Глава VI
Алгебры Ли

В математической физике часто приходится решать уравнения на собственные значения:

$$L\psi = \lambda\psi \,, \qquad (*)$$

где L - линейный оператор, как правило, интегральный или дифференциальный (оператор Лапласа, оператор Гамильтона). Если некоторый оператор F перестановочный с L, то его изучение даёт обычно глубокую информацию о собственных векторах оператора L. Если операторы F_1, F_2 перестановочны с L, то этим же свойством обладают их произведение и произвольные линейные комбинации. В таком случае говорят, что множество всех операторов, перестановочных с L, образует алгебру, которая носит название *коммутаторной алгебры оператора* L. Если оператор F - элемент коммутаторной алгебры и ψ - решение (*), мы можем написать:

$$L(F\psi) = FL\psi = \lambda(F\psi). \qquad (**)$$

Мы видим, что вектор $F\psi$ также является собственным вектором относительно L, с тем же собственным значением, что и ψ. Это означает, что пространство всех собственных векторов с собственным значением λ инвариантно относительно F и, следовательно, инвариантно также по отношению ко всей коммутаторной алгебре оператора L.

Если H - оператор Гамильтона в квантовой механике и F - оператор физической величины, зависящей от времени, то эта зависимость может быть выражена уравнением $\dfrac{\partial F}{\partial t} = FH - HF$. Тогда, если F перестановочен с H, то $\frac{\partial F}{\partial t}=0$. Такие физические величины играют роль сохраняющихся «интегралов движения» (энергия, заряд, момент импульса) и играют исключительно важную роль в изучении поведения физических систем.

Отметим, так же, что вопросы, связанные с коммутаторной алгеброй, могут быть положены в основу теории представлений; в частности, они позволяют раскрыть основные закономерности, связанные с понятием неприводимости.

В данной главе мы рассмотрим коммутаторную алгебру Ли в несколько изменённом виде, что связано с необходимостью использования эрмитовых операторов.

§6.1. Основные понятия и общие свойства

Для любых двух операторов A, B в пространстве $C(n)$ можно составить их *коммутатор* – оператор

$$[A,B]=AB-BA \tag{6.1.1}$$

называемый *произведением Ли*. Систему операторов $\mathbf{A}$ в $C(n)$ будем называть *алгеброй Ли*, если $\mathbf{A}$ обладает следующими свойствами:

1. Сумма двух операторов из $\mathbf{A}$ есть опять оператор из $\mathbf{A}$.

2. Для любого оператора A из $\mathbf{A}$ и любого действительного числа λ оператор λA также принадлежит $\mathbf{A}$.

3. Если A, B - операторы из $\mathbf{A}$, то оператор $\frac{1}{i}[A,B]$ принадлежит $\mathbf{A}$.

Замечание

Введение множителя $\frac{1}{i}$ в п.3 мотивируется тем, что для эрмитовых операторов A, B коммутатор $C=[A,B]$ - *антиэрмитов* оператор, для которого $\overset{+}{C}=-C$, тогда как наиболее важные в физических приложениях системы операторов состоят из эрмитовых операторов. Чтобы превратить коммутирование в операцию, не выводящую за пределы такой системы, коммутатор умножают на $\frac{1}{i}$ и тогда антиэрмитовы операторы переходят в эрмитовы.

Теперь перестановочные соотношения между операторами системы можно записать так:

$$[A,B]=iC\ , \tag{6.1.2}$$

где все три оператора A,B,C - *эрмитовы*.

§6.2. Изоморфизм алгебр Ли

Алгебры Ли $\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2$ *изоморфны*, если существует взаимно однозначное отображение

$$\varphi:\mathbf{A}_1\to\mathbf{A}_2 \tag{6.2.1}$$

такое, что

$$\varphi(A+B)=\varphi(A)+\varphi(B), \tag{6.2.2}$$

$$\varphi(\lambda A)=\lambda\varphi(A) \quad (\lambda \text{ действительно}), \tag{6.2.3}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{i}[A,B]\right)=\frac{1}{i}[\varphi(A),\varphi(B)]. \tag{6.2.4}$$

φ называется при этом *изоморфизмом* алгебр Ли.

§6.3. Свойства коммутаторов алгебры Ли

1. Свойство *антикоммутативности*:

$$[A,B]=-[B,A], \tag{6.3.1}$$

прямо вытекающее из определения произведения Ли (6.1.1).

В частности, при $A=B$ получим

$$[A,A]=0\ . \tag{6.3.2}$$

2. *Тождества Якоби*

$$[AB,C]=[A,C]B+A[B,C], \qquad (6.3.3)$$

легко доказываемые прямой проверкой:

$$[AB,C]=ABC-CAB=(ACB-CAB)+$$

$$+(ABC-ACB)=[A,C]B+A[B,C].$$

Аналогично доказывается тождество

$$[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0\,, \qquad (6.3.4)$$

заменяющее свойство ассоциативности, которым не обладает умножение Ли (6.1.1).

§6.4. Задание алгебры Ли с помощью образующих и соотношений

Конечная система операторов $L_1, L_2, ..., L_s$ из $\mathbf{A}$ называется системой *образующих* (или *генераторов*) $\mathbf{A}$, если каждый оператор из $\mathbf{A}$ может быть представлен как линейная комбинация образующих операторов с действительными коэффициентами:

$$A=\sum_{j=1}^{s} a^j L_j = a^j L_j\,. \qquad (6.4.1)$$

Полагая образующие линейно независимыми, мы можем считать разложение (6.4.1) однозначным, так как коэффициенты вполне определяются оператором A. Каждая алгебра Ли имеет систему образующих, которая может быть выбрана бесконечным множеством способов.

Разлагая по L_l коммутатор образующих L_i, L_k, получим

$$\frac{1}{i}[L_i, L_k]=\sum_{l=1}^{s} c_{ik}^l L_l = c_{ik}^l L_l\,. \qquad (6.4.2)$$

Равенства (6.4.2) называются *перестановочными соотношениями*, а постоянные c_{ik}^l - *структурными константами* алгебры Ли; они позволяют вычислить коммутатор любых двух операторов этой алгебры.

Выражая A и B в виде (6.4.1), имеем

$$\frac{1}{i}[A,B]=\sum_{i,k=1}^{s}a^i b^k\cdot\frac{1}{i}[L_i,L_k]=\sum_{i,k,l=1}^{s}a^i b^k c_{ik}^l L_l=a^i b^k c_{ik}^l L_l\,. \quad (6.4.3)$$

Таким образом, если указаны структурные константы, мы полностью знаем закон коммутирования в алгебре Ли. Выражения (6.3.1),(6.3.2) и (6.3.4) накладывают на структурные коэффициенты c_{ik}^l ограничения и они не могут быть заданы произвольно. Применяя перечисленные выше выражения к операторам L_j нетрудно получить:

$$c_{ii}^l=0\,, \quad (6.4.4)$$

$$c_{ik}^l=-c_{ki}^l\,, \quad (6.4.5)$$

$$c_{ik}^l c_{lp}^q+c_{kp}^l c_{li}^q+c_{pi}^l c_{lk}^q=0\,. \quad (6.4.6)$$

Несмотря на своё название, структурные константы не являются постоянными. При замене базиса в алгебре $\mathbf{A}$ c_{ik}^l преобразуются как тензор третьего ранга с одним контравариантным и двумя ковариантными индексами.

Всякая алгебра Ли может быть задана указанием структурных констант, удовлетворяющих соотношениям (6.4.4) – (6.4.6), по которым можно найти коммутатор любых операторов алгебры по правилу (6.4.3). Мы будем задавать алгебры Ли указанием образующих L_j и соотношений (6.4.2). Выбор тех или иных образующих в алгебре Ли диктуется соображениями удобства вычислений, при этом следует стремится к наибольшей простоте структурных констант. Может оказаться так, что удачно выбранные образующие допускают физическое толкование. Надо помнить, что нельзя отождествлять алгебру Ли с системой её образующих и соотношений, так как её можно задать и с помощью других образующих.

§6.5. Подалгебры Ли

Если алгебра Ли $\mathbf{A}$ является подмножеством алгебры Ли $\mathbf{A}'$, то $\mathbf{A}$ называется *подалгеброй* $\mathbf{A}'$. Выбрав в $\mathbf{A}$ систему образующих $L_1,L_2,\ldots,L_s$, мы можем её дополнить до системы образующих $\mathbf{A}'$; тогда перестановочные соотношения (6.4.2) подалгебры $\mathbf{A}$ составляют часть перестановочных соотношений алгебры $\mathbf{A}'$. Обратно, пусть задана система образующих в алгебре Ли $\mathbf{A}'$, часть которой составляют $L_1, L_2, \ldots, L_s$, причём правые части перестановочных соотношений для $L_1, L_2, \ldots, L_s$ являются линейными комбинациями этих же образующих. Тогда всевозможные линейные комбинации $L_1, L_2, \ldots, L_s$ с действительными коэффициентами составляют подалгебру в $\mathbf{A}'$.

§6.6. Примеры алгебр Ли

1. $AGL(n, C)$ состоит из всех операторов в $C(n)$; это алгебра Ли, образующие которой могут быть выбраны следующим образом. Пусть B_k^i есть матрица, у которой элемент на пересечении k - й строки и i - го столбца равен единице, а все остальные – нулю. *Индексы означают теперь нумерацию матриц, а не матричных элементов*; поэтому для записи этих последних перейдём к следующему обозначению: пусть элемент матрицы B на пересечении μ -й строки и ν -го столбца будет $(\mu|B|\nu)$.

Тогда

$$\left(\mu\middle|B_k^i\middle|\nu\right) = \delta_\nu^i \delta_k^\mu , \tag{6.6.1}$$

$$\left(\mu\middle|\left[B_k^i, B_m^l\right]\middle|\nu\right) = \left(\mu\middle|B_k^i B_m^l - B_m^l B_k^i\middle|\nu\right) =$$

$$= \delta_\lambda^i \delta_k^\mu \delta_\nu^l \delta_m^\lambda - \delta_\lambda^l \delta_m^\mu \delta_\nu^i \delta_k^\lambda = \delta_m^i \left(\mu\middle|B_k^l\middle|\nu\right) - \delta_k^l \left(\mu\middle|B_m^i\middle|\nu\right), \tag{6.6.2}$$

или

$$\left[B_k^i, B_m^l\right] = \delta_m^i B_k^l - \delta_k^l B_m^i . \tag{6.6.3}$$

Это и есть перестановочные соотношения для образующих B_k^i. Деление обеих частей на i даёт структурные константы.

Любой оператор разлагается по B_k^i с комплексными коэффициентами, или по B_k^i, iB_k^i - с действительными коэффициентами. Таким образом, полную систему образующих алгебры Ли $AGL(n,C)$ составляют B_k^i, iB_k^i.

2. $ASL(n,C)$ состоит из всех бесследных операторов в $C(n)$. В качестве образующих возьмём *матрицы Окубо*

$$A_k^i = B_k^i - \frac{1}{n}\delta_k^i\left(B_1^1 + B_2^2 + \ldots + B_n^n\right), \tag{6.6.4}$$

для которых $SpA_k^i = 0$ и матрицы связаны одной линейной зависимостью

$$A_1^1 + A_2^2 + \ldots + A_n^n = 0. \tag{6.6.5}$$

Любой бесследный оператор разлагается по A_k^i с комплексными коэффициентами, или по A_k^i, iA_k^i - действительными коэффициентами.

Чтобы разложить n - рядную бесследную матрицу M по этим образующим, выразим её сначала через B_k^i:

$$M = \omega_i^k B_k^i = \omega_i^k\left(A_k^i + \frac{1}{n}\delta_k^i B_l^l\right).$$

Так как $SpM = 0$, то

$$\omega_k^i\left(SpA_k^i + \frac{1}{n}\delta_k^i n\right) = \omega_l^l = 0,$$

$$M = \omega_i^k A_k^i, \tag{6.6.6}$$

где коэффициенты связаны соотношением

$$\omega_l^l = 0, \tag{6.6.7}$$

обеспечивающим однозначность их определения.

Так как матрицы B_k^i, B_l^l коммутируют друг с другом, то из (6.6.3), (6.6.4) следует, что

$$\left[A_k^i, A_m^l\right] = \delta_m^i B_k^l - \delta_k^l B_m^i. \qquad (6.6.8)$$

Подставляя в правую часть вместо B_k^l, B_m^i выражения из (6.6.4)

$$B_k^l = A_k^l + \frac{1}{n}\delta_k^l B_j^j, \; B_m^i = A_m^i + \frac{1}{n}\delta_m^i B_j^j,$$

получим:

$$\left[A_k^i, A_m^l\right] = \delta_m^i A_k^l - \delta_k^l A_m^i = \left(\delta_m^i \delta_r^l \delta_k^s - \delta_k^l \delta_{r\,m}^{i\,s}\right) A_s^r. \qquad (6.6.9)$$

3. $AU(n)$ состоит из всех эрмитовых операторов в $C(n)$. Каждая эрмитова матрица A представляется в виде

$$A = \omega_i^k B_k^i, \quad \omega_k^i = \overline{\omega}_i^k. \qquad (6.6.10)$$

Если записать ω_i^k в виде $\alpha_i^k + i\beta_i^k$, где α_i^k и β_i^k действительные числа, то A представится как линейная комбинация с действительными коэффициентами образующих $B_i^i, \left(B_k^i + B_i^k\right), \left(B_k^i - B_i^k\right)$. Иногда выгодно сохранить *неэрмитовы* образующие B_k^i, расширяя смысл понятия образующих; тогда для выражения A через эти «внешние» образующие приходится пользоваться комплексными коэффициентами ω_k^i, удовлетворяющими соотношениям $\omega_k^i = \overline{\omega}_i^k$:

$$A = \omega_k^i B_i^k, \quad \omega_k^i = \overline{\omega}_i^k. \qquad (6.6.11)$$

4. $ASU(n)$ состоит из всех бесследных эрмитовых операторов в $C(n)$. В качестве её «внутренних» образующих можно взять A_i^i, $\left(A_k^i + A_i^k\right)$, $i\left(A_k^i - A_i^k\right)$; по этим образующим бесследные эрмитовы матрицы разлагаются с действительными коэффициентами.

В силу (6.6.5), эти образующие зависимы; разложение можно сделать однозначным, потребовав, чтобы сумма коэффициентов при A_i^i

была равна нулю. Можно воспользоваться и «внешними» образующими A_k^i:

$$A = \omega_k^i A_k^i, \;\; \omega_k^i = \overline{\omega}_i^k, \;\; \omega_i^i = 0. \qquad (6.6.12)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, встречающиеся в физике.

5. $n = 2$. Паули предложил в качестве образующих для $AU(2)$ эрмитовы матрицы

$$\frac{1}{2}E(2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (6.6.13)$$

Всякая эрмитова матрица A разлагается по матрицам (6.6.13) с действительными коэффициентами, при этом, если A бесследна, то в разложение не входит $E(2)$.

Таким образом, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ представляют собой образующие для $ASU(2)$.

Составим «таблицу умножения» матриц Паули:

$$\sigma_1\sigma_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}i\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}i\sigma_3$$

Поступая аналогичным образом получим:

$$\sigma_1\sigma_3 = -\frac{1}{2}i\sigma_2, \quad \sigma_2\sigma_1 = -\frac{1}{2}i\sigma_3, \quad \sigma_2\sigma_3 = \frac{1}{2}i\sigma_1,$$

$$\sigma_3\sigma_1 = \frac{1}{2}i\sigma_2, \qquad \sigma_3\sigma_2 = -\frac{1}{2}i\sigma_1. \qquad (6.6.14)$$

Нетрудно показать, что

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \frac{1}{4}E(2). \qquad (6.6.15)$$

Используя «таблицу умножения» матриц Паули (6.6.14) получим перестановочные соотношения

$$[\sigma_1,\sigma_2]=i\sigma_3, \qquad [\sigma_2,\sigma_3]=i\sigma_1, \qquad [\sigma_3,\sigma_1]=i\sigma_2. \qquad (6.6.16)$$

Для $AGL(2,C)$ базис составляют образующие

$$b_1^1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ b_1^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ b_2^1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ b_2^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad (6.6.17)$$

Эрмитовы матрицы разлагаются по этим образующим согласно формулы

$$A=\alpha b_1^1+(\lambda-i\mu)b_1^2+(\lambda+i\mu)b_2^1+\beta b_2^2, \qquad (6.6.18)$$

где α,β,λ,μ - действительны.

Для бесследных матриц Окубо предложил образующие a_k^i:

$$a_1^1=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ a_1^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ a_2^1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ a_2^2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}, \qquad (6.6.19)$$

связанные соотношением

$$a_1^1+a_2^2=0. \qquad (6.6.20)$$

Используя соотношения (6.6.9) получим перестановочные соотношения для матриц Окубо:

$$\begin{aligned}
&[a_1^1,a_1^2]=\delta_1^1a_1^2-\delta_1^2a_1^1=a_1^2, && [a_2^2,a_1^2]=-a_1^2,\\
&[a_1^1,a_2^1]=-a_2^1, && [a_2^2,a_2^1]=a_2^1, \qquad (6.6.21)\\
&[a_1^1,a_2^2]=0, && [a_1^2,a_2^1]=a_1^1-a_2^2.
\end{aligned}$$

Для бесследных эрмитовых матриц имеем разложение

$$A_0=\alpha a_1^1+(\lambda+i\mu)a_1^2+(\lambda-i\mu)a_2^1+\beta a_2^2, \qquad (6.6.22)$$

где α,β,λ,μ действительны, а разложение однозначно при $\alpha+\beta=0$.

Связь между матрицами Паули и Окубо даётся формулами

$$a_1^2=\sigma_1+i\sigma_2, \qquad a_2^1=\sigma_1-i\sigma_2, \qquad a_1^1=-a_2^2=\sigma_3. \qquad (6.6.23)$$

6. $n = 3$. По аналогии с матрицами Паули, Гелл-Манн построил восемь бесследных эрмитовых матриц λ_i, которые вместе с $E(3)$ составляют систему независимых образующих для $AGL(3,C)$ с комплексными коэффициентами. Без $E(3)$ они являются образующими для бесследных матриц с комплексными коэффициентами и для бесследных эрмитовых матриц с действительными коэффициентами:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}. \qquad (6.6.24)$$

Выбор множителя в λ_8 объясняется тем, что при таком выборе получается простое выражение для следа произведения:

$$Sp(\lambda_i \lambda_j) = 2\delta_{ij}, \quad (i, j = 1,\ldots,8). \qquad (6.6.25)$$

Перестановочные соотношения для матриц Гелл-Манна, как нетрудно проверить, имеют вид

$$\left[\lambda_i, \lambda_j\right] = 2i\sum_k f_{ijk}\lambda_k \ , \qquad (6.6.26)$$

где f_{ijk} - действительные коэффициенты, антисимметричные относительно индексов i, j, k, то есть не меняющиеся (соответственно, меняющие знак) при чётной (соответственно, нечётной) перестановке индексов, в силу чего достаточно перечислить те f_{ijk}, у которых $i < j < k$ и которые отличны от нуля:

ijk	f_{ijk}	ijk	f_{ijk}	ijk	f_{ijk}
123	1	246	$\frac{1}{2}$	367	$-\frac{1}{2}$
147	$\frac{1}{2}$	257	$\frac{1}{2}$	458	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
156	$-\frac{1}{2}$	345	$\frac{1}{2}$	678	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

(6.6.27)

Громоздкость перестановочных соотношений (6.6.26), (6.6.27) делает применение матриц Гелл-Манна малоудобными. Поэтому Окубо выбрал «внешнюю» систему из девяти образующих A_j^i, состоящую не только из эрмитовых матриц:

$$A_1^1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}, \qquad A_2^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3^3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \tag{6.6.28}$$

Все эти матрицы бесследны и удовлетворяют одному линейному соотношению (6.6.5)

$$A_1^1 + A_2^2 + A_3^3 = 0\,. \tag{6.6.29}$$

Диагональные матрицы A_i^i эрмитовы.

Перестановочные соотношения для трёхрядных операторов Окубо представляют частный случай соотношений (6.6.9), где индексы пробегают значения 1,2,3:

$$\left.\begin{array}{l}\left[A_i^i, A_l^l\right] = 0, \quad \left[A_k^i, A_m^l\right] = 0 \quad (i \neq m, l \neq k), \\ \left[A_k^i, A_i^l\right] = A_l^k \quad (l \neq k), \\ \left[A_k^i, A_l^k\right] = -A_l^i \quad (i \neq l), \\ \left[A_k^i, A_i^k\right] = A_k^k - A_i^i. \end{array}\right\} \qquad (6.6.30)$$

Проверим выборочно справедливость соотношений (6.6.30), например

$$\left[A_1^2, A_2^1\right] = \delta_1^1 A_2^2 - \delta_2^2 A_1^1 = A_2^2 - A_1^1,$$
$$\left[A_2^1, A_1^3\right] = \delta_1^1 A_2^3 - \delta_2^3 A_1^1 = A_2^3,$$
$$\left[A_2^3, A_1^2\right] = \delta_1^3 A_2^2 - \delta_2^2 A_1^3 = -A_1^3.$$

Любая трёхрядная матрица разлагается по A_k^i, $E(3)$ согласно формуле (6.6.11), где надо выразить B_k^i через A_k^i и $B_1^1 + B_2^2 + B_3^3 = E(3)$ в соответствии с (6.6.4).

Любая трёхрядная *эрмитова* матрица разлагается по A_k^i и $E(3)$ по формуле (6.6.11), то есть однозначно выражается через матрицы Окубо и $E(3)$ в виде

$$\begin{aligned} A = \varepsilon E(3) + \alpha A_1^1 + \beta A_2^2 + \gamma A_3^3 + (\lambda + i\mu) A_1^2 + (\lambda - i\mu) A_2^1 + \\ + (\sigma + i\tau) A_1^3 + (\sigma - i\tau) A_3^1 + (\eta + i\zeta) A_2^3 + (\eta - i\zeta) A_3^2, \end{aligned} \qquad (6.6.31)$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 0$ и $\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \sigma, \tau, \eta, \zeta$ действительны. Если A - эрмитова бесследная матрица, то в разложении (6.6.31) $\varepsilon = 0$.

Связь между матрицами Окубо и матрицами Гелл-Манна даётся формулами

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_1 = A_1^2 + A_2^1,\\
&\lambda_2 = \frac{1}{i}\left(A_1^2 - A_2^1\right),\\
&\lambda_3 = A_1^1 - A_2^2,\\
&\lambda_4 = A_1^3 + A_3^1,\\
&\lambda_5 = \frac{1}{i}\left(A_1^3 - A_3^1\right),\\
&\lambda_6 = A_2^3 + A_3^2,\\
&\lambda_7 = \frac{1}{i}\left(A_2^3 - A_3^2\right),\\
&\lambda_8 = -\sqrt{3}A_3^3.
\end{aligned}\right\} \qquad (6.6.32)$$

7. $n = 4$. Дирак предложил 16 четырёхрядных эрмитовых матриц в качестве образующих для алгебры всех четырёхрядных матриц (с комплексными коэффициентами) или эрмитовых четырёхрядных матриц (с действительными коэффициентами). Чтобы получить эти матрицы, воспользуемся правилом тензорного произведения операторов (2.8.1); обозначая тем же знаком соответствующую операцию над матрицами, изображенную формулой (2.8.4), построим из двухрядных матриц Паули $\sigma_i(2)$ четырёхрядные матрицы:

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_i(4) = 2E(2)\otimes\sigma_i(2),\\
&\rho_i(4) = 2\sigma_i(2)\otimes E(2),\\
&i = 1,2,3,
\end{aligned}\right\} \qquad (6.6.33)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \rho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.6.34}$$

16 матриц $E(4), \sigma_i, \rho_i, \sigma_i \cdot \rho_k \quad (i,k = 1,2,3)$, линейно независимы и образуют базис для всех четырёхрядных матриц (с комплексными коэффициентами) и для всех четырёхрядных эрмитовых матриц (с действительными коэффициентами). Базис для бесследных матриц получаем, отбрасывая $E(4)$.

Чтобы разложить произвольную матрицу по указанному базису, обозначим базисные матрицы через $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{16}$, тогда

$$\frac{1}{4} Sp(\tau_i \tau_k) = \delta_{ik} \tag{6.6.35}$$

и коэффициенты разложения

$$\tau = \sum_{j=1}^{16} \varepsilon_j \tau_j \tag{6.6.36}$$

могут быть определены аналогично коэффициентам Фурье:

$$\varepsilon_j = \frac{1}{4} Sp(\tau\tau_j). \quad (6.6.37)$$

перестановочные соотношения для σ_i, ρ_k получаются по аналогии с (6.6.14):

$$[\sigma_i, \rho_k] = 0,\ [\sigma_i, \sigma_k] = 2i\varepsilon_{ikl}\sigma_l,\ [\rho_i, \rho_k] = 2i\varepsilon_{ikl}\rho_l, \quad (6.6.38)$$

где ε_{ikl} - числа, антисимметричные относительно индексов i,k,l, причём $\varepsilon_{123} = 1$:

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \qquad \varepsilon_{132} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{213} = -1. \quad (6.6.39)$$

перестановочные соотношения для других матриц Дирака могут быть так же получены из (6.6.14), например,

$$[\sigma_1\rho_1, \sigma_2\rho_3] = \sigma_1\sigma_2\rho_1\rho_3 - \sigma_2\sigma_1\rho_3\rho_1 = \sigma_3\rho_2 - \sigma_3\rho_2 = 0.$$

Образующие Дирака можно задать таблицей

$E(4)$	ρ_1	ρ_2	ρ_3
σ_1	$\sigma_1\rho_1$	$\sigma_1\rho_2$	$\sigma_1\rho_3$
σ_2	$\sigma_2\rho_1$	$\sigma_2\rho_2$	$\sigma_2\rho_3$
σ_3	$\sigma_3\rho_1$	$\sigma_3\rho_2$	$\sigma_3\rho_3$

. (6.6.40)

§6.7. Экспоненциальное отображение

Переход от групп Ли к алгебрам Ли представляет собой некоторое обобщение логарифмирования чисел, превращающего умножение в сложение. Рассмотрим построение «показательной функции» от матрицы и от оператора. Если C_i^j - n-рядная комплексная матрица, то определены её степени $C^2, C^3, \ldots$; обозначим через $(j|C^k|i)$ элемент матрицы C^k. Тогда для любых i, j, как можно показать, ряд

$$\delta_i^j + (j|C|i) + \frac{1}{2!}(j|C^2|i) + \ldots + \frac{1}{k!}(j|C^k|i) + \ldots \qquad (6.7.1)$$

сходится к сумме, которую мы обозначим как E_i^j. Матрица E_i^j называется *экспоненциалом* матрицы C_i^j: $E = e^C$. Разложение (6.7.1) можно записать в матричном виде с учётом того, что суммирование производится отдельно для каждого матричного элемента i, j:

$$E = e^C = E(n) + C + \frac{1}{2!}C^2 + \ldots + \frac{1}{k!}C^k + \ldots \qquad (6.7.2)$$

Предположим теперь, что C - оператор, действующий в $C(n)$. Тогда в базисах e и e' мы будем иметь матрицы $C_e, C_{e'}$, изображающие оператор C. По аналогии с (6.7.2) можем записать:

$$E_e = E(n) + C_e + \frac{1}{2!}C_e^2 + \ldots + \frac{1}{k!}C_e^k + \ldots,$$

$$E_{e'} = E(n) + C_{e'} + \frac{1}{2!}C_{e'}^2 + \ldots + \frac{1}{k!}C_{e'}^k + \ldots$$

В соответствии с (1.13.9) матрицы $C_e, C_{e'}$ подобны:

$$C_{e'} = UC_eU^{-1}, \qquad (6.7.3)$$

где U - некоторая унитарная матрица. Нетрудно проверить, что

$$(C_{e'})^k = (UC_eU^{-1})(UC_eU^{-1})\ldots(UC_eU^{-1}) = U(C_e)^kU^{-1},$$

откуда

$$E_{e'} = UE_eU^{-1}. \qquad (6.7.4)$$

Таким образом мы видим, что матрица $E_{e'}$ изображает в базисе e' тот же оператор, который матрица E_e изображает в базисе e и мы определили некоторый оператор E, однозначно соответствующий оператору C, который можно обозначить через e^C, а равенство (6.7.2) можно рассматривать как символическое определение оператора E.

Экспоненциальное отображение обладает следующими свойствами:

1. $\det\left(e^{C}\right)=e^{SpC}$; (6.7.5)

2. каков бы ни был C, e^{C} всегда – обратимый оператор; (6.7.6)

3. если $CD=DC$, то $e^{C+D}=e^{C}e^{D}$; (6.7.7)

4. $e^{\overset{+}{C}}=\left(e^{C}\right)^{+}$. (6.7.8)

Можно показать, что все операторы, близкие к $E(n)$, имеют «логарифмы» являющиеся малыми операторами.

Для более точной формулировки высказанного выше предположения, введём понятие окрестности оператора, обобщающее данное в §4.3.

Пусть B - произвольный оператор, действующий в $C(n)$. Пусть задано n^2 функций вида $C_i^j\left(t_1^1,t_2^1,...,t_n^n\right)$, определённых и непрерывных в кубе

$$\left|t_l^k\right|<\varepsilon, \quad k,l=1,2,...,n. \tag{6.7.9}$$

Таким образом, каждому набору $\left(t_l^k\right)$ соответствует матрица C_i^j и, при некотором фиксированном базисе, оператор. Предположим, что разным наборам соответствуют различные операторы, а нулевому набору (0,0,…,0) – данный оператор B. Тогда операторы $C_i^j\left(t_l^k\right)$ составляют *окрестность* оператора B. Здесь мы параметризуем *все* операторы, близкие к B, а не только принадлежащие к некоторой группе. «Кубическая» окрестность вида (4.3.1) может быть получена при

$$C_i^j\left(t_l^k\right)=B_i^j+t_i^j. \tag{6.7.10}$$

Имея в виду окрестности общей «формы», можно доказать следующее:

Существуют такая окрестность O_ε единичного оператора $E(n)$ и такая окрестность O_η нулевого оператора, что (6.7.2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между операторами C из O_η и

E *из* O_ε.

Предполагая, что E лежит в указанной окрестности O_ε, можно сопоставить E один и только один оператор C из O_η такой, что $e^C = E$. Это оператор можно назвать логарифмом E:

$$C = \ln E. \qquad (6.7.11)$$

Следует заметить, что операторам далёким от $E(n)$, нельзя поставить в соответствие единичный логарифм; например, операторы $z \cdot E(n)$, где z - комплексное число, имеют «логарифмами» все операторы вида

$$[\ln|z| + i(\arg z + 2\pi k i)] \cdot E(n), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

однозначный выбор аргумента z возможен лишь для z, близких к единице.

Для каждого обратимого оператора E существует такой (не однозначно определённый) оператор C, что $e^C = E$.

Покажем, что *если* A *- эрмитов оператор, то* e^{iA} *- унитарный оператор; если* A *- бесследный оператор, то* e^{iA} *- унимодулярный оператор.*

Пусть A эрмитов оператор, тогда $(iA)(iA)^+ = (iA)^+(iA)$ и, в соответствии с (6.7.7),

$$e^{iA+(iA)^+} = e^{iA} e^{(iA)^+}.$$

Учитывая, что $(iA)^+ = -iA$, из (6.6.8) получим

$$e^{iA}\left(e^{iA}\right)^+ = E(n).$$

Таким образом, $\left(e^{iA}\right)^+ = \left(e^{iA}\right)^{-1}$ и e^{iA} - унитарный оператор.

Можно показать, что *каждый* унитарный оператор имеет вид

$$U = e^{iA}, \qquad A^+ = A. \qquad (6.7.12)$$

Полученное равенство аналогично представлению комплексного числа z с модулем 1 в виде $e^{i\alpha}$, где α - действительное число. Если

$SpA = 0$, то из (6.7.5) вытекает, что $\det e^{iA} = 1$. В общем случае $A = A_0 + A_1$, где

$$SpA_0 = 0\,, \quad SpA_1 = SpA\,, \qquad A_1 = SpA \cdot E(n).$$

Таким образом,

$$e^{iA} = e^{iA_0} e^{iA_1}\,, \;\; e^{iA} = e^{iSpA} e^{iA_0}\,,$$

где e^{iA_0} - унимодулярный оператор.

Если $U = e^{iA}$ - унитарный оператор, получаем его каноническое представление через унимодулярный:

$$U = \det U \cdot U_0\,. \tag{6.7.13}$$

Посмотрим, насколько экспоненциальное отображение операторов похоже на показательную функцию от числа.

Условие (6.7.7) означает, что если слагаемые A, B коммутируют, то показательное отображение переводит сумму в произведение, что соответствует основному свойству показательной функции.

Если A, B не коммутируют и t мало, то с точностью первого порядка

$$e^{itA} = E(n) + itA, \;\; e^{itB} = E(n) + itB\,,$$

$$e^{it(A+B)} = E(n) + it(A+B) = e^{itA} e^{itB}\,. \tag{6.7.14}$$

С точностью до второго порядка

$$e^{itA} = E(n) + itA - \frac{1}{2} t^2 A^2\,,$$

$$e^{itB} = E(n) + itB - \frac{1}{2} t^2 B^2\,,$$

$$e^{it(A+B)} = E(n) + it(A+B) - \frac{1}{2} t^2 \left(A^2 + AB + BA + B^2\right),$$

$$e^{itA} e^{itB} = E(n) + it(A+B) - \frac{1}{2} t^2 \left(A^2 + 2AB + B^2\right),$$

$$e^{it(A+B)}e^{-itB}e^{-itA} = E(n) + \frac{1}{2}t^2[A,B]. \qquad (6.7.15)$$

Сохраняя в разложениях члены до второго порядка, нетрудно получить формулу

$$e^{itA}e^{itB}e^{-itA}e^{-itB} = e^{-t^2[A,B]}. \qquad (6.7.16)$$

§6.8. Группы Ли и алгебры Ли

В этом параграфе мы рассмотрим связи между группами Ли (см. §4.6) и алгебрами Ли.

Мы будем говорить, что *алгебра Ли* $\mathbf{A}$ *и группа Ли* G *экспоненциально связаны, если между их операторами существует соотношение: когда* A *пробегает алгебру Ли,* $U = e^{iA}$ *пробегает соответствующую ей группу Ли.*

В соответствии с приведённым выше определением, составим таблицу 6.8.1 соответствия групп и алгебр Ли.

Как можно заметить из таблицы размерность группы Ли совпадает с числом линейно независимых образующих соответствующей алгебры Ли. Указанная в таблице связь между группами и алгебрами Ли в общем случае носит локальный характер, то есть относится к окрестностям единичного и нулевого элемента.

§6.9. Подгруппы и подалгебры

Пусть $\mathbf{A}'$ - алгебра Ли, G' - соответствующая ей группа Ли, экспоненциально связанная с $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}$ - подалгебра $\mathbf{A}'$. Тогда для всевозможных операторов A из $\mathbf{A}$ операторы e^{iA} образуют группу G (см. таблицу 6.8.1), являющуюся подгруппой G'. Обратно, если дана подгруппа G группы G', то в алгебре $\mathbf{A}'$ существует подалгебра $\mathbf{A}$, с которой экспоненциально связана подгруппа G.

Таблица 6.8.1.

Группа Ли	Размерность	Матрицы Группы Ли	Алгебра Ли	Матрицы Алгебры Ли
$GL(n,C)$ Полная Линейная	$2n^2$	Обратимые: $\det \neq 0$	$AGL(n,C)$	Все
$GL(n,R)$ Действительная линейная	n^2	Действительные с $\det \neq 0$	$AGL(n,R)$	Чисто мнимые
$SL(n,C)$ Специальная линейная или унимодулярная	$2n^2-2$	Унимодулярные: $\det = 1$	$ASL(n,C)$	Бесследные: $Sp = 0$
$SL(n,R)$ Специальная действительная линейная	n^2-1	Действительные с $\det = 1$	$ASL(n,R)$	Чисто мнимые, $Sp = 0$
$SO(n)$ Специальная ортогональная	$\frac{n(n-1)}{2}$	Действительные: $\sum_j O_i^j O_k^j = \delta_{ik}$	$ASO(n)$	Чисто мнимые эрмитовы: $A_j^i + A_i^j = 0$ $\operatorname{Re} A_j^i = 0$
$U(n)$ Унитарная	n^2	Унитарные: $\sum_j \overline{U}_i^j U_k^j = \delta_{ik}$	$AU(n)$	Эрмитовы: $A_j^i - \overline{A}_i^j = 0$
$SU(n)$ Специальная унитарная	n^2-1	Унитарные унимодулярные: $\sum_j \overline{U}_i^j U_k^j = \delta_{ik}$ $\det = 1$	$ASU(n)$	Эрмитовы бесследные: $A_j^i - \overline{A}_i^j = 0$ $Sp = 0$

Часто подалгебру Ли $\mathbf{A}$ задают, выделив часть образующих $\mathbf{A}'$, для которых коммутаторы выражаются через те же образующие. Если известна группа Ли G_1, в алгебре Ли которой перестановочные соотношения имеют такой же вид, то подгруппа G группы G', экспоненциально связанная с $\mathbf{A}$, и группа G_1 имеют изоморфные алгебры Ли. В некоторых случаях из этого можно сделать следующий вывод: если G' есть одна и групп $SU(n)$ $(n \geq 2)$, а G_1 изоморфна $SU(n)$ с тем же n, то в описанной выше ситуации подгруппа G совпадает с G' и изоморфна G_1.

Таким образом, по виду перестановочных соотношений для подалгебры Ли можно иногда определить строение соответствующей подгруппы.

§6.10. Представления алгебр Ли

Пусть $\mathbf{A}$ - алгебра Ли. Будем считать, что дано k -рядное представление алгебры $\mathbf{A}$ (или гомоморфизм $\mathbf{A}$ в алгебру $AGL(n,C)$), если каждому оператору A из $\mathbf{A}$ поставлен в соответствие некоторый оператор $\tilde{P}(A)$, действующий в $C(k)$, причём сумме, кратному и коммутатору операторов из $\mathbf{A}$ соответствуют сумма, кратное и коммутатор операторов в $C(k)$:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{P}(A+B)=\tilde{P}(A)+\tilde{P}(B),\\
&\tilde{P}(\lambda A)=\lambda\tilde{P}(A),\\
&\tilde{P}\left(\frac{1}{i}[A,B]\right)=\frac{1}{i}\left[\tilde{P}(A),\tilde{P}(B)\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (6.10.1)$$

Все операторы вида $\tilde{P}(A)$, где A пробегает алгебру $\mathbf{A}$, составляют также некоторую алгебру Ли – подалгебру $AGL(k,C)$.

В теории элементарных частиц чаще всего работают с представлениями алгебр Ли, но учитывая их связь с представлениями групп Ли, мы можем ограничиться лишь изучением представлений групп Ли, указав закон, по которому *представление группы Ли порождает представление соответствующей ей алгебры Ли* и таким образом можно получить все представления алгебр Ли.

Пусть нам задано представление P группы Ли G k - рядными операторами. Представляющую группу обозначим через $P(G)$. Алгебру Ли, соответствующую группе G, обозначим через AG.

Если оператор A принадлежит AG, то e^{iA} принадлежит G. Рассмотрим однопараметрическую подгруппу G, состоящую из операторов e^{itA}, где t - действительное число.

Так как

$$P\left(e^{it_1A}\right)P\left(e^{it_2A}\right)=P\left(e^{it_1A}e^{it_2A}\right)=P\left(e^{i(t_1+t_2)A}\right),$$

оператор $P\left(e^{itA}\right)$ тоже образует однопараметрическую подгруппу группы $P(G)$. Можно показать, что в алгебре Ли группы $P(G)$ существует один, и только один, оператор $\tilde{A}$, порождающий эту подгруппу, то есть удовлетворяющий тождеству

$$P\left(e^{itA}\right)=e^{it\tilde{A}}. \tag{6.10.2}$$

Заметим (без доказательства), что $\tilde{A}$ есть коэффициент при it в разложении по степеням t оператора $P\left(e^{itA}\right)$ и (6.10.2) справедливо с точностью до малой высшего порядка относительно t.

Пусть

$$\tilde{A}=\tilde{P}(A), \tag{6.10.3}$$

тогда $\tilde{P}$ и есть представление алгебры Ли, порождённое заданным представлением группы Ли. Можно показать, что $\tilde{P}$ удовлетворяют определению представления (6.10.1). Проверим это, выполнив следующие нестрогие вычисления, пренебрегая малыми высших порядков относительно t.

Если

$$P\left(e^{itA}\right)=e^{it\tilde{A}}, \qquad P\left(e^{itB}\right)=e^{it\tilde{B}},$$

то по определению представления группы в соответствии с (6.7.15)

$$P\left(e^{it(A+B)}\right)=P\left(e^{itA}e^{itB}\right)=P\left(e^{itA}\right)P\left(e^{itB}\right).$$

С учётом (6.10.2) можем записать

$$e^{it(\widetilde{A+B})}=e^{it\tilde{A}}e^{it\tilde{B}}=e^{it\left(\tilde{A}+\tilde{B}\right)}$$

и тем самым

$$\tilde{P}(A+B)=\tilde{P}(A)+\tilde{P}(B).$$

Второе соотношение (6.10.1) доказывается аналогично.

Полагая

$$\frac{1}{i}[A,B]=C\,,\ \frac{1}{i}\left[\tilde{P}(A),\tilde{P}(B)\right]=D, \qquad \sqrt{t}=s\,,$$

с помощью (6.7.16) получим:

$$e^{it\tilde{P}(C)}=P\left(e^{itC}\right)=P\left(e^{-s^2[-A,B]}\right)=P\left(e^{-isA}e^{isB}e^{isA}e^{-isB}\right)=$$
$$=P\left(e^{is(-A)}\right)P\left(e^{isB}\right)P\left(e^{isA}\right)P\left(e^{is(-B)}\right)=$$
$$=e^{-is\tilde{P}(A)}e^{is\tilde{P}(B)}e^{is\tilde{P}(A)}e^{-is\tilde{P}(B)}=e^{is^2D}=e^{itD},$$

откуда

$$\tilde{P}\left(\frac{1}{i}[A,B]\right)=\frac{1}{i}\left[\tilde{P}(A),\tilde{P}(B)\right].$$

На практике удобно находить оператор $\tilde{A}$ следующим образом. Задают A, находят $P\left(e^{itA}\right)$, пользуясь тем, что представление группы Ли известно, а затем разлагают $P\left(e^{itA}\right)$ в ряд по степеням t; тогда коэффициент при it и есть искомый оператор $\tilde{A}$.

Выведем важную для дальнейших приложений формулу с помощью только что изложенного метода.

Пусть нам даны представления P,Q группы G в пространствах $C(k)$ и $C(l)$, и произведение $R=P\otimes Q$ этих представлений в пространстве $C(k)\otimes C(l)$ (см. §5.5). Тогда в этом же пространстве определено представление $\tilde{R}$ алгебры Ли AG. Выразим представление $\tilde{R}$ через представления $\tilde{P},\tilde{Q}$.

Предположим, что A принадлежит AG; тогда e^{itA} есть оператор группы G. По определению,

$$R\left(e^{itA}\right)=P\left(e^{itA}\right)\otimes Q\left(e^{itA}\right). \tag{6.10.4}$$

Согласно (6.10.2) существуют такие операторы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_2$, что

$$P\left(e^{itA}\right)=e^{it\tilde{A}_1}, \qquad Q\left(e^{itA}\right)=e^{it\tilde{A}_2}, \tag{6.10.5}$$

причём

$$\tilde{A}_1=\tilde{P}(A), \quad \tilde{A}_2=\tilde{Q}(A), \tag{6.10.6}$$

а

$$R\left(e^{itA}\right)=e^{it\tilde{A}}, \qquad \tilde{A}=\tilde{R}(A). \tag{6.10.7}$$

Из (6.10.4) с учётом (6.10.5) и (6.10.7) следует:

$$e^{it\tilde{A}}=e^{it\tilde{A}_1}\otimes e^{it\tilde{A}_2}. \tag{6.10.8}$$

Разлагая (6.10.8) по степеням t получим:

$$\tilde{A}=\tilde{A}_1\otimes E(l)+E(k)\otimes\tilde{A}_2+tB(t),$$

где $B(t)$ - оператор, имеющий конечный предел при $t\to 0$.

Переходя к пределу и учитывая (6.10.6) и (6.10.7) мы окончательно получим:

$$\tilde{R}(A)=\tilde{P}(A)\otimes E(l)+E(k)\otimes\tilde{Q}(A). \tag{6.10.9}$$

Правая часть полученной формулы напоминает правило дифференцирования произведения, обобщив которое на тензорное произведение $R=P_1\otimes\ldots\otimes P_m$ любого числа представлений, получим:

$$\begin{aligned}\tilde{R}(A) = {}& \tilde{P}_1(A) \otimes E(k_1) \otimes \ldots \otimes E(k_m) + \\ & + E(k_1) \otimes \tilde{P}_2(A) \otimes E(k_2) \otimes \ldots \otimes E(k_m) + \ldots + \\ & + E(k_1) \otimes E(k_2) \ldots \otimes E(k_m) \otimes \tilde{P}_m(A).\end{aligned} \tag{6.10.10}$$

Рассмотрим *произвольное унитарное представление* P группы Ли G в любом комплексном евклидовом пространстве и построим соответствующее представление $\tilde{P}$ алгебры Ли AG в том же пространстве. Все операторы $\tilde{A}$ из $\tilde{P}(AG)$, согласно (6.10.2), задаются тождеством

$$P\left(e^{itA}\right) = e^{it\tilde{A}},$$

причём оператор $e^{it\tilde{A}}$ унитарен, по предположению и с учётом (6.10.6) имеем

$$\left(e^{it\tilde{A}}\right)^+ = e^{\left(it\tilde{A}\right)^+} = e^{-it\overset{+}{\tilde{A}}}.$$

С другой стороны, в силу (6.6.7)

$$\left(e^{it\tilde{A}}\right)^{-1} = e^{-it\tilde{A}}.$$

Ввиду унитарности $e^{it\tilde{A}}$ имеем

$$e^{-it\overset{+}{\tilde{A}}} = e^{-it\tilde{A}};$$

следовательно, $\overset{+}{\tilde{A}} = \tilde{A}$ и, таким образом, *для унитарного представления группы Ли представляющие операторы алгебры Ли эрмитовы*.