. Скалярное представление.

Пусть $k = 1$ и $P(U) = \det U$. Тогда комплексные числа $P(U)$ рассматриваются как однорядные матрицы. Учитывая свойства определителя оператора (§1.13), условия (5.1.1) выполняются, при этом все операторы вида $UVU^{-1}V^{-1}$ переходят в $E(k)$; если группа G не коммутативна, то прядок перемножения в группе G существенен, а в $P(G)$ - нет:

$$P(UV) = P(U)\cdot P(V) = P(V)\cdot P(U) = P(VU).$$

Изображение n - рядных операторов однорядными «огрубляет» их алгебраические свойства.

Абелевы группы не имеют других неприводимых представлений кроме тривиального и скалярного.

4. Индуцированные представления.

Каждый тип тензоров $T(p,q)$ позволяет сопоставить (см. §3.3) операторам U, действующим в $C(n)$, индуцированные операторы $\Pi(U)$, действующие в $C(p,q)$. Из (3.3.11) следует, что Π - представление полной линейной группы $GL(n,C)$. Степень этого представления равна размерности пространства $C(p,q)$, то есть n^{p+q}. Если рассматривать вместо $GL(n,C)$ некоторую её подгруппу G, то Π представляет n^{p+q} - рядное представление группы G: надо рассматривать лишь те $\Pi(U)$, которые соответствуют операторам U из G. В частности, если в качестве G взять $U(n)$, то и операторы $\Pi(U)$ будут унитарны (см. §3.3); получается *унитарное* представление группы $U(n)$ операторами, действующими в пространстве $C(p,q)$.

Представление P называется *точным*, если оно ставит в соответствие различным операторам U,V из G различные операторы из $P(G)$ (другими словами: гомоморфизм P называется в этом случае *изоморфизмом* групп G и $P(G)$).

Тождественное представление, очевидно, точно. Тривиальное представление неточно, если G состоит не из одного оператора $E(n)$. Одномерное представление неточно, если G - не абелева группа (обратное неверно!). Можно показать, что индуцированные представления, как правило, точны.

5. Группа D_3

Для выяснения физического смысла представления, рассмотрим группу D_3, (см. гл. IV, §4.5, п.6) и построим для неё матричное представление.

Выберем базисные векторы $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$ так, как указано на рис.5.3.1., а вектор $\vec{e}_z$ направим перпендикулярно плоскости рисунка.

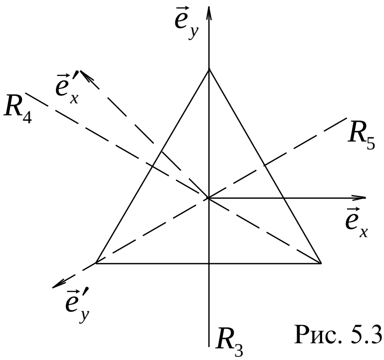

Рис. 5.3.1.

Рассмотрим отображение элемента группы, например R_1 (отображение поворота на 120^0 вокруг оси z).

$$\left.\begin{aligned}
&P(R_1)\vec{e}_x = \vec{e}_x' = -\frac{1}{2}\vec{e}_x + \sqrt{\frac{3}{4}}\vec{e}_y,\\
&P(R_1)\vec{e}_y = \vec{e}_y' = -\sqrt{\frac{3}{4}}\vec{e}_x - \frac{1}{2}\vec{e}_y,\\
&P(R_1)\vec{e}_z = \vec{e}_z' = \vec{e}_z.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.1)$$

В соответствии с (5.2.4) матрица $P(R_1)$ будет равна

$$P(R_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}} & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для других элементов группы аналогичным образом получим:

$$P(R_2)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P(R_3)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P(R_4)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\sqrt{\frac{3}{4}} & 0 \\ -\sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$P(R_5)=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 \\ \sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P(E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что полученные матрицы имеют таблицу умножения, совпадающую с таблицей 4.5.6.

Рассматривая одномерное пространство вектора $\vec{e}_z$, мы можем построить простое одномерное представление $P^{(2)}$:

$$P^{(2)}(R_1)=1,\ P^{(2)}(R_2)=1, \qquad P^{(2)}(R_3)=-1,$$

$$P^{(2)}(R_4)=-1, \qquad P^{(2)}(R_5)=-1, \qquad P^{(2)}(E)=1.$$

Отметим, что $P^{(2)}$ не является тождественным представлением, которое мы обозначим через $P^{(1)}(R_i)=1$, ставящим в соответствие каждому элементу группы +1.

Так как в третьей строке и третьем столбце $P(R_i)$ стоят нули, матрицы 2×2, построенные из двух первых строк и столбцов, образуют двумерное представление $P^{(3)}$ группы D_3.

6. Группа $\Re_2$

Используя пространство предыдущего примера построим представление непрерывной группы $\Re_2$ вокруг оси z. В этом случае индекс a групповых элементов $R(a)$ является непрерывным параметром в интервале $0\leq a\leq 2\pi$.

Матрицу R найдём из уравнения

$$R_i^j(a)=\vec{e}_j\cdot R(a)\vec{e}^{\,i}=\vec{e}_j\vec{e}'^{\,i},$$

откуда

$$R_1^1=cos\,a,\ \ R_1^2=-sin\,a,\qquad R_2^1=sin\,a,\ R_2^2=cos\,a,$$

так что

$$R=\begin{pmatrix} cos\,a & -sin\,a \\ sin\,a & cos\,a \end{pmatrix}, \tag{5.3.2}$$

откуда

$$P(a)=\begin{pmatrix} cos\,a & -sin\,a & 0 \\ sin\,a & cos\,a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.3.3}$$

из (5.3.3) сразу следует, что

$$P(a)P(b)=P(a+b)$$

для любых a и b в согласии с правилом умножения групповых элементов

$$R(a)\cdot R(b)=R(a+b).$$

7. Функциональные пространства

Два первых примера представлений построены в обычном физическом трёхмерном пространстве.

Покажем теперь, как для групп типа D_3 и $\Re_2$ построить представления размерности большей трёх.

Построим представления в функциональном пространстве, рассмотрев представления функций при поворотах системы координат согласно формуле:

$$P(U)\Psi(\vec{r})=\Psi(U^{-1}\vec{r}). \qquad (5.3.4)$$

Пусть у нас имеется пространство L функций $\Psi(\vec{r})$, где $\vec{r}$ - координаты, инвариантных относительно группы преобразований координат U, в том смысле, что если $\Psi(\vec{r})$ принадлежит L, то ему принадлежит и $\Psi(U^{-1}\vec{r})$ для всех элементов U этой группы.

Убедимся, что представление (5.3.4) удовлетворяет условию (5.1.1). Так как $\Psi'(\vec{r})=\Psi(U^{-1}\vec{r})$, то

$$P(U)\cdot P(V)\Psi(\vec{r})=P(U)\Psi(V^{-1}\vec{r})=P(U)\Psi'(\vec{r})=$$
$$=\Psi'(U^{-1}\vec{r})=\Psi(V^{-1}U^{-1}\vec{r})=\Psi((UV)^{-1}\vec{r})=P(UV)\Psi(\vec{r}).$$

В данном доказательстве очень важно введение новой функции

$$\Psi'(\vec{r})=\Psi(U^{-1}\vec{r}),$$

так как в общем случае

$$P(U)\Psi(V^{-1}\vec{r})\neq\Psi(U^{-1}V^{-1}\vec{r}).$$

Матричное представление в функциональном пространстве может быть получено, если распространить общее выражение

$$P(U)e_i=P_i^j(U)e_j \qquad (5.2.1)$$

на пространство функций, выбрав базис $\Psi_i(\vec{r})$:

$$P(U)\Psi_i(\vec{r})=\Psi_i(U^{-1}\vec{r})=\Psi'(\vec{r})=P_i^j(U)\Psi_j(\vec{r}), \qquad (5.3.6)$$

где $\Psi_i(\vec{r})$ служат примером абстрактных базисных векторов $\vec{e}_i$.

Рассмотрим шестимерное пространство L функций вида

$$\Psi(\vec{r}) = c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + c_4yz + c_5zx + c_6xy\,,$$

зависящее от координат x, y, z частицы, где функция $\Psi(\vec{r})$ задаётся набором шести комплексных параметров c_i.

В качестве базиса выберем шесть функций

$$\Psi_1 = x^2\,,\ \Psi_2 = y^2\,,\ \Psi_3 = z^2\,,\ \Psi_4 = yz\,,\ \Psi_5 = zx\,,\ \Psi_6 = xy\,,$$

обозначив их через радиус-вектор $\vec{r}$:

$\Psi_1 = (\vec{e}_x, \vec{r})^2$, $\Psi_4 = (\vec{e}_y, \vec{r})(\vec{e}_z, \vec{r})$ и так далее.

Введённое нами пространство инвариантно относительно любого вращения и, в частности, относительно операций группы D_3.

Например,

$$P(R_1)\Psi_1 = P(R_1)(\vec{e}_x, \vec{r})^2 = \left(-\frac{1}{2}\vec{e}_x + \sqrt{\frac{3}{4}}\vec{e}_y, \vec{r}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}y^2 - \sqrt{\frac{3}{4}xy} = \frac{1}{4}\Psi_1 + \frac{3}{4}\Psi_2 - \sqrt{\frac{3}{4}}\Psi_6,$$

$$P(R_1)\Psi_4 = P(R_1)(\vec{e}_y, \vec{r})(\vec{e}_z, \vec{r}) =$$

$$= \left(-\sqrt{\frac{3}{4}}\vec{e}_x - \frac{1}{2}\vec{e}_y, \vec{r}\right)(\vec{e}_z, \vec{r}) = -\frac{1}{2}yz - \sqrt{\frac{3}{4}}xz =$$

$$= -\frac{1}{2}\Psi_4 - \sqrt{\frac{3}{4}}\Psi_5.$$

Продолжая выкладки, мы получим матрицу

$$P(R_1)=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{3}{4}} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{4}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{4}} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\sqrt{\frac{3}{4}} & \sqrt{\frac{3}{4}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Таким же образом могут быть получены остальные пять матриц, и они будут иметь ту же таблицу умножения, что и элементы группы.

Замечание. При умножении функции $\Psi(\vec{r})$ на любую скалярную функцию $f(r)$, где $r=|\vec{r}|$, представление остаётся неизменным и, если функция $f(r)$ достаточно быстро убывает при больших $\vec{r}$, объём V, в котором определено скалярное произведение, можно расширить до бесконечности. В этом случае функция $\Psi(\vec{r})$ может представлять собой волновую функцию частицы, движущейся в сферически-симметричном потенциале вокруг начала координат, как электрон в атоме водорода.

§ 5.4. Сумма представлений

Рассмотрим k - рядное представление группы G; допустим, что пространство представления $C(k)$ может быть разложено в ортогональную сумму

$$C(k)=C(k_1)\oplus\ldots\oplus C(k_s) \qquad (5.4.1)$$

комплексных евклидовых пространств таким образом, что каждое пространство $C(k_j)$ инвариантно относительно представляющих операторов, то есть для всех U из G оператор $P(U)$ переводит векторы $C(k_j)$ в векторы того же подпространства. Операторы $P(U)$, рассматриваемые только на $C(k_j)$, определяют k_j - рядное представление G, которое мы обозначим через P_j. Мы можем сказать, что представление P распадается в ортогональную сумму представлений P_j:

$$P = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_s . \tag{5.4.2}$$

Ортонормированные базисы каждого из подпространств $C(k_j)$ вместе взятые, образуют базис в $C(k)$, а операторы $P(U)$ будут изображаться ящичными матрицами вида (2.5.4) с ящиками из $k_1, k_2, \ldots, k_s$ рядов.

§ 5.5. Произведение представлений

Рассмотрим представления P, Q одной и той же группы G, в соответствующих пространствах $C(k)$ и $C(l)$. Построим тензорное произведение этих пространств:

$$C(k) \otimes C(l) \tag{5.5.1}$$

размерности kl.

Каждому оператору U из группы G соответствуют представляющие операторы $P(U), Q(U)$, действующие, соответственно, в пространствах $C(k)$ и $C(l)$. Построим тензорное произведение этих операторов:

$$P(U) \otimes Q(U) \tag{5.5.2}$$

- оператор, действующий в пространстве $C(k)\otimes C(l)$ (см. § 2.7). Из определения тензорного произведения операторов видно, что

$$P(UV)\otimes Q(UV) = P(U)P(V)\otimes Q(U)Q(V) =$$
$$= (P(U)\otimes Q(U))(P(V)\otimes Q(V)), \qquad (5.5.3)$$

так что *формула* (5.5.2) *определяет некоторое представление группы* G *в пространстве* $C(k)\otimes C(l)$, *называемое тензорным (кронекеровым) произведением представлений* P, Q. Строение матриц, изображающих операторы (5.5.2), видно из (2.8.4).

Аналогично определяется произведение любого числа представления.

§ 5.6. Эквивалентность представлений

Пространство, определяемое векторами $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$ (пример 5, §5.3) порождает двумерное представление группы D_3. Если мы выберем другие базисные векторы в том же пространстве, мы получим другой набор матриц двумерного представления. Можно надеяться, что подобное тривиальное преобразование базиса не будет изменять некие существенные свойства представления - и это действительно так. Введём понятие эквивалентности предствалений, которое придаст строгую форму нашему утверждению.

Рассмотрим представления P, Q одной и той же группы G в одном и том же пространстве $C(k)$. Представляющие операторы $P(U), Q(U)$ при переменном U из G, составляют два семейства линейных операторов в $C(k)$. Может случиться, что эти семейства переходят друг в друга при некотором преобразовании W пространства $C(k)$, то есть

$$Q(U) = WP(U)W^{-1} \qquad (5.6.1)$$

при всех U (обратимый оператор W один и тот же для всех U). В этом случае представления P и Q называются *эквивалентными*. Смысл соотношения (5.6.1) заключается в следующем: если $P(U)$ переводит вектор x в вектор y, то $Q(U)$ переводит вектор Wx в вектор Wy; иначе говоря, образы и прообразы всех операторов $P(U)$ «поворачиваются» с помощью одного и того же «движения» W.

Если оператор W унитарен, то представления P, Q *называются унитарно эквивалентными*. Если перейти к матричному изображению представляющих операторов, то для унитарно эквивалентных представлений P, Q матрицы $P(U)$ переходят в $Q(U)$ при некоторой замене базиса в $C(k)$. Для простой (не унитарной) эквивалентности то же верно, если пользоваться общими, не обязательно ортонормированными базисами.

Представления одинаковой *степени*, рассматриваемые в пространствах одинаковой размерности, мы можем всегда заменить представлениями в *одном и том же* пространстве, так как все комплексные евклидовы пространства одинаковой размерности изоморфны и могут быть отождествлены.

Можно ожидать, что важнейшие свойства любых двух эквивалентных представлений одинаковы и мы можем ограничиться рассмотрением из каждого класса эквивалентных представлений лишь по одному представлению. В частности, можно рассматривать только унитарные представления, поскольку утверждение, известное под названием *теоремы Машке*, гласит, что *для конечных групп в любом классе эквивалентных представлений содержатся унитарные представления*. Эта теорема справедлива и для большинства непрерывных групп, рассматриваемых в физике.

§ 5.7. Неприводимые представлений

Пример 7 из § 5.3 показывает, что исходя из всё более сложного функционального пространства, можно получать матричные представления всё возрастающего размера, что приводит нас к мысле о том, что изучение возможных представлений даже в простейших группах типа D_3 является делом немыслимой сложности. Эту сложную ситуацию спасает следующее замечательное свойство групповых представлений: все представления конечной группы можно «построить» из конечного числа некоторых определённых неприводимых представлений. Группа D_3 (пример 5, §5.3), например, имеет только три определённых неприводимых представления: два одномерных и одно двумерное, хотя размерность представления в данном примере равна трём. Из вида матриц $P(R_i)$ вытекает, что построенные из первых двух строк и столбцов матрицы 2×2 образуют двумерное представление, тогда как диагональные матричные элементы, расположенные на пересечении третьей строки и третьего столбца, образуют представление размерности единица.

Это становиться возможным, так как равны нулю элементы, расположенные на пересечении первых двух строк с третьим столбцом и первых двух столбцов с третьей строкой. Если говорить о векторном пространстве, то это означает, что два вектора $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$ порождают инвариантное векторное пространство, а один вектор $\vec{e}_z$ порождает второе инвариантное векторное пространство, ортогональное первому.

Мы скажем в этой ситуации, что трёхмерное представление приводится к «сумме» двумерного и одномерного представлений.

Одномерное представление, очевидно, не может быть приведено дальше, а попытавшись привести двумерное представление, можно убедиться в том, что и оно тоже неприводимо. Это можно понимать так: невозможно выбрать новые базисные векторы

$$\vec{e}_1 = \alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y \text{ и } \vec{e}_2 = \beta\vec{e}_x + \alpha\vec{e}_y,$$

такие, чтобы матричные элементы

$$P_{12}(R_a) = (\vec{e}_1, P(R_a)\vec{e}_2) \text{ и } P_{21}(R_a) = (\vec{e}_2, P(R_a)\vec{e}_1)$$

обращались в этом базисе в нуль для всех элементов R_a из группы D_3.

Представления, которые нельзя привести, называются *неприводимыми*.

Понятие приводимости играет очень важную роль в физике, поскольку, как мы увидим в дальнейшем, из волновых функций, описывающих стационарные состояния симметрической системы с одной и той же энергией, можно построить базисные функции неприводимого представления группы операций симметрии.

Дадим теперь более строгое понятие приводимости.

Пусть P - представление группы G в пространстве $C(k)$. Если $C(k)$ не содержит подпространства меньшей размерности, инвариантного относительно группы $P(G)$, то представление P называется *неприводимым*, в противном случае – *приводимым*.

В ряде важных случаев изучение всех представлений может быть сведено к изучению неприводимых. Например, для групп $SU(n)$ справедлива следующая теорема:

Каждое представление группы $SU(n)$ разлагается в ортогональную сумму неприводимых представлений; это разложение единственно с точностью до эквивалентности.

Два таких разложения, после надлежащего изменения порядка слагаемых, состоят из эквивалентных представлений, это значит, что разложения на неприводимые представления

$$P = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_m, \quad Q = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \ldots \oplus Q_n$$

обязательно содержат одинаковое число слагаемых $(m = n)$, и существует такая подстановка $(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_n)$, что Q_i и P_{ν_i} $(i = 1,2,\ldots,n)$ эквивалентны.

Подобное утверждение о разложении неверно для некоторых других классических групп, в частности, для полной линейной группы $GL(n,C)$.

§ 5.8. Неэквивалентные неприводимые представления

Два представления P и Q называются *неэквивалентными*, если не существует такого оператора U, который удовлетворял бы соотношению (5.6.1) для всех элементов U_i группы. Эквивалентные неприводимые представления удобно рассматривать как одно представление. Для матриц это означает, что всегда можно выбрать такой базис, в котором соответствующие матрицы идентичны. С точки зрения разложения (5.4.2) приводимого представления на его неприводимые компоненты это означает, что в таком разложении некоторое неприводимое представление может появляться несколько раз. Поэтому разложение на неприводимые представления можно записать в виде

$$P = \sum_i m_i P^{(i)}\,, \tag{5.8.1}$$

где i пробегает неэквивалентные неприводимые представления, а целое число m_i показывает, сколько раз данное неприводимое представление $P^{(i)}$ появляется в разложении.

Например, в разложении шестимерного представления рассмотренного в § 3.5, п.3, дважды входит тождественное представление. Две независимые функции $\left(x^2 + y^2\right)$ и z^2, инвариантные в группе D_3, являются по этой причине базисными функциями одномерного тождественного представления $P^{(1)}$, ставящему в соответствие каждому групповому элементу единицу. Можно также показать, что и двумерное представление $P^{(3)}$ входит в разложение дважды и формула (5.8.1) приведения представления будет иметь вид $P = 2P^{(1)} \oplus 2P^{(3)}$.

§5.9. Леммы Шура

Анализируя два предыдущих параграфа можно сделать вывод о том, что задача исследования представлений группы сводится к изучению неэквивалентных неприводимых представлений, обладающих, как мы это покажем ниже, свойствами ортогональности, составляющими ядро математической теории представлений и лежащих в основе большинства физических проявлений симметрии.

Свойства ортогональности следуют из двух лемм Шура, введённых им в 1905 году.

Первая лемма Шура.

Пусть $P(G_a)$ *- неприводимое представление группы* G *в пространстве* L*, и пусть* A *- фиксированный оператор в* L*. Тогда, если для всех элементов* G_a *группы* G *выполняется равенство*

$$P(G_a)A = AP(G_a),\ \text{то}\ A = \lambda \cdot 1,$$

где 1 *есть тождественный (или единичный оператор).*

Другими словами, всякий фиксированный оператор, коммутирующий с операторами $P(G_a)$ *неприводимого представления для любых* G_a *из группы* G *, является единичным оператором с точностью до постоянного множителя.*

Доказательство. Пусть x - собственный вектор оператора A в пространстве L с собственным значением λ, такой что $Ax = \lambda x$. Если теперь x преобразованием $P(G_a)$ переводится в новый вектор $x_a = P(G_a)x$, то x_a также будет собственным вектором оператора A с тем же собственным значением λ, поскольку

$$Ax_a = AP(G_a)x = P(G_a)Ax = P(G_a)\lambda x = \lambda P(G_a)x = \lambda x_a .$$

Если G_a пробегает всю группу G, то набор векторов x_a должен порождать инвариантное подпространство, так как

$$P(G_b)x_a = P(G_b)P(G_a)x = P(G_bG_a)x = x_c ,$$

где c определяется соотношением $G_bG_a = G_c$ групповой таблицы умножения. Пространство L неприводимо по определению и не может содержать инвариантного подпространства. Таким образом, пространство векторов x_a обязано совпадать со всем пространством L, из чего следует, что для любого вектора $X = \sum_a c_a x_a$ в L мы можем записать

$$AX = A\sum_a c_a x_a = \sum_a c_a Ax_a = \sum_a c_a \lambda x_a = \lambda X ,$$

а так как X - произвольный вектор пространства L то $A = \lambda \cdot 1$. В матричной форме оператор A будет просто равняться величине λ, умноженной на единичную матрицу.

Вторая лемма Шура.

Пусть $P^{(1)}(G_a)$ *и* $P^{(2)}(G_a)$ *- два неприводимых представления группы* G *в пространствах* L_1 *и* L_2 *размерностей* s_1 *и* s_2*, и пусть* A *- оператор, переводящий векторы из* L_2 *в* L_1*. Тогда, если представления* $P^{(1)}(G_a)$ *и* $P^{(2)}(G_a)$ *неэквивалентны и для всех элементов* G_a *группы* G *выполняется равенство*

$$P^{(1)}(G_a)A = AP^{(2)}(G_a), \text{ то } A = 0,$$

то есть A *- нулевой оператор.*

Доказательство.

Предположим, что размерности пространств удовлетворяют условию $s_2 \le s_1$. Тогда A переводит L_2 в подпространство L_A некоторой размерности $s_A \le s_2 \le s_1$ в пространстве L_1. Подпространство L_A состоит из векторов Ax, где x произвольный вектор в L_2. Отсюда сразу следует, что пространство L_A инвариантно относительно преобразований группы G, поскольку

$$P^{(1)}(G_a)Ax = AP^{(2)}(G_a)x = Ax_a,$$

и этот вектор принадлежит пространству L_A, так как вектор $x_a = P^{(2)}(G_a)x$ принадлежит L_2. Однако представление $P^{(1)}(G_a)$ по определению неприводимо, а поэтому L_1 не может иметь инвариантного подпространства. Таким образом, мы приходим к противоречию, если только L_A не является нульмерным пространством $(s_A = 0)$, ни полным пространством L_1 $(s_A = s_1)$. Иными словами, мы доказали, что либо:

1) $Ax = 0$ для любых x в L_2, то есть $A = 0$, либо

2) $s_A = s_1 = s_2$. Последнее равенство вытекает из неравенства

$s_A \le s_2$ и условия $s_2 \le s_1$.

Второе условие исключается из за того, что $P^{(1)}(G_a)$ и $P^{(2)}(G_a)$-неэквивалентные представления. Оно означало бы, что L_1 и L_2 имеют одинаковую размерность, откуда следовало бы существование оператора A^{-1}, обратного оператору A, и из допущения

$$P^{(1)}(G_a)A = AP^{(2)}(G_a)$$

следовало бы, что

$$P^{(1)}(G_a) = AP^{(2)}(G_a)A^{-1},$$

то есть что представления $P^{(1)}(G_a)$ и $P^{(2)}(G_a)$ эквивалентны. Остаётся заключить, что $A = 0$.

В случае $s_2 > s_1$ доказательство аналогично. В этом случае с необходимостью $s_A < s_2$, а поэтому должны существовать векторы x в L_2, которые переводятся преобразованием A в нуль, то есть для которых $Ax = 0$. Подпространство этих векторов в L_2 обозначим через L_B; его размерность будет равна $s_2 - s_A$. Тогда подпространство L_B обязано быть инвариантным, так как если

$$x_a = P^{(2)}(G_a)x,$$

то

$$Ax_a = AP^{(2)}(G_a)x = P^{(1)}(G_a)Ax = 0,$$

из чего видно, что x_a тоже принадлежит пространству L_B. Это противоречит условию неприводимости представления $P^{(2)}$, если только не выполняется равенство $L_B = L_2$, другими словами, $Ax = 0$ для *всех* векторов x в L_2. Таким образом, мы снова приходим к выводу, что $A = 0$.

Воспользуемся леммами Шура для вывода соотношений ортогональности матричных представлений. Рассмотрим два неприводимых представления $P^{(\alpha)}(G_a)$ и $P^{(\beta)}(G_a)$ группы G, причём $P^{(\alpha)}(G_a)$ определено в пространстве L_α, а $P^{(\beta)}(G_a)$ - в L_β. Пусть U - некоторый оператор, преобразующий векторы пространства L_β в векторы пространства L_α. Мы можем показать, что оператор A вида

$$A = \sum_b P^{(\alpha)}(G_b) U P^{(\beta)}(G_b^{-1}) \qquad (5.9.1)$$

обладает свойствами оператора A в леммах Шура, так как

$$\begin{aligned} P^{(\alpha)}(G_a)A &= \sum_b P^{(\alpha)}(G_a) P^{(\alpha)}(G_b) U P^{(\beta)}(G_b^{-1}) = \\ &= \sum_b P^{(\alpha)}(G_a G_b) U P^{(\beta)}(G_b^{-1}) P^{(\beta)}(G_\alpha^{-1}) P^{(\beta)}(G_a) = \\ &= \sum_b P^{(\alpha)}(G_a G_b) U P^{(\beta)}\left((G_a G_b)^{-1}\right) P^{(\beta)}(G_a) = \\ &= \sum_c P^{(\alpha)}(G_c) U P^{(\beta)}(G_c^{-1}) P^{(\beta)}(G_a) = A P^{(\beta)}(G_a). \end{aligned}$$

Мы здесь использовали теорему о перечислении групп (§4.11). Рассмотрим два случая:

1) $P^{(\alpha)}(G_a)$ и $P^{(\beta)}(G_a)$ - одно и то же представление, откуда по лемме Шура следует $A = \lambda 1$;

2) $P^{(\alpha)}(G_a)$ и $P^{(\beta)}(G_a)$ неэквивалентны, и по лемме Шура $A = 0$.

Эти два случая можно объединить в одно равенство

$$A = \lambda \delta_{\alpha\beta} 1, \qquad (5.9.2)$$

считая, что в нём $\delta_{\alpha\beta} = 0$, когда неприводимые представления $P^{(\alpha)}(G_a)$ и $P^{(\beta)}(G_a)$ неэквивалентны, и $\delta_{\alpha\beta} = 1$, когда $P^{(\alpha)}(G_a)$ и $P^{(\beta)}(G_a)$-

одно и то же представление. Случай, когда $P^{(\alpha)}(G_a)$ и $P^{(\beta)}(G_a)$ эквивалентны, но не совпадают, не охватывается данным равенством, но мы его не будем рассматривать.

Содержание обеих лемм Шура при выборе оператора A в форме (5.9.1) можно свести к одному равенству

$$\sum_{a=1}^{g}\sum_{m=1}^{s_\beta}\sum_{k=1}^{s_\alpha} P_{ik}^{(\alpha)}(G_a)U_{km}P_{mj}^{(\beta)}\left(G_a^{-1}\right) = A_{ij} = \lambda\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\,, \tag{5.9.3}$$

где U - произвольная прямоугольная матрица (множитель λ зависит от её выбора).

Воспользуемся свободой выбора матрицы U и положим её элементы равными

$$U_{km} = \delta_{kp}\delta_{mq}\,;$$

другими словами, мы выбираем матрицу U, все элементы которой – нули, кроме одного элемента, расположенного на пересечении p-й строки с q-м столбцом, который принимается равным единице. При таком выборе, в формуле (5.9.3) исчезнут два знака суммирования и останется выражение

$$\sum_{a=1}^{g} P_{ip}^{(\alpha)}(G_a)P_{qj}^{(\beta)}\left(G_a^{-1}\right) = \lambda\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\,. \tag{5.9.4}$$

Величина λ имеет смысл при $\alpha = \beta$ и $i = j$, тогда просуммировав по i обе части равенства (5.9.4), получим

$$\sum_{i=1}^{s_\alpha}\sum_{a=1}^{g} P_{ip}^{(\alpha)}(G_a)P_{qj}^{(\alpha)}\left(G_a^{-1}\right) = \lambda\sum_{i=1}^{s_\alpha} 1 = \lambda s_\alpha\,,$$

откуда

$$\sum_{a=1}^{g} P_{qp}^{(\alpha)}(E) = \lambda s_\alpha\,,$$

где под E мы понимает тождественную операцию, образом которой является единичная матрица.

Таким образом

$$\lambda = g\,\frac{\delta_{pq}}{s_\alpha}\,. \qquad (5.9.5)$$

Подставляя (5.9.5) в (5.9.4), получим

$$\sum_{a=1}^{g} P_{ip}^{(\alpha)}(G_a)P_{qi}^{(\beta)}\left(G_a^{-1}\right) = \frac{g\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta_{pq}}{s_\alpha}\,. \qquad (5.9.6)$$

Если матричное представление $P^{(\beta)}$ унитарно, то с учётом того, что

$$P^{(\beta)}\left(G_a^{-1}\right)P^{(\beta)}(G_a) = P^{(\beta)}(E) = 1$$

мы можем записать, что

$$P^{(\beta)}\left(G_a^{-1}\right) = \left(P^{(\beta)}(G_a)\right)^{-1}$$

и если матрица P унитарна, то

$$P_{qi}^{(\beta)}\left(G_a^{-1}\right) = P_{jq}^{(\beta)}(G_a)^{*}\,. \qquad (5.9.7)$$

С учётом (5.9.7) равенство (5.9.6) примет вид важного в дальнейшем *соотношения ортогональности*

$$\sum_{a=1}^{g} P_{ip}^{(\alpha)}(G_a)P_{jq}^{(\beta)}(G_a)^{*} = \frac{g\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\delta_{pq}}{s_\alpha}\,. \qquad (5.9.8)$$

Следует заметить, что индексы матричных элементов, стоящих в левой части, выбраны совершенно произвольно, а суммирование производится только по элементам группы. Соотношение ортогональности показывает, что получаемая сумма обращается в нуль, если α и β - неэквивалентные неприводимые представления, при этом даже если представления α и β совпадают, сумма остаётся нулевой пока в левую часть входят различные матрицы, то есть если $i \neq j$ или $p \neq q$. Единственную ситуацию, при которой сумма отлична от нуля при произвольных i и p, можно представить так:

$$\sum_{a=1}^{g} \left|P_{ip}^{(\alpha)}(G_a)\right|^2 = \frac{g}{s_\alpha}\,. \qquad (5.9.9)$$

Содержащуюся в соотношении ортогональности операцию суммирования по всем групповым элементам часто называют *усреднением по группе*.

Термин «соотношение ортогональности» для формулы (5.9.8) означает, что в некотором векторном пространстве некое скалярное произведение обращается в нуль. Использование этого термина можно оправдать тем, что если рассматривать набор матричных элементов $P_{ip}^{(\alpha)}(G_a)$ для фиксированных α, а i и p как обозначенные индексом a компоненты вектора в g -мерном пространстве. Скалярное произведение двух векторов определяется в этом пространстве обычным образом, как сумма по компонентам и формула (5.9.8) констатирует ортогональность таких векторов с разными наборами индексов α, i и p.

Важно помнить, что соотношение ортогональности выполняется только для неприводимых представлений.

Пример. Показать, что неприводимые представления абелевых групп одномерны.

Пусть $P^{(\alpha)}(G_a)$ - неприводимое представление абелевой группы G. Так как по определению элементы абелевой группы коммутируют, то для любых G_a и G_b из G имеем

$$P^{(\alpha)}(G_a)P^{(\alpha)}(G_b)=P^{(\alpha)}(G_b)P^{(\alpha)}(G_a),$$

откуда по первой лемме Шура следует, что $P^{(\alpha)}(G_a)$ отличается от единичного оператора постоянным множителем, то есть

$$P^{(\alpha)}(G_a)=\lambda_a^{(\alpha)}1.$$

Таким образом, представление $P^{(\alpha)}(G_a)$ для всех G_a является диагональным и поэтому должно быть либо приводимым, либо одномерным. Первое предположение противоречит условию задачи; следовательно, неприводимые представления абелевых групп одномерны.

§ 5.10. Характеры представлений

В §5.6 мы установили, что для всякого данного представления можно построить бесконечное число эквивалентных матричных представлений путём изменения базиса (*преобразований подобия*) и вполне резонно задать себе вопрос: нельзя ли отыскать такие свойства представлений, которые не зависят от преобразований подобия? Оказывается, что наиболее подходящей для этой роли является сумма всех собственных значений, называемая *следом матрицы* и равная сумме её диагональных элементов в любом базисе. Такой след матричного представления $P(G_a)$ обозначается через $\chi(G_a)$. Набор чисел $\chi(G_a)$, где G_a пробегает все элементы группы, называется *характером представления* P и обозначается через χ.

Тогда

$$\chi(G_a) = \sum_{i=1}^{s} P_{ii}(G_a). \tag{5.10.1}$$

Мы сразу же видим, что характер представления инвариантен по отношению к преобразованию подобия, так как из равенства

$$P'(G_a) = AP(G_a)A^{-1}$$

следует равенство

$$\chi'(G_a) = \sum_{i} P'_{ii}(G_a) = \sum_{ijk} A_{ij} P_{jk}(G_a)(A^{-1})_{ki} =$$

$$= \sum_{jk} P_{jk}(G_a)(A^{-1}A)_{kj} = \sum_{j} P_{ji}(G_a) = \chi(G_a).$$

Рассуждая подобным образом, мы можем показать, что *все* элементы одного и того же класса E_p (§4.8) должны иметь одинаковый характер χ_p. Действительно, предположим, что элементы G_a и G_b принадлежат одному и тому же классу, то есть связаны соотношением (4.8.1) $G_a = G_n G_b G_n^{-1}$. Тогда для любого представления P

$$\chi(G_a)=\sum_i P_{ii}(G_a)=\sum_i P_{ii}\left(G_n G_b G_n^{-1}\right)=$$
$$=\sum_{ijk} P_{ij}(G_n)P_{jk}(G_b)P_{ki}\left(G_n^{-1}\right)=\sum_{jk} P_{jk}(G_b)P_{kj}\left(G_n^{-1}G_n\right)=$$
$$=\sum_j P_{jj}(G_b)=\chi(G_b).$$

§ 5.11. Соотношение ортогональности для характеров неприводимых представлений

В случае неприводимых представлений для вывода соотношений между характерами мы можем воспользоваться соотношением ортогональности (5.9.8), положив $p=i$, $q=j$ и просуммировав левую и правую части по i,j, получим

$$\sum_{a=1}^{g}\sum_i P_{ii}^{(\alpha)}(G_a)\sum_j P_{jj}^{(\beta)}(G_a)^* = g\delta_{\alpha\beta},$$

откуда с учётом (5.10.1)

$$\sum_{a=1}^{g}\chi^{(\alpha)}(G_a)\chi^{(\beta)}(G_a)^* = g\delta_{\alpha\beta}, \tag{5.11.1}$$

получим *соотношение ортогональностей для характеров*.

Объединяя сопряжённые элементы в классы E_p, содержащие по c_p элементов, то (5.11.1) можно переписать в виде

$$\sum_{p=1}^{g} c_p\chi_p^{(\alpha)}\chi_p^{(\beta)^*} = g\delta_{\alpha\beta}, \tag{5.11.2}$$

где суммирование проводится по n классам G_p группы G. В частности, при $\alpha=\beta$ получим

$$\sum_{a=1}^{g} \left|\chi^{(\alpha)}(G_a)\right|^2 = \sum_{p=1}^{n} c_p \left|\chi_p^{(\alpha)}\right|^2 = g\,. \qquad (5.11.3)$$

Характеры χ в (5.11.2) мы можем рассматривать как векторы с компонентами $(c_p)^{\frac{1}{2}} \chi_p$ в векторном пространстве размерности n, где n - число классов в группе G. В этом пространстве характеры неприводимых представлений образуют набор ортогональных векторов и, таким образом, мы видим, что число неэквивалентных неприводимых представлений не может превышать числа классов группы.

Для иллюстрации ортогональности характеров неприводимых представлений воспользуемся примером из §4.5, п.6 и §5.3, п.5. Характеры $\chi_p^{(\alpha)}$ для каждого класса p и каждого неприводимого представления α сведём в таблицу 5.11.1, которая теперь будет содержать меньше столбцов (по одному на каждый класс, а не на каждый элемент группы). При использовании соотношений ортогональности для характеров следует не забывать включать число c_p групповых элементов в каждом классе.

Таблица 5.11.1.

	$E_1(E)$	$E_2(R_1,R_2)$	$E_3(R_3,R_4,R_5)$
$P^{(1)}$	1	1	1
$P^{(2)}$	1	1	-1
$P^{(3)}$	2	-1	0

§5.12. Приведение представлений с помощью характеров групп

В §§ 5.7 и 5.8 мы установили, как в принципе можно привести произвольное представление P к его неприводимым составляющим. Просуммировав диагональные элементы матрицы представления P по формуле (5.8.1), мы увидим, что характер представления χ связан с характерами неприводимых представлений таким же соотношением. Если характер представления P для элементов класса E_p обозначить через χ_p, то получим

$$\chi_p = \sum_{\alpha} m_\alpha \chi_p^{(\alpha)}, \tag{5.12.1}$$

где числа m_α показывают, сколько раз в разложении представления P встречается каждое неэквивалентное неприводимое представление $P^{(\alpha)}$. Если известны характеры представлений $\chi_p^{(\alpha)}$, то с помощью соотношения ортогональности (5.11.2) и формулы (5.12.1), получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{g}\sum_p c_p \chi_p^{(\beta)^*}\chi_p &= \frac{1}{g}\sum_\alpha m_\alpha \sum_p c_p \chi_p^{(\beta)^*}\chi_p^{(\alpha)} = \\ &= \frac{1}{g}\sum_\alpha m_\alpha g \delta_{\alpha\beta} = m_\beta .\end{aligned} \tag{5.12.2}$$

Это выражение для скалярного произведения характера χ на характер неприводимого представления $\chi^{(\beta)}$ аналогично формуле $x^i = (e_i, x)$ для «компоненты» m_β характера χ в направлении «вектора» $\chi^{(\beta)}$. В качестве иллюстрации снова обратимся к примеру из §5.3, п.5 и рассмотрим трёхмерное представление P. Его характер равен (3,0,-1), где числа соответствуют χ_p для трёх классов группы D_3 и взяты в том же порядке, в котором эти классы расположены в таблице 5.11.1. Записав в обозначениях таблицы

$$P = m_1 P^{(1)} \oplus m_2 P^{(2)} \oplus m_3 P^{(3)},$$

с учётом (5.12.2) получим

$$m_1 = \frac{1}{6}(3+0-3) = 0,$$

$$m_2 = \frac{1}{6}(3+0+3) = 1,$$

$$m_3 = \frac{1}{6}(6+0+0) = 1 .$$

Таким образом, мы видим, что представление P приводится к сумме представлений $P^{(2)}$ и $P^{(3)}$. Это почти очевидно, так как такое разложение следует из самого вида матриц. Отметим, что величины m_α должны быть целыми положительными числами или нулями.

§5.13. Критерий неприводимости

По характеру представлений можно судить, приводимо оно или нет. В §5.11 мы показали, что если представление χ неприводимо, то

$$\sum_p c_p \left|\chi_p\right|^2 = g . \tag{5.13.1}$$

можно также показать, что если выполняется (5.13.1), то представление χ неприводимо, то есть (5.13.1) – есть необходимое и достаточное условие. Для доказательства этого объединим равенства (5.11.1)-(5.11.3) в соотношение

$$\sum_p c_p \left|\chi_p\right|^2 = \sum_{\alpha\beta p} c_p m_\alpha m_\beta \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)^*} = g \sum_\alpha m_\alpha^2 . \tag{5.13.2}$$

Отсюда следует, если справедливо условие (5.13.1), то $\sum\limits_\alpha m_\alpha^2 = 1$, а так как все m_α целые, то все числа m_α равны нулю, кроме одного из них, которое мы обозначим через m_γ, такое, что $m_\gamma = 1$. Таким образом мы видим, что $P = P^{(\gamma)}$, которое есть неприводимое представление.

В качестве примера можно показать, что двумерное представление $P^{(3)}$ группы D_3 неприводимо, так как из таблицы 5.11.1 следует

$$\sum_p c_p \left|\chi_p\right|^2 = (4+2+0) = 6 = g .$$

§5.14. Число неэквивалентных неприводимых представлений, регулярное представление

В §5.11 мы показали, что число неэквивалентных неприводимых представлений конечной группы G не может превышать числа классов в этой группе. В примере группы D_3 из таблицы 5.11.1 видно, что имеется три неэквивалентных неприводимых представления. В группе D_3 имеется только три класса, что даёт нам основание предположить, что $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$ - все возможные для группы D_3 неэквивалентные неприводимые представления. Точное число неэквивалентных неприводимых представлений желательно знать заранее. С помощью довольно искусственного приёма, заключающегося в построении представления, размерность которого равна числу элементов группы g, мы покажем что оно всегда равно числу классов в группе. Такое представление называется *регулярным* и обозначается через $P^{(R)}$.

Матрицы $P^{(R)}(G_a)$ данного регулярного представления определяются соотношением

$$G_a G_b = \sum_c P^{(R)}_{cb}(G_a) G_c \,. \qquad (5.14.1)$$

Покажем, что матрицы $P^{(R)}(G_a)$ образуют представление. Умножая обе части (5.14.1) на некоторый (произвольный) групповой элемент G_d, получим

$$\begin{aligned} G_d G_a G_b &= \sum_c P^{(R)}_{cb}(G_a) G_d G_c = \\ &= \sum_c \sum_e P^{(R)}_{cb}(G_a) P^{(R)}_{ec}(G_d) G_e = \\ &= \sum_e \left[\sum_c P^{(R)}_{ec}(G_d) P^{(R)}_{cb}(G_a) \right] G_e. \end{aligned}$$

С другой стороны

$$G_d G_a G_b = (G_d G_a) G_b = \sum_e P_{eb}^{(R)} (G_d G_a) G_e \; .$$

Сравнивая два последних равенства, получим

$$P^{(R)}(G_d G_a) = P^{(R)}(G_d) P^{(R)}(G_a) \qquad (5.14.2)$$

условие (5.1.1), которым определяется представление. Учитывая, что произведение $G_a G_b$ также является элементом группы, сумма в правой части равенства (5.14.1) содержит только один член. Таким образом, при данных a и b все матричные элементы $P_{cb}^{(R)}(G_a)$ обращаются в нуль, кроме соответствующего одному значению c, который равен 1. Таким образом, все столбцы матрицы $P^{(R)}(G_a)$ из нулей и одной единицы и эта единица будет располагаться на диагонали только тогда, когда G_a есть единичный элемент E. Характеры регулярного представления будут равны нулю для всех элементов, кроме единичного, для которого характер равен размерности представления g, то есть

$$\chi^{(R)}(G_a) = 0 \, , \;\; G_a \neq E \, , \;\; \chi^{(R)}(E) = g \; . \qquad (5.14.3)$$

С учётом (5.12.2) и (5.14.3) получим

$$m_\alpha = \frac{1}{g} \sum_a \chi^{(\alpha)}(G_a)^* \chi^{(R)}(G_a) = \frac{1}{g} g \chi^{(\alpha)}(E) = s_\alpha \, , \qquad (5.14.4)$$

где s_α - размерность неприводимого представления $P^{(\alpha)}$.

Таким образом, неприводимые представления $P^{(\alpha)}$ встречаются в разложении регулярного представления столько раз, какова его размерность s_α, а это означает, что *регулярное представление должно содержать все неприводимые представления*.

Приравняв размерность g представления $P^{(R)}$ суммарной размерности его составляющих, получим важный для дальнейших приложений результат

$$g = \sum_\alpha m_\alpha s_\alpha = \sum_\alpha s_\alpha^2 \; . \qquad (5.14.5)$$

Соотношение (5.14.4) относится к регулярному представлению, а форма (5.14.5) выражает общее свойство группы, а именно то, что сумма квадратов размерностей всех возможных неэквивалентных неприводимых представлений группы равна числу её элементов. Теперь на основании равенства (5.14.5) мы можем доказать, что число неэквивалентных неприводимых представлений группы равно числу классов этой группы.

Ранее мы показали, что матричные элементы $P_{ij}^{(\alpha)}(G_a)$ можно рассматривать как компоненты некоторого набора взаимно ортогональных векторов $P_{ij}^{(\alpha)}$ в g-мерном пространстве с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_g$. Общее число таких векторов определяется возможными значениями индексов i, j, α и равно $\sum_{\alpha} s_{\alpha}^2$ по всем неэквивалентным неприводимым представлениям и, как только что было показано, эта сумма равна g. Таким образом число ортогональных векторов $P_{ij}^{(\alpha)}$ равно размерности пространства и, стало быть, векторы $P_{ij}^{(\alpha)}$ должны образовать пространство. Любой вектор x в этом пространстве можно представить в виде линейной комбинации векторов $P_{ij}^{(\alpha)}$:

$$x = \sum_{\alpha ij} c(\alpha_{ij}) P_{ij}^{(\alpha)}, \tag{5.14.6}$$

а его компоненты x_a в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_g$ в виде

$$x_a = \sum_{\alpha ij} c(\alpha_j) P_{ij}^{(\alpha)}(G_a). \tag{5.14.7}$$

Выделим только те векторы x, которые имеют одинаковые «проекции» на все «направления» $e_1, e_2, \ldots, e_g$; они соответствуют элементам одного и того же класса группы G, то есть $x_c = x_a$, если $G_c = G_b^{-1} G_a G_b$ для любого G_b из G. Поэтому можно записать

$$x_a = \frac{1}{g} \sum_{b=1}^{g} x_c =$$

$$= \frac{1}{g}\sum_b \sum_{\alpha ij} c(\alpha_{ij}) P_{ij}^{(\alpha)}\left(G_b^{-1} G_a G_b\right) = \quad (\text{где } G_c = G_b^{-1} G_a G_b) \quad (5.14.7)$$

$$= \frac{1}{g}\sum_b \sum_{\alpha ij} \sum_{kl} c(\alpha_{ij}) P_{ik}^{(\alpha)}\left(G_b^{-1}\right) P_{kl}^{(\alpha)}(G_a) P_{lj}^{(\alpha)}(G_b) = \quad (5.14.8)$$

$$= \frac{1}{g}\sum_{\alpha ij} \sum_{kl} c(\alpha_{ij}) P_{kl}^{(\alpha)}(G_a) \delta_{ij}\delta_{kl} \frac{g}{s_\alpha} = \quad (\text{с учётом } (5.9.6))$$

$$= \sum_\alpha \frac{1}{s_\alpha} \sum_i c(\alpha_{ii}) \chi^{(\alpha)}(G_a).$$

Эти векторы x образуют подпространство размерности n, где n - число классов, и формула (5.14.8) показывает, что характеры, являющиеся набором ортонормированных векторов в этом подпространстве, также образуют его базис. Отсюда вытекает, что должно быть ровно n таких характеров $\chi^{(\alpha)}$, то есть число неэквивалентных неприводимых представлений равно n - числу классов группы G, что и требовалось доказать.

§5.15. Второе соотношение ортогональности для характеров групп

Равенство числа классов числу неэквивалентных неприводимых представлений означает, что таблица характеров, в которой столбцы соответствуют классам, а строки – неприводимым представлениям, должна быть квадратной. В соответствии с соотношением ортогональности (5.11.1), (5.11.2) любые две строки в такой таблице ортогональны, и таким образом можно сделать заключение о том, что и для двух произвольных столбцов таблицы также существует соотношение ортогональности.

Для вывода этого соотношения построим матрицу B размерности $n \times n$, элементы которой таковы:

$$B_{\alpha p} = \left(\frac{c_p}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \chi_p^{(\alpha)}, \quad (5.15.1)$$

где n - число классов, а также число неэквивалентных неприводимых представлений. Из соотношения ортогональности (5.11.1), (5.11.2) следует, что при любых α и β

$$\sum_p B_{\beta p} B^*_{\alpha p} = 1 \qquad (5.15.2)$$

или, в матричной форме, $BB^+ = 1$. Поскольку матрица B квадратная, то модуль её детерминанта равен единице и существует обратная матрица B^{-1} и $B^{-1} = B^+$, и $B^+B = 1$, что для матричных элементов означает

$$\sum_\alpha B^*_{\alpha p} B_{\alpha q} = \delta_{pq}\,. \qquad (5.15.3)$$

Вернувшись к характерам группы, получим

$$\sum_\alpha \chi_p^{(\alpha)*} \chi_q^{(\alpha)} = \frac{g}{c_p}\delta_{pq}\,, \qquad (5.15.4)$$

то есть соотношение ортогональности для столбцов таблицы характеров.

§5.16. Построение таблицы характеров

Выпишем свойства характеров неприводимых представлений:

1. Число неприводимых представлений равно числу классов.

2. Размерность s_α неприводимых представлений должна удовлетворять равенству $\sum_\alpha s_\alpha^2 = g$, которое во многих случаях даёт для s_α единственное решение. Учитывая, что характер единичного элемента E равен размерности представления, числа в первом столбце таблицы характеров – это просто целые числа s_α.

3. Для каждой группы существует одномерное тождественное представление, для которого $P(G_a)=1$ и, следовательно, $\chi(G_a)=1$. Этим определяется первая строка таблицы характеров.

4. Строки взаимно ортогональны с весами c_p и нормированы к g, то есть

$$\sum_p c_p \chi_p^{(\alpha)} \chi_p^{(\beta)^*} = g\delta_{\alpha\beta}. \qquad (5.11.1)$$

в частности, если β - тождественное представление, то для всех представлений α, не совпадающих с тождественным,

$$\sum_p c_p \chi_p^{(\alpha)} = 0. \qquad (5.16.1)$$

5. Столбцы таблицы взаимно ортогональны и нормированы к $\dfrac{g}{c_p}$:

$$\sum_\alpha \chi_p^{(\alpha)} \chi_q^{(\alpha)^*} = \frac{g}{c_p}\delta_{pq}. \qquad (5.15.4)$$

в частности, если в качестве класса E_q выбран единичный элемент E, для всех остальных столбцов имеем

$$\sum_\alpha s_\alpha \chi_p^{(\alpha)} = 0. \qquad (5.16.2)$$

Таким образом, следуя приведённым выше свойствам характеров неприводимых представлений, можно построить таблицу характеров неприводимых представлений для простейших групп. Всё, что при этом требуется знать о группе, - это её порядок g, число классов и число элементов в каждом классе. Для более сложных групп такой информации оказывается уже недостаточно. В этом случае для вывода дополнительных соотношений между характерами требуется обратиться к групповой таблице умножения или же, если группа содержит нормальную подгруппу, её представления могут быть выведены из представлений нормальной подгруппы. Для большинства физических приложений теории групп достаточно лишь просто взглянуть на таблицу характеров группы.

§5.17. Ортогональность базисных функций неприводимых представлений

В данном параграфе мы рассмотрим свойства базисных векторов пространства, в котором задано неприводимое представление. Учитывая, что конечной целью является изучение приложений теории симметрии в квантовой механике, мы в качестве базисных векторов рассмотрим функции $\psi_i^{(\alpha)}$ представления $P^{(\alpha)}$ (§5.3, п.7). Аргумент функции $\psi_i^{(\alpha)}$ мы для краткости опускаем, $i = 1, \ldots, s_\alpha$.

Предположим, что мы имеем инвариантное функциональное пространство, которое является ещё и неприводимым, так что представление, индуцированное в нём некоторыми групповыми операциями, является неприводимым представлением. В этом случае мы вправе воспользоваться свойствами ортогональности неприводимых представлений (5.9.8), чтобы установить ортогональность базисных функций, принадлежащих двум неэквивалентным неприводимым представлениям.

Пусть функция $\varphi_i^{(\alpha)}$ преобразуется по i-ой строке неприводимого представления $P^{(\alpha)}$, другими словами,

$$P(G_a)\varphi_i^{(\alpha)} = \sum_l P_{li}^{(\alpha)}(G_a)\varphi_l^{(\alpha)}, \tag{5.17.1}$$

и пусть функция $\psi_j^{(\beta)}$ преобразуется по j-ой строке неприводимого представления $P^{(\beta)}$. Предположим, что при некотором определении скалярного произведения, применяемом ко всем рассматриваемым функциям, операторы $P(G_a)$ унитарны, то есть для всякого элемента G_a группы

$$\left(\varphi_i^{(\alpha)} \middle| \psi_j^{(\beta)}\right) = \left(P(G_a)\varphi_i^{(\alpha)} \middle| P(G_a)\psi_j^{(\beta)}\right) =$$
$$= \sum_{l,m} P_{li}^{(\alpha)^*}(G_a) P_{mj}^{(\beta)}(G_a)\left(\varphi_l^{(\alpha)} \middle| \psi_m^{(\beta)}\right),$$

предполагая далее, что базисные векторы каждого представления выбраны ортонормированными, мы можем воспользоваться соотношением ортогональностей (5.9.8) и усредняя по всем групповым элементам получим

$$\left(\varphi_i^{(\alpha)}\middle|\psi_j^{(\beta)}\right)=\frac{1}{g}\sum_{\alpha,l,m}P_{li}^{(\alpha)^*}(G_a)P_{mj}^{(\beta)}(G_a)\left(\varphi_l^{(\alpha)}\middle|\psi_m^{(\beta)}\right)=$$
$$=\frac{1}{s_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\sum_l\left(\varphi_l^{(\alpha)}\middle|\psi_m^{(\alpha)}\right) \tag{5.17.2}$$

Это значит, что любые две функции, преобразующиеся по унитарным неприводимым представлениям, взаимно ортогональны, если только не принадлежат одной и той же строке одного и того же неприводимого представления.Значение этого важного результата заключается не столько во взаимной ортогональности базисных функций одного и того же неприводимого представления (множитель δ_{ij} при $\varphi\equiv\psi$), так как это в принципе вопрос выбора функций, сколько в ортогональности базисных функций, относящихся к разным строкам эквивалентных представлений или к неэквивалентным представлениям (множитель $\delta_{\alpha\beta}$). Последний результат совершенно не зависит от выбора базиса в каждом из представлений. Из равенства (5.17.2) следует, что скалярное произведение $\left(\varphi_i^{(\alpha)}\middle|\psi_i^{(\alpha)}\right)$ не зависит от i - в частности, функции $\varphi_i^{(\alpha)}$ для данного α, удовлетворяющие условию (5.17.1), имеют одинаковую норму.

Одним из особых следствий из соотношения (5.17.2) является то обстоятельство, что если $P^{(\alpha)}$ - тождественное представление, то данное скалярное произведение обращается в нуль для всех представлений $P^{(\beta)}$, кроме тождественного. Если под скалярным произведением понимать интегрирование по координатам и положить $\varphi_i^{(\alpha)}=1$ (постоянная функция), мы получим

$$\int\psi_j^{(\beta)}dV=0, \tag{5.17.3}$$

если только $P^{(\beta)}$ не является тождественным представлением. Это означает, что интегральная инвариантная характеристика функции, преобразующаяся по неприводимому представлению, обращается в нуль, если только сама функция не инвариантна. Так как любую функцию можно разложить на неприводимые компоненты, это означает, что после интегрирования из всех компонент останутся только инвариантные.