Глава VII
Представления непрерывных групп вращения $SO(2)$ и $SO(3)$

В этой главе мы рассмотрим представления непрерывных групп вращения $SO(2)$ и $SO(3)$, введённые нами в гл. IV, § 4.5, п.п. 8 и 9. Напомним, что вместо обозначений $SO(2)$ и $SO(3)$ можно встретить обозначения соответствующих групп в виде $\mathfrak{R}_2$ и $\mathfrak{R}_3$.

§7.1. Общие замечания

Обозначим элементы непрерывной группы G символом $G(a_1,...,a_r)$, где все r непрерывных действительных параметров a_q существенны в том смысле, что при использовании меньшего числа параметров уже нельзя различить элементы группы друг от друга. Число r назовём размерностью группы. Так как $G(a_1,...,a_r)$ есть элементы группы G, мы можем составить произведение

$$G(a_1,...,a_r)G(b_1,...,b_r)=G(c_1,...,c_r), \tag{7.1.1}$$

где $G(c_1,...,c_r)$ тоже есть элемент группы G. Можно предположить, что параметры c_q есть функции от аргументов a_q и b_q:

$$c_q=\varphi(a_1,...,a_r;b_1,...,b_r). \tag{7.1.2}$$

Параметры группы определяются так, чтобы единичному элементу группы соответствовали нулевые значения всех параметров. Будем считать функции φ_q дифференцируемыми функциями параметров.

В главе V при выводе соотношений ортогональности неприводимых представлений, а также при вычислении характеров нам часто приходилось проводить суммирование по всем элементам группы. В случае непрерывной группы не только число элементов группы становится бесконечным, но и сами элементы группы распределяются непрерывно, и, таким образом, любая такая сумма будет представлять собой интеграл по параметрам группы, например по углу вращения. Для произвольной непрерывной группы такие интегралы могут расходиться, но для большинства интересных с физической точки зрения непрерывных групп соответствующие интегралы будут конечны. Для таких групп, называемых *компактными* (§4.3), все суммы $\sum_{a=1}^{g} f(a)$ (см. гл. V), можно заменить интегралами $\int \ldots \int f(a_1,\ldots,a_r)\rho(a_1,\ldots,a_r)da_1\ldots da_r$ по параметрам $a_1,\ldots,a_r$ непрерывной группы со специально выбранной *весовой функцией* $\rho(a_1,\ldots,a_r)$. Число g элементов группы заменяется объёмом группы, который получается путём интегрирования по всем значениям параметров.

Соотношения ортогональности и все результаты гл. V будут теперь справедливы и для компактных непрерывных групп. В частности, определения таких понятий, как представление, неприводимость и характер, остаются без изменения. Матричные элементы и характер представления являются теперь непрерывными функциями $P_{ij}^{(\alpha)}(a_1,\ldots,a_r)$, $\chi^{(\alpha)}(a_1,\ldots,a_r)$ параметров группы. Для непрерывной группы не существует больше конечной таблицы характеров; подобно самим элементам группы классы сопряжённых элементов распределены непрерывно. Число неэквивалентных неприводимых представлений теперь тоже бесконечно, хотя размерность неприводимых представлений, как правило, конечна.

Бесконечное число неприводимых представлений означает, что разложение произвольной функции по функциям, принадлежащим неприводимым представлениям, может содержать бесконечное число членов. В качестве примера такого разложения можно рассмотреть комплексный ряд Фурье

$$f(\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{im\varphi}$$

для произвольной функции f угла φ, так как (см. § 7.3) каждая функция $e^{im\varphi}$ преобразуется по одномерному неприводимому представлению группы $SO(2)$.

§7.2. Инфинитезимальные операторы

Непрерывная группа G размерности r с параметрами $a_1,\ldots,a_r$ имеет бесконечное число элементов, но почти все свойства её определяются конечным числом операторов, называемых *инфинитезимальными*. Обозначим множество параметров $a_1,\ldots,a_r$ через $\mathbf{a}$ и рассмотрим представление $P(\mathbf{a})$ группы G в пространстве L. Выберем параметры так, чтобы единичный элемент имел все $a_q = 0$, то есть

$$P(0,\ldots,0)=1 \ . \tag{7.2.1}$$

Если все a_q малы, то с точностью до членов первого порядка по этим параметрам

$$P(\mathbf{a})\approx 1+\sum_{q=1}^{r} a_q X_q \ , \tag{7.2.2}$$

где X_q - некоторые фиксированные линейные операторы, не зависящие от параметров a_q и называемые *инфинитезимальными операторами* представления P. В соответствии с (7.2.2) X_q определяются как частные производные:

$$X_q = \lim_{a_q \to 0} \frac{P(0,\ldots,0,a_q,0,\ldots,0) - 1}{a_q} = \left[\frac{d}{da_q} P(\mathbf{a}) \right]_{\mathbf{a}=0}. \qquad (7.2.3)$$

Рассмотрим частный случай однопараметрической группы G с законом умножения $G(c) = G(a)G(b)$, где $c = a + b$, то есть с аддитивным параметром. Мы можем записать оператор $P(a)$ в виде

$$P(a) = \left[P\left(\frac{a}{n} \right) \right]^n,$$

где n - целое число. При больших n параметр $\frac{a}{n}$ мал, и в пределе, при $n \to \infty$ нам достаточно сохранить в формуле (7.2.2) лишь члены нулевого и первого порядка, тогда

$$X_q(a) = \lim_{n \to \infty} \left[1 + \frac{a}{n} X \right]^n = e^{aX}, \qquad (7.2.4)$$

где экспонента определяется как обычный бесконечный ряд:

$$e^{aX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n X^n}{n!}.$$

На этом примере мы выяснили, как можно построить каждый оператор $P(a)$ из инфинитезимального оператора X. Таким же путём можно доказать, что в общем случае оператор $P(\mathbf{a})$ полностью определяется параметрами a_q и инфинитезимальным оператором X_q.

Если представление P унитарно, то операторы X_q антиэрмитовы, то есть $X_q^+ = -X_q$. Это утверждение сразу следует из (7.2.2), так как параметры a_q действительны. Из условия унитарности при малых значениях параметров a_q получим

$$1 = P(\mathbf{a})P^{+}(\mathbf{a}) \approx \left(1 + \sum_q a_q X_q\right)\left(1 + \sum_q a_q X_q^{+}\right) \approx \\ \approx \left[1 + \sum_q a_q \left(X_q + X_q^{+}\right)\right]. \tag{7.2.5}$$

Приравнивая члены первого порядка нулю, получим

$$X_q^{+} = -X_q. \tag{7.2.6}$$

Если умножить операторы X_q на $i = \sqrt{-1}$, они станут эрмитовыми.

Основные свойства инфинитезимальных операторов можно выразить тремя теоремами:

Теорема 7.2.1. *Если два представления группы* G *имеют одинаковые инфинитезимальные операторы, то эти представления эквивалентны*.

Теорема 7.2.2. *Для любого представления* P *группы* G *множество инфинитезимальных операторов* X_q *удовлетворяет перестановочным соотношениям*

$$\left[X_q, X_p\right] = c_{qp}^{i} X_i, \tag{7.2.7}$$

где числовые коэффициенты c_{qp}^{i} - структурные константы (см. §6.4), одинаковые для всех представлений P группы G.

Теорема 7.2.3. *Любой набор операторов* X_q, *определённых в пространстве* L, *образует алгебру Ли представления* P *группы* G *в пространстве* L, *если операторы* X_q *удовлетворяют перестановочным соотношениям* (7.2.7).

Смысл теоремы 7.2.1 заключается в том, что представление полностью определяется своими инфинитезимальными операторами, что является обобщением результата (7.2.4) для однопараметрической группы.

Вторая теорема 7.2.2 даёт *закон умножения* для инфинитезимальных операторов. В общем случае инфинитезимальный оператор соответствующий произведению двух элементов группы, совпадает с суммой инфинитезимальных операторов для сомножителей:

$$P(\mathbf{a})P(\mathbf{b})=\left(1+\sum_q a_q x_q\right)\left(1+\sum_p b_p X_p\right)\approx 1+\sum_q \left(a_q+b_q\right)X_q$$

при малых параметрах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Рассмотрим произведение $P(\mathbf{a})P(\mathbf{b})P^{-1}(\mathbf{a})P^{-1}(\mathbf{b})$:

$$P(\mathbf{a})P(\mathbf{b})P^{-1}(\mathbf{a})P^{-1}(\mathbf{b})\approx 1+\sum_{q,p} a_q b_p\left[X_q, X_p\right]+\varepsilon, \qquad (7.2.8)$$

где ε - члены порядка малости > 2.

Из групповых свойств следует, что

$$P(\mathbf{a})P(\mathbf{b})P^{-1}(\mathbf{a})P^{-1}(\mathbf{b})=P(\mathbf{e})\approx 1+\sum_l e_l X_l \qquad (7.2.9)$$

для некоторых параметров $\mathbf{e}$.

Сравнивая (7.2.9) с (7.2.8), заключаем, что параметры $\mathbf{e}$ должны быть порядка ab, а коммутатор $\left\lfloor X_q, X_p\right\rfloor$ должен быть линейной комбинацией операторов X_l и мы приходим к равенству (7.2.5), согласно которому коммутатор любых двух инфинитезимальных операторов должен быть линейной комбинацией инфинитезимальных операторов.

В силу сформулированных теорем исследование непрерывных групп проще исследования конечных групп, так как можно рассматривать лишь алгебру инфинитезимальных операторов, заменяя таблицу умножения Кэли набором структурных констант.

Из этих теорем также следует, что если подмножество инфинитезимальных операторов некоторой группы G замкнуто относительно операции коммутирования, то есть если коммутатор двух элементов подмножества представляется линейной комбинацией элементов этого подмножества, то это подмножество есть множество всех инфинитезимальных операторов некоторой подгруппы группы G.

Говорят, что набор функций $\varphi_i^{(\alpha)}$ преобразуется по неприводимому представлению $P^{(\alpha)}$, если преобразованные функции задаются соотношением (5.17.1):

$$P\varphi_i^{(\alpha)} = \sum_j P_{ji}^{(\alpha)} \varphi_j^{(\alpha)},$$

где $P^{(\alpha)}$ - обычные матрицы представления.

Для непрерывной группы достаточно показать, что бесконечно малые изменения функций $\varphi_i^{(\alpha)}$ задаются матрицами инфинитезимальных операторов. Подставляя $P = 1 + \sum_q a_q X_q$ в условие (5.17.1), получаем для каждого индекса q

$$X_q \varphi_i^{(\alpha)} = \sum_j \left(X_q\right)_{ji}^{(\alpha)} \varphi_j^{(\alpha)}, \tag{7.2.10}$$

где $\left(X_q\right)_{ji}^{(\alpha)}$ - матричные элементы оператора X_q в представлении $P^{(\alpha)}$. В частности, если функция φ инвариантна, то она преобразуется по тривиальному представлению, для которого P=1 (см. §5.3, п.2). Тогда для всех индексов q инфинитезимальные операторы равны нулю, то есть $X_q \varphi = 0$.

Покажем, что множество трансформационных операторов (§1.12) преобразуется по представлению $P^{(\alpha)}$. Нам надо показать, что при любом индексе q бесконечно малое изменение операторов задаётся теми же самыми известными матрицами:

$$\begin{aligned} S' = PSP^{-1} &\approx \left(1 + \sum_q a_q X_q\right) S \left(1 - \sum_q a_q X_q\right) \approx \\ &\approx S + \sum_q a_q \left[X_q, S\right] \end{aligned} \tag{7.2.11}$$

Таким образом, бесконечно малое изменение операторов определяется коммутатором и условие, аналогичное (7.2.10) для любого q запишется в виде

$$\left[X_q, S_i^{(\alpha)}\right] = \sum_j \left(X_q\right)_{ji}^{(\alpha)} S_j^{(\alpha)} . \qquad (7.2.12)$$

Отметим, что инвариантный оператор S должен удовлетворять уравнению

$$\left[X_q, S\right] = 0 \qquad (7.2.13)$$

при любом индексе q, то есть оператор S коммутирует со всеми инфинитезимальными операторами.

Инфинитезимальные операторы для произведения представлений (5.5.2) имеют вид суммы инфинитезимальных операторов сомножителей:

$$P_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{a}) P_{kl}^{(\beta)}(\mathbf{a}) = \left[\delta_{ik} + \sum_q a_q \left(X_q^{(\alpha)}\right)_{ik}\right] \cdot \left[\delta_{jl} + \sum_p a_p \left(X_p^{(\beta)}\right)_{jl}\right] =$$
$$= \delta_{ik}\delta_{jl} + \sum_q a_q \left[\left(X_q^{(\alpha)}\right)_{ik} \delta_{jl} + \left(X_p^{(\beta)}\right)_{jl} \delta_{ik}\right]$$

Таким образом, в базисе произведений функций $\varphi_k^{(\alpha)}$ и $\psi_l^{(\beta)}$ любой инфинитезимальный оператор X_q можно представить в виде

$$X_q = X_q(1) + X_q(2), \qquad (7.2.14)$$

где $X_q(1)$ - произведение инфинитезимального оператора X_q для $\varphi_k^{(\alpha)}$ на единичный оператор для $\psi_l^{(\beta)}$, а $X_q(2)$ - произведение единичного оператора для $\varphi_k^{(\alpha)}$ на инфинитезимальный оператор для $\psi_l^{(\beta)}$, что совпадает с (6.10.9).

§7.3. Группа $SO(2)$

7.3.1. Неприводимые представления

Группа $SO(2)$ является абелевой группой, в силу чего, её неприводимые представления одномерны.

Для отыскания возможных неприводимых представлений группы $SO(2)$, надо найти функции $P(a)$, удовлетворяющие соотношениям

$$P(a+b)=P(a)P(b) \text{ и } P(0)=1.$$

Дифференцируя первое соотношение по параметру b при фиксированном параметре a получим:

$$P'(a+b)=P(a)P'(b), \tag{7.3.1}$$

где $P'(b)=\dfrac{dP(b)}{db}$.

Полагая $b=0$, получим уравнение

$$P'(a)=P(a)P'(0),$$

решение которого можно представить в виде

$$P(a)=e^{aP'(0)},$$

если $P(0)=1$.

Таким образом, неприводимые представления группы $SO(2)$ есть экспоненциальные функции угла вращения a. Коэффициент $P'(0)$ может быть любым, но представление будет непрерывным, то есть будет удовлетворять равенству $P(a)=P(a+2\pi)$, тогда, когда коэффициент $P'(0)$ есть целое число, умноженное на мнимую единицу. Полагая $m=iP'(0)$ мы можем непрерывные неприводимые представления группы $SO(2)$ представить в виде

$$P^{(m)}(a)=e^{-ima}, \tag{7.3.2}$$

где целые числа $m=0,\pm1,\pm2,\ldots$ нумеруют представления. Отметим, что такие представления унитарны. Вектор, преобразующийся по неприводимому представлению $P^{(m)}$, обозначим через $\mathbf{e}_m$ и можем для него записать

$$P(a)\mathbf{e}_m=e^{ima}\mathbf{e}_m. \tag{7.3.3}$$

Для $m = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots$, можно построить унитарные представления, непрерывные на расширенной области значений $0 \le a \le 4\pi$. Эти представления двузначны в обычной области значений $0 \le a < 2\pi$. Такие двузначные представления необходимы для описания спина в квантовой механике.

7.3.2. Характер

Для одномерных представлений характер совпадает с самим представлением и так как каждый элемент совпадает с классом своих сопряженных элементов, мы можем для характера записать

$$\chi^{(m)} \equiv P^{(m)}(a) = e^{-ima}, \tag{7.3.4}$$

то есть является непрерывной функцией параметра a.

Соотношение ортогональности характеров (для конечных групп (5.11.1), (5.11.2)), теперь запишется в интегральном виде:

$$\int_{a=0}^{2\pi} \chi^{(m)} \chi^{(m')^*} da = \int_0^{2\pi} e^{ia(m'-m)} da = 2\pi\delta_{m'm}. \tag{7.3.5}$$

Здесь весовая функция $\rho(a)$ выбрана единичной, а “объём” 2π, заменяет числа g в соотношениях (5.11.1) и (5.11.2).

Характером произведения представлений $P^{(m_1)}$ и $P^{(m_2)}$ будет функция $e^{-i(m_1+m_2)a}$, которая является характером представления $P^{(m_1+m_2)}$, таким образом мы можем записать

$$P^{(m_1)} \otimes P^{(m_2)} = P^{(m_1+m_2)}. \tag{7.3.6}$$

7.3.3. Примеры базисных векторов

1. Рассмотрим единичные векторы $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$, направленные вдоль осей x и y. Пусть $SO(2)$ - группа вращений относительно оси z.

Тогда (§5.3, п.6):

$$R_z(a)\mathbf{e}_x = \cos a\mathbf{e}_x + \sin a\mathbf{e}_y,$$
$$R_z(a)\mathbf{e}_y = -\sin a\mathbf{e}_x + \cos a\mathbf{e}_y,$$

или

$$R_z(a)(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) = e^{\mp ia}(\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y). \tag{7.3.7}$$

Таким образом векторы $\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y$ преобразуются по неприводимому представлению с индексом $m = 1$, а вектор $\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y$ преобразуется по неприводимому представлению с индексом $m = -1$. Для получения неприводимых представлений мы ввели комплексные коэффициенты.

2. Рассмотрим на плоскости xy функции $\psi(r,\varphi)$, которые будем считать функциями полярных координат лишь для удобства. Пользуясь определением (5.3.4) индуцированного преобразования функций, получим

$$P(R_z(a))\psi(r,\varphi) = \psi(r,\varphi - a), \tag{7.3.8}$$

то есть функция вида $\psi(r,\varphi) = \psi(r)e^{im\varphi}$ преобразуется по представлению $P^{(m)}$:

$$P(R_z(a))e^{im\varphi} = e^{im(\varphi - a)} = e^{-ima}e^{im\varphi}.$$

Следовательно, разложение произвольной функции в комплексный ряд Фурье

$$\psi(r,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_m(r)e^{im\varphi},$$

где

$$\psi_m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(r,\varphi)e^{-im\varphi}d\varphi,$$

есть разложение её на компоненты, каждая из которых преобразуется по определённому неприводимому представлению $P^{(m)}$ группы $SO(2)$.

7.3.4. Инфинитезимальные операторы

Построим теперь инфинитезимальный оператор группы $SO(2)$. Матрица оператора $R_z(a)$ имеет в пространстве векторов $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ (§5.3, п.6) вид:

$$R_z(a) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

При малых углах a эта матрица может быть представлена как

$$1 + \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = 1 + a\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и, таким образом, для матрицы инфинитезимального оператора X будем иметь:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим выражение (7.2.4). Учитывая, что $X^2 = -1$, получим:

$$\begin{aligned} e^{aX} &= 1 + aX + \frac{1}{2}a^2X^2 + \frac{1}{6}a^3X^3 + \frac{1}{24}a^4X^4 + \ldots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{24}a^4 + \ldots\right) + X\left(a - \frac{1}{6}a^3 + \ldots\right) = \\ &= \cos a + X\sin a = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix} = R_z(a). \end{aligned}$$

Геометрически преобразование вектора $\mathbf{r}$ на плоскости xy при повороте $R_z(a)$ относительно оси z в первом приближении есть прибавление к нему вектора длиной $a|\mathbf{r}|$, направленного перпендикулярно к вектору $\mathbf{r}$ (Рис. 7.3.1). Для малых a имеем:

$$R_z(a)\mathbf{r} \approx \mathbf{r} + a[\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}], \tag{7.3.9}$$

где $\mathbf{e}_z$ - единичный вектор, направленный по оси z .

Для оператора $R_z(a)$ мы можем написать выражение

$$R_z(a) = 1 + a[\mathbf{e}_z \times, \tag{7.3.10}$$

а для инфинитезимального оператора X п.1 данного примера получим

$$X = [\mathbf{e}_z \times. \tag{7.3.11}$$

Найдём инфинитезимальный оператор для п.2 данного примера, для чего разложим правую часть равенства (7.3.8) в ряд Тейлора:

$$P(R_z(a))\psi(r,\varphi) = \psi(r,\varphi) - a\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi(r,\varphi) + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\psi(r,\varphi) + \ldots$$

При малых углах a этот оператор можно записать в виде

$$P(R_z(a)) \approx 1 - a\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{7.3.12}$$

Таким образом в этом пункте инфинитезимальным оператором служит дифференциальный оператор

$$X = -\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{7.3.13}$$

так как ряд Тейлора представляет собой экспоненциальный ряд для дифференциального оператора $\dfrac{\partial}{\partial\varphi}$, то есть

$$P(R_z(a)) = e^{-a\frac{\partial}{\partial\varphi}},$$

что согласуется с равенством (7.2.4).

Отметим связь инфинитезимального оператора X с угловым моментом в квантовой механике:

$$X = -\frac{\partial}{\partial\varphi} = i\frac{[\mathbf{r}\times\mathbf{p}]_z}{\hbar} = -i\mathbf{I}_z, \tag{7.3.14}$$

где $\mathbf{I}_z$ - оператор z -компоненты углового момента (в единицах $\hbar$).

Рассматривая второй член разложения (7.3.2) при малых углах a

мы увидим, что для неприводимого представления $P^{(m)}$ группы $SO(2)$ матричный элемент инфинитезимального оператора X равен просто $-im$. Действительно, если функция ψ удовлетворяет уравнению

$$X\psi = -im\psi \,, \qquad (7.3.15)$$

то она должна преобразовываться по неприводимому представлению $P^{(m)}$ группы $SO(2)$.

§7.4. Группа $SO(3)$

Обозначим вращение в трёхмерном пространстве через $R_k(a)$, где a - угол поворота $(0 \le a \le 2\pi)$, а $\mathbf{k}$ - единичный вектор, направленный вдоль оси вращения (§4.9). Вращение зависит от трёх параметров: угла поворота a и двух сферических углов вектора $\mathbf{k}$. Мы воспользуемся другими параметрами, а именно:

$$a_x = ak_x \,,\;\; a_y = ak_y \,,\;\; a_z = ak_z \,, \qquad (7.4.1)$$

где k_q - три составляющие вектора $\mathbf{k}$ в какой либо фиксированной системе координат и мы можем вместо $R_k(a)$ ввести обозначение $R(\mathbf{a})$.

Элементарные геометрические соображения показывают, что при операции вращения произвольный вектор $\mathbf{r}$ преобразуется в соответствии с равенством

$$R_k(a)\mathbf{r} = \cos a\mathbf{r} + (1-\cos a)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{k})\mathbf{k} + \sin a[\mathbf{k}\times\mathbf{r}],$$

и для матрицы $R_k(a)$ в декартовом базисе мы можем записать:

$$[R_k(a)]_{xx} = \cos a + (1-\cos a)k_x^2 \,,$$

$$[R_k(a)]_{yx} = (1-\cos a)k_y k_x + k_z \sin a \text{ и так далее.}$$

Преобразование вращения содержит как длины, так и углы между векторами, то есть сохраняет скалярное произведение любых двух векторов $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$.

Пусть $\mathbf{r}_1' = R\mathbf{r}_1$, а $\mathbf{r}_2' = R\mathbf{r}_2$, тогда

$$(\mathbf{r}_2', \mathbf{r}_1') = (R\mathbf{r}_2, R\mathbf{r}_1) = (\mathbf{r}_2, R^+ R\mathbf{r}_1) = (\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1),$$

то есть матрица R унитарна $(R^+ R = 1)$ и модуль её определителя равен единице.

7.4.1. Инфинитезимальные операторы

Выражение(7.3.9) для поворота на малый угол вокруг оси z можно перенести на случай поворота $R_k(a)$ на малый угол вокруг произвольной оси $\mathbf{k}$:

$$\begin{aligned} R_k(a)\mathbf{r} = \mathbf{r} + a[\mathbf{k} \times \mathbf{r}] = \mathbf{r} + a \sum_{q=x,y,z} k_q [\mathbf{e}_q \times \mathbf{r}] = \\ = \mathbf{r} + \sum_q a_q [\mathbf{e}_q \times \mathbf{r}], \end{aligned} \tag{7.4.2}$$

где $a_q = ak_q$. Таким образом, три инфинитезимальных оператора, соответствующие параметрам a_q, геометрически представляются как

$$X_q = [\mathbf{e}_q \times. \tag{7.4.3}$$

Они соответствуют бесконечно малым поворотам вокруг осей x, y и z. В базисе $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ матрицы инфинитезимальных операторов имеют вид

$$X_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, X_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ X_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.4.4}$$

Используя (6.1.1) получим перестановочные соотношения для инфинитезимальных операторов группы $SO(3)$:

$$[X_x, X_y] = X_z, \quad [X_y, X_z] = X_x, \quad [X_z, X_x] = X_y. \tag{7.4.5}$$

Этот же результат можно получить с помощью соотношений векторной алгебры. Рассмотрим действие коммутатора $\lfloor X_x, X_y \rfloor$ на вектор $\mathbf{r}$:

$$\lfloor X_x, X_y \rfloor \mathbf{r} = [\mathbf{e}_x \times [\mathbf{e}_y \times \mathbf{r}]] - [\mathbf{e}_y \times [\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}]]. \tag{7.4.6}$$

Используя правило векторно-векторного произведения

$$[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

приведём (7.4.6) к виду

$$\lfloor X_x, X_y \rfloor \mathbf{r} = x\mathbf{e}_y - y\mathbf{e}_x = [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}] = X_z \mathbf{r}.$$

В соответствии с (7.4.3) три оператора X_q образуют вектор, который при вращениях преобразуется как вектор $\mathbf{e}_q$. Инфинитезимальные операторы группы вращений связаны с операторами углового момента в квантовой механике, и, следовательно, эти перестановочные соотношения совпадают с перестановочными соотношениями для трёх компонент вектора углового момента.

Полученные нами инфинитезимальные операторы X_q антиэрмитовы, поэтому, в соответствии с требованиями §6.1, мы можем ввести обозначение $J_q = iX_q$, причём, под инфинитезимальным оператором мы будем понимать как оператор X_q, так и оператор J_q. Операторы J_q эрмитовы и удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\lfloor J_x, J_y \rfloor = iJ_z, \quad \lfloor J_y, J_z \rfloor = iJ_x, \quad [J_z, J_x] = iJ_y, \tag{7.4.7}$$

которые совпадают с перестановочными соотношениями для операторов углового момента, делённых на $\hbar$. Из соотношения

$$X\psi = -im\psi \tag{7.3.15}$$

мы видим, что собственные значения оператора X_z равны $-im$, тогда собственными значениями оператора J_z будут числа m.

Рассмотрим оператор $J_\pm$, являющийся линейной комбинацией операторов J_x и J_y, а именно

$$J_{\pm} = J_x \pm iJ_y\,. \tag{7.4.8}$$

Составим перестановочные соотношения операторов $J_{\pm}$ с оператором J_z:

$$[J_z, J_{\pm}] = iJ_y \pm J_x = \pm(J_x \pm iJ_y) = \pm J_{\pm}\,. \tag{7.4.9}$$

Из этих перестановочных соотношений следует, что если функция $\psi(m)$ есть собственный вектор оператора J_z, принадлежащий представлению $P^{(m)}$ группы $SO(2)$, то функция $J_{\pm}\psi(m)$ принадлежит представлениям $P^{(m\pm1)}$, и, следовательно, операторы $J_{\pm}$ преобразуются по представлениям $P^{(m\pm1)}$:

$$\begin{aligned} J_z(J_{\pm}\psi(m)) &= (J_{\pm}J_z \pm J_{\pm})\psi(m) = J_{\pm}(J_z \pm 1)\psi(m) = \\ &= J_{\pm}(m \pm 1)\psi(m) = (m \pm 1)(J_{\pm}\psi(m)). \end{aligned} \tag{7.4.10}$$

Оператор J_+ называется *повышающим*, а оператор J_- - *понижающим*, так как первый увеличивает, а второй уменьшает собственные значения оператора J_z на единицу. Данное свойство является следствием только перестановочных соотношений и поэтому справедливо для инфинитезимальных операторов в любом представлении группы $SO(3)$.

7.4.2. Неприводимые представления

В случае с группой $SO(2)$ перестановочные соотношения нумеруются целыми числами m, а матричный элемент представления равен e^{-ima}. Это объясняется тем, что группа $SO(2)$ абелева, а инфинитезимальный оператор единственный.

В общем случае группы обладают целым набором инфинитезимальных операторов X_q удовлетворяющих перестановочным соотношениям

$$[X_p, X_q] = c^i_{pq} X_i\,. \tag{7.2.7}$$

Для группы $SO(3)$ эти соотношения заданы равенствами (7.4.5) или, что эквивалентно, соотношениями (7.4.7) и равенством

$$[J_+, J_-] = [J_x + iJ_y, J_x - iJ_y] = 2J_z. \qquad (7.4.11)$$

Перед нами стоит задача вычислить размерности неприводимых представлений группы $SO(3)$ и найти способ занумеровать эти представления.

Договоримся обозначать неприводимые представления группы $SO(3)$ буквой D.

Выберем базис, в котором инфинитезимальный оператор J_z диагонален. Векторы $\mathbf{e}_m$ (не путать с единичными векторами $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ обычного трёхмерного пространства) имеют индекс m, соответствующий собственному значению m оператора J_z, то есть неприводимому представлению $P^{(m)}$ группы $SO(2)$, которому они принадлежат.

В общем случае у нескольких линейно независимых векторов базиса могут быть одинаковые индексы m. Пусть j максимальное значение индекса m для векторов базиса представления D и пусть $\mathbf{e}_j$ - вектор базиса с индексом $m = j$. Это вектор *старшего веса*. Вектор $\mathbf{e}_j$ должен удовлетворять условию

$$J_+\mathbf{e}_j = 0, \qquad (7.4.12)$$

так как иначе новый вектор $J_+\mathbf{e}_j$ имел бы вес больший, чем вес вектора $\mathbf{e}_j$. Последовательно действуя на вектор $\mathbf{e}_j$ понижающим оператором J_-, получим последовательность нормированных векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{j-1} &= A_{j-1}\mathbf{e}_j, \\ \mathbf{e}_{j-2} &= A_{j-2}\mathbf{e}_{j-1}, \\ \mathbf{e}_{j-3} &= A_{j-3}\mathbf{e}_{j-2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (7.4.13)$$

Коэффициенты A_m, которые ещё не вычислены, вводятся для нормировки векторов $\mathbf{e}_m$, вектор $\mathbf{e}_j$ считается нормированным. Все векторы последовательности (7.4.13) имеют разные индексы m, в силу чего они являются линейно-независимыми и взаимно ортогональными. Векторное пространство L должно быть инвариантным относительно групповых преобразований, и, следовательно, все векторы последовательности должны принадлежать пространству L. Если размерность пространства L конечна, то конечна и последовательность (7.4.13), которая обрывается на том шаге, когда в результате применения понижающего оператора получается нуль, то есть при некотором целом t

$$J_-\mathbf{e}_{j-t} = 0. \tag{7.4.14}$$

Множество векторов

$$\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{j-1}, \ldots, \mathbf{e}_{j-t} \tag{7.4.15}$$

инвариантно относительно действия операторов J_z и J_-. Покажем, что оно также инвариантно относительно действия оператора J_+. В этом случае множество векторов (7.4.15) будет инвариантным относительно действия любого элемента группы $SO(3)$ и, следовательно, оно образует базис некоторого представления группы $SO(3)$.

Для доказательства инвариантности множества (7.4.15) по отношению к действию оператора J_+ построим оператор

$$\mathbf{J}^2 = (\mathbf{J} \cdot \mathbf{J}) = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2. \tag{7.4.16}$$

В силу перестановочных соотношений (7.4.5), с учётом того, что $J_q = iX_q$ оператор $\mathbf{J}^2$ удовлетворяет соотношениям

$$\left[\mathbf{J}^2, J_q\right] = 0 \tag{7.4.17}$$

при $q = x, y, z$. Таким образом в соответствии с (2.7.13) этот оператор является инвариантом. Оператор $\mathbf{J}^2$, который следует рассматривать как цельный символ, можно выразить через повышающий и понижающий операторы:

$$\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2}\left(J_+J_- + J_-J_+\right) + J_z^2, \tag{7.4.18}$$

или

$$\mathbf{J}^2 = J_-J_+ + J_z^2 + J_z, \tag{7.4.19}$$

$$\mathbf{J}^2 = J_+J_- + J_z^2 - J_z. \tag{7.4.20}$$

Из соотношений (7.4.19) и свойства (7.4.12) следует, что $\mathbf{e}_j$ - собственный вектор оператора $\mathbf{J}^2$:

$$\mathbf{J}^2\mathbf{e}_j = \left(J_-J_+ + J_z^2 + J_z\right)\mathbf{e}_j = J_-\left(J_+\mathbf{e}_j\right) + J_z^2\mathbf{e}_j + J_z\mathbf{e}_j =$$
$$= j^2\mathbf{e}_j + j\mathbf{e}_j = j(j+1)\mathbf{e}_j.$$

Тогда в силу перестановочного соотношения

$$\left[\mathbf{J}^2, J_-\right] = 0 \tag{7.4.21}$$

для любого вектора $\mathbf{e}_m$ из последовательности (7.4.15) получим

$$\mathbf{J}^2\mathbf{e}_m = j(j+1)\mathbf{e}_m. \tag{7.4.22}$$

из соотношений (7.4.13) и (7.4.20) следует инвариантность множества (7.4.15) относительно действия оператора J_+:

$$\begin{aligned} J_+\mathbf{e}_m &= A_m J_+J_-\mathbf{e}_m = A_m\left(\mathbf{J}^2 - J_z^2 + J_z\right)\mathbf{e}_{m+1} = \\ &= A_m\left[j(j+1) - (m+1)^2 + (m+1)\right]\mathbf{e}_{m+1} = \\ &= A_m(j+m+1)(j-m)\mathbf{e}_{m+1}. \end{aligned} \tag{7.4.23}$$

Мы видим, что повышающий оператор J_+ не даёт каких либо векторов, отличных от векторов последовательности (7.4.15), которая была получена в результате действия понижающего оператора J_- на вектор $\mathbf{e}_j$. Вектор $\mathbf{e}_j$ должен быть единственным вектором старшего веса среди векторов базиса пространства L, иначе представление D будет приводимым. Окончательно мы можем сказать, что *неприводимые представления группы* $SO(3)$ *обладают базисом, аналогичным последовательности* (7.4.15).

Рассмотрим некоторые свойства неприводимого представления D. На основании равенств (7.4.20) и (7.4.14) получим

$$\mathbf{J}^2\mathbf{e}_{j-t} = \left(J_-J_+ + J_z^2 + J_z\right)\mathbf{e}_{j-t} = \left[(j-t)^2 - (j-t)\right]\mathbf{e}_{j-t} =$$
$$= (j-t)(j-t-1)\mathbf{e}_{j-t}.$$

Сравнивая полученное выражение с равенством (7.4.22) находим, что

$$(j-t)(j-t-1) = j(j+1),$$

или

$$(2j-t)(t+1) = 0.$$

Так как t - положительное целое число, $2j = t$ и число j может быть либо только целым, либо полуцелым. Размерность представления D равна теперь $2j+1$ и неприводимые представления группы $SO(3)$ можно обозначить как $D^{(j)}$, где $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \ldots$, причём размерность этого представления равна $2j+1$, а векторы базиса $\mathbf{e}_m$ можно выбрать так, чтобы они преобразовывались по неприводимым представлениям $P^{(m)}$ подгруппы $SO(2)$, где

$$m = j, j-1, j-2, \ldots, 1-j, -j.$$

При сужении группы $SO(3)$ на её подгруппу $SO(2)$ разложение представления $D^{(j)}$ можно записать в виде

$$D^{(j)} = \sum_{m=-j}^{m=j} P^{(m)}. \qquad (7.4.24)$$

Заметим, что полученные представления встречаются лишь при описании спина в квантовой механике и не периодичны на интервале $[0, 2\pi]$.

Займёмся теперь выводом матрицы инфинитезимальных операторов J_q в представлении $D^{(j)}$. Учтём, что оператор J_z в базисе $\mathbf{e}_m$ диагонален, а матричные элементы даются равенством

$$J_z\mathbf{e}_m = m\mathbf{e}_m. \qquad (7.4.25)$$

Матричные элементы J_+ и J_- определяются по формулам (7.4.13) и (7.4.23), если известны нормировочные множители A_m. Для вычисления этих множителей воспользуемся тем фактом, что операторы J_q эрмитовы и поэтому

$$J_-^+ = J_+ .$$

Отсюда

$$\left(\mathbf{e}_m \middle| J_- \mathbf{e}_{m+1}\right) = \left(J_+ \mathbf{e}_m \middle| \mathbf{e}_{m+1}\right) = \overline{\left(\mathbf{e}_{m+1} \middle| J_+ \mathbf{e}_m\right)}.$$

Тогда из равенств (7.4.13) и (7.4.23) получим

$$|A|^{-2} = (j+m+1)(j-m). \qquad (7.4.26)$$

Отношения фазовых множителей векторов базиса не определяются ни условием ортогональности, ни нормировкой, и в множителе A_m можно ввести любое комплексное число, равное по модулю единице. Обычно множители A_m считают действительными и положительными, так что матричные элементы операторов $J_\pm$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} J_- \mathbf{e}_{m+1} &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)}\,\mathbf{e}_m, \\ J_+ \mathbf{e}_m &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)}\,\mathbf{e}_{m+1}. \end{aligned} \qquad (7.4.27)$$

Такой выбор фазовых множителей называется *условием Кондона-Шортли*, и отношения фазовых множителей всех $2j+1$ векторов базиса определяются этим условием однозначно.

Можно показать, что множество представлений $D^{(j)}$ полно, причём в случае однозначной функции можно обойтись лишь целыми числами j:

$$\psi = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=-j}^{j} \psi_{jm}, \qquad (7.4.28)$$

где j - целое число, а каждый член ψ_{jm} разложения преобразуется как m -я строка представления $D^{(j)}$.

Построение матриц $D^{(j)}_{m'm}\left(a_x, a_y, a_z\right)$ конечных вращений с параметрами a_x, a_y, a_z - сложная алгебраическая процедура. Матричный элемент $D^{(j)}_{m'm}$ обычно представляется в виде функции от трёх углов Эйлера, а не параметров a_x, a_y, a_z .

7.4.3. Характеры

Независимо от направлений осей вращения все повороты на один и тот же угол лежат в одном классе сопряженных элементов группы $SO(3)$ и характер вращения зависит лишь от угла поворота, то есть для вычисления характера неприводимого представления $D^{(j)}$ можно выбрать любую ось вращения. Вращения $R_z(a)$ вокруг оси z наиболее удобны, так как уже хорошо нами изучены.

На основании разложения (7.4.24) представления $D^{(j)}$ на неприводимые представления подгруппы $SO(2)$ и в силу формул (7.3.2) и (7.3.4) для характеров группы $SO(2)$ мы можем вычислить характер представления $D^{(j)}$ для поворота на угол a :

$$\chi_a^{(j)} = \sum_{m=-j}^{j} e^{-ima} = e^{-ija}\left(1 + e^{ia} + e^{2ia} + \ldots + e^{2jia}\right) =$$

$$= \frac{e^{-ija}\left(e^{(2j+1)ia} - 1\right)}{e^{ia} - 1} = \frac{e^{\left(j+\frac{1}{2}\right)ia} - e^{-\left(j+\frac{1}{2}\right)ia}}{e^{\frac{1}{2}ia} - e^{-\frac{1}{2}ia}} = \frac{\sin\left(j + \frac{1}{2}\right)a}{\sin\frac{1}{2}a}. \tag{7.4.29}$$

Для векторного представления $(j = 1)$, характер представления будет

$$\chi_a^{(1)} = \frac{\sin\frac{3}{2}a}{\sin\frac{1}{2}a} = \cos a + \frac{\cos\frac{1}{2}a\sin a}{\sin\frac{1}{2}a} =$$

$$= \cos a + 2\cos^2\frac{1}{2}a = 2\cos a + 1,$$

то есть

$$\chi_a^{(1)} = 2\cos a + 1, \qquad (7.4.30)$$

что согласуется с равенством (5.3.3).

Единичному элементу соответствует угол вращения $a = 0$, при котором характер $\chi_a^{(j)}$ (7.4.29) равен $2j+1$, что совпадает с размерностью представления $D^{(j)}$.

7.4.4. Произведение представлений

Произведение двух представлений (§5.5) будет представлением, которое в соответствии с (5.8.1), разлагается в сумму неприводимых представлений

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum_i m_i D^{(i)}. \qquad (7.4.31)$$

Наша задача заключается в вычислении коэффициентов m_i, которые показывают, сколько раз данное неприводимое представление $D^{(i)}$ появляется в разложении (7.4.31). Так же как для конечных групп, рассмотрим соответствующее соотношение для характеров

$$\chi_a^{(j_1)}\chi_a^{(j_2)} = \sum_i m_i \chi_a^{(i)}. \qquad (7.4.32)$$

Пусть $j_1 \geq j_2$, тогда в силу (7.4.29) левую часть уравнения (7.4.32) можно записать так:

$$\chi_a^{(j_1)}\chi_a^{(j_2)} = \frac{\sin\left(j_1+\frac{1}{2}\right)a\sin\left(j_2+\frac{1}{2}\right)a}{\sin^2\frac{1}{2}a} =$$

$$= \frac{-\cos(j_1+j_2+1)a+\cos(j_1-j_2)a}{2\sin^2\frac{1}{2}a} =$$

$$= \frac{2\sin\left(j_1+j_2+\frac{1}{2}\right)a\sin\frac{1}{2}a-\cos(j_1+j_2)a+\cos(j_1-j_2)a}{2\sin^2\frac{1}{2}a} =$$

$$= \frac{\sin\left(j_1+j_2+\frac{1}{2}\right)a}{\sin\frac{1}{2}a} + \frac{\sin j_1 a\cdot\sin j_2 a}{\sin^2\frac{1}{2}a},$$

или

$$\chi_a^{(j_1)}\chi_a^{(j_2)} = \chi_a^{(j_1+j_2)} + \chi_a^{\left(j_1-\frac{1}{2}\right)}\chi_a^{\left(j_2-\frac{1}{2}\right)}.$$

Повторяя подобные рассуждения, получим

$$\chi_a^{(j_1)}\chi_a^{(j_2)} = \chi_a^{(j_1+j_2)} + \chi_a^{(j_1+j_2-1)} + \chi_a^{(j_1-1)}\chi_a^{(j_2-1)}$$

и так далее. Учитывая, что характер тривиального представления $D^{(0)}$ есть $\chi_a^{(0)}=1$, мы после ещё $2j_2-2$ таких шагов получим равенство

$$\chi_a^{(j_1)}\chi_a^{(j_2)} = \chi_a^{(j_1+j_2)} + \chi_a^{(j_1+j_2-1)} + \ldots + \chi_a^{(j_1-j_2)}.$$

Сравнивая полученный результат с (7.4.32), находим, что при $(j_1-j_2)\le i\le(j_1+j_2)$ коэффициенты $m_i=1$, а при других значениях i коэффициенты $m_i=0$. Окончательно, отбрасывая условие $j_1\ge j_2$, для (7.4.31) мы можем записать:

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = \sum_{i=|j_1-j_2|}^{i=(j_1+j_2)} D^{(i)}. \tag{7.4.33}$$

Мы видим, что в разложении (7.4.33) каждое представление $D^{(i)}$ встречается только один раз, в результате чего группу $SO(3)$ можно считать *просто приводимой*.

Пример 7.4.1.

Рассмотрим в качестве базиса неприводимого представления $D^{(i)}$ группы $SO(3)$ три единичных вектора $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ в обычном трёхмерном пространстве. Эти векторы задают базис представления с $j = 1$. Ясно, что трёхмерное пространство порождаемое этими векторами неприводимо и таким представлением будет $D^{(1)}$.

Выберем в качестве векторов базиса $\mathbf{e}_m$ следующие линейные комбинации векторов:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= -\frac{\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}, \\ \mathbf{e}_0 &= \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_{-1} &= \frac{\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{7.4.34}$$

На основании примера 7.3.1 мы можем сделать вывод, что векторы $\mathbf{e}_m$ преобразуются по представлениям $P^{(m)}$ группы $SO(2)$ вращений вокруг оси z.

Выберем отношения фазовых множителей в соответствии с условиями Кондона-Шортли (7.4.27) и с учётом (7.4.3) построим инфинитезимальные операторы.

$$X_x\mathbf{e}_x = [\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x] = 0, \qquad X_y\mathbf{e}_x = -\mathbf{e}_z, \quad X_z\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y,$$

$$X_x\mathbf{e}_y = [\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y] = \mathbf{e}_z, \quad X_y\mathbf{e}_y = 0, \quad X_z\mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_x,$$

$$X_x\mathbf{e}_z = [\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z] = -\mathbf{e}_y, \quad X_y\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \qquad X_z\mathbf{e}_z = 0.$$

Полагая $J_q = iX_q$, получим

$$J_z\mathbf{e}_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} X_z\left(-\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y\right) = \frac{i\left(-\mathbf{e}_y + i\mathbf{e}_x\right)}{\sqrt{2}} = \frac{-\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}} = \mathbf{e}_1,$$

$$J_z\mathbf{e}_0 = 0,$$

$$J_z\mathbf{e}_{-1} = -\mathbf{e}_{-1},$$

$$J_+\mathbf{e}_1 = 0, \qquad J_-\mathbf{e}_1 = \sqrt{2}\mathbf{e}_0,$$

$$J_+\mathbf{e}_0 = \sqrt{2}\mathbf{e}_1, \qquad J_-\mathbf{e}_0 = \sqrt{2}\mathbf{e}_{-1},$$

$$J_+\mathbf{e}_{-1} = \sqrt{2}\mathbf{e}_0, \qquad J_-\mathbf{e}_{-1} = 0.$$

Проверим выполнение условий Кондона-Шортли (7.4.27) для полученных соотношений при $j = 1$ и $m = -1,0,1$.

$$J_+\mathbf{e}_0 = \sqrt{(1+0+1)(1-0)}\mathbf{e}_{0+1} = \sqrt{2}\mathbf{e}_1,$$

$J_+\mathbf{e}_{-1} = \sqrt{(1-1+1)(1-(-1))}\mathbf{e}_{-1+1} = \sqrt{2}\mathbf{e}_0$ и так далее.

Таким образом, матрицы операторов J_q в базисе $\mathbf{e}_m$ примут вид:

$$J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.4.35}$$

Пример 7.4.2.

Рассмотрим шестимерное пространство всех однородных квадратичных функций (§5.3, п.7)

$$\psi(\mathbf{r}) = c_1x^2 + c_2y^2 + c_3z^2 + c_4yz + c_5zx + c_6xy.$$

Это пространство инвариантно относительно любых поворотов, так как при вращении степень однородного полинома не меняется. Функция $x^2+y^2+z^2$ инвариантна и порождает представление $D^{(0)}$. Оставшиеся функции образуют базис представления $D^{(2)}$. Покажем это, используя выражение (7.3.14)

$$X_z=-\frac{\partial}{\partial\varphi}=i\frac{[\mathbf{r}\times\mathbf{p}]}{\hbar}=-i\mathbf{I}_z\,,$$

или, с учётом циклической перестановки индексов

$$J_z=iX_z=-i\frac{\partial}{\partial\varphi}=i\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

$$J_y=iX_y=i\left(x\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$J_x=iX_x=i\left(z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Построим теперь понижающий и повышающий операторы

$$J_+=J_x+iJ_y=z\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)-(x+iy)\frac{\partial}{\partial z}\,,$$

$$J_-=J_x-iJ_y=-z\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right)+(x-iy)\frac{\partial}{\partial z}\,.$$

Рассмотрим функцию

$$\psi_2=(x+iy)^2=\left(x^2-y^2\right)+2ixy=r^2e^{2i\varphi}\,.$$

Учитывая тождество

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)(x+iy)=0 \qquad (7.4.36)$$

применим к ψ_2 повышающий оператор J_+ и оператор J_z:

$$J_+\psi_2 = z\left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x} + i\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) - (x+iy)\frac{\partial\psi_2}{\partial z} =$$
$$= 2z(x+iy-iy-x) - (x+iy)0 = 0,$$

$$J_z\psi_2 = i\left(y\frac{\partial\psi_2}{\partial x} - x\frac{\partial\psi_2}{\partial y}\right) = 2\left(x^2 - y^2 + 2ixy\right) = 2\psi_2 .$$

Таким образом, мы видим, что функция ψ_2 отвечает старшему весу $m = 2$.

Последовательно применяя понижающий оператор J_- с учётом условий Кондона-Шортли (7.4.27) построим набор функций $\psi_1, \psi_0, \psi_{-1}, \psi_{-2}$.

$$J_-\psi_2 = \sqrt{(2+1+1)(2-1)}\psi_1 \text{, или } \psi_1 = \frac{1}{2}J_-\psi_2 .$$

С другой стороны $J_-\psi_2 = -4z(x+iy)$ и $\psi_1 = -2z(x+iy)$.

$$J_-\psi_1 = \sqrt{(2+0+1)(2-0)}\psi_0 ,$$

или $\psi_0 = \sqrt{\frac{1}{6}}J_-\psi_1$, $J_-\psi_1 = -2\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right)$ и

$$\psi_0 = -\sqrt{\frac{2}{3}}\left(x^2 + y^2 - 2z^2\right).$$

$$J_-\psi_0 = \sqrt{(2-1+1)(2+1)}\psi_{-1} ,$$

или $\psi_{-1} = \sqrt{\frac{1}{6}}J_-\psi_0$, $J_-\psi_0 = \sqrt{\frac{72}{3}}(x-iy)$, $\psi_{-1} = 2(x-iy)$.

$$\psi_{-2} = J_-\psi_{-1} = (x-iy)^2 .$$

Функции $\psi_2, \psi_1, \psi_0, \psi_{-1}, \psi_{-2}$ линейно независимы. Вместе с инвариантной функцией $x^2 + y^2 + z^2$ они порождают шестимерное пространство квадратичных функций.

Каждая функция ψ_m пропорциональна сферической функции $Y_m^{(l)}(\theta,\varphi)$ с $l = 2$:

$$\psi_m = \sqrt{\frac{32\pi}{15}} r^2 Y_m^{(2)}(\theta,\varphi). \tag{7.4.37}$$

При других значениях l можно также начать с функции $\psi_l = (x + iy)^l$, которая в соответствии с тождеством (7.4.36), отвечает старшему весу. Применяя, как мы это делали выше, понижающий оператор к функции ψ_l, при правильном выборе нормировочных и фазовых множителей получим для положительных чисел m

$$Y_m^{(l)} = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} e^{im\varphi} \sin^m\theta \left(\frac{d}{d\cos\theta}\right)^{l+m} \frac{(\cos^2\theta - 1)^l}{2^l l!}, \tag{7.4.38}$$

а так же соотношение

$$Y_{-m}^{(l)} = (-1)^m Y_m^{(l)*}. \tag{7.4.39}$$

В частности,

$$Y_0^{(l)} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos\theta), \tag{7.4.40}$$

где P_l - полином Лежандра.

Отметим, что выражение $\psi(\mathbf{r}) = r^l Y_m^{(l)}(\theta,\varphi)$ является решением уравнения Лапласа $\nabla^2\psi = 0$ при любом целом l, что может также быть принято в качестве определения сферических функций.

Выпишем преобразование сферических функций при вращении в явном виде. Пусть θ и φ - угловые координаты вектора $\mathbf{r}$, а θ' и φ' -

угловые координаты вектора $R^{-1}\mathbf{r}$, тогда на основании общих определений (5.2.1) и (5.3.4) для преобразования функций получим

$$D(R)Y_m^{(l)}(\theta,\varphi) = Y_m^{(l)}(\theta',\varphi') = \sum_{m'} D_{m'm}^{(l)}(R)Y_{m'}^{(l)}(\theta,\varphi), \qquad (7.4.41)$$

то есть сферическая функция, аргументами которой являются преобразованные координаты θ' и φ', представляется в виде суммы сферических функций первоначальных координат.

Обратное преобразование вращения, в силу унитарности матрицы представления, будет выглядеть так:

$$Y_m^{(l)}(\theta,\varphi) = \sum_{m'} D_{m'm}^{(l)}\left(R^{-1}\right)Y_{m'}^{(l)}(\theta',\varphi') = \sum_{m'} D_{m'm}^{(l)*}(R)Y_{m'}^{(l)}(\theta',\varphi'). \qquad (7.4.42)$$

Координаты θ' и φ' можно считать координатами вектора $\mathbf{r}$ в новой системе координат, которая получается из исходной действием оператора R.

§7.5. Оператор Казимира

В случае группы $SO(2)$ функции, преобразующиеся по неприводимому представлению $P^{(m)}$ можно отождествить с собственным вектором единственного инфинитезимального оператора J_z, отвечающим собственным значениям m.

В случае группы $SO(3)$ функцию $\psi(jm)$, преобразующуюся в соответствии с m-й строкой представления $D^{(j)}$, можно также отождествить с собственным вектором инвариантного квадратичного оператора

$$\mathbf{J}^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2. \qquad (7.4.16)$$

В силу (7.4.17) оператор $\mathbf{J}^2$ инвариантен и при сужении на неприводимое представление в соответствии с первой леммой Шура должен быть пропорционален единичному оператору. Это означает, что при фиксированном j все функции $\psi(jm)$ будут собственными векторами оператора $\mathbf{J}^2$, отвечающими одному и тому же собственному значению j, не зависимому от m, так как в соответствии с (7.4.22) мы можем записать

$$\mathbf{J}^2\psi(jm) = j(j+1)\psi(jm). \qquad (7.5.1)$$

Из (7.5.1) следует, что функцию, принадлежащую представлению $D^{(j)}$, можно определить как собственный вектор оператора $\mathbf{J}^2$, отвечающий собственному значению $j(j+1)$.

Проиллюстрируем это на примере 7.4.1 используя выражение (7.4.3) и полагая $J_q = iX_q$

$$J_x^2\mathbf{r} = -X_x^2\mathbf{r} = -[\mathbf{e}_x \times [\mathbf{e}_x \times \mathbf{r}]] = -\mathbf{e}_x \cdot (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x) =$$
$$= -x\mathbf{e}_x + \mathbf{r} = -x\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z = y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z.$$

$$J_y^2\mathbf{r} = -X_y^2\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_z, \quad J_z^2\mathbf{r} = -X_z^2\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y.$$

Тогда $\mathbf{J}^2\mathbf{r} = (J_x^2 + J_y^2 + J_z^2)\mathbf{r} = 2\mathbf{r}$ и оператор $\mathbf{J}^2$ равен удвоенному единичному оператору, что согласуется с выражением $j(j+1)$ при $j = 1$.

Оператор $\mathbf{J}^2$ называют оператором *Казимира*. Для любой группы Ли можно построить из инфинитезимальных операторов скалярный квадратичный оператор, называемый оператором Казимира, который может быть определён как

$$\mathbf{K} = (g^{-1})_{pq} X_p X_q, \qquad (7.5.2)$$

где g - матрица с матричными элементами $g_{ij} = c_{it}^s c_{js}^t$, а c_{it}^s - структурные константы из формулы (7.2.7).

Для перечисления неприводимых представлений групп, больших, чем группа $SO(3)$, вводится несколько чисел подобных числу j, число которых равно рангу группы. Рассматривая кубические и более высокие степени операторов X_q, мы можем построить множество операторов Казимира данной группы. Все числа, нумерующие представления, связаны с собственными значениями операторов Казимира.