Глава VIII
Группа $SU(n)$ и её представления

В данной главе рассматриваются представления специальной унитарной группы $SU(n)$ составляющей наиболее изученный класс представлений, имеющих важное значение в теории динамических систем, квантовой механике и теории поля.

§8.1. Унитарные представления

Пусть гильбертово пространство C (§1.10, п. 1.10.4) преобразуется по представлению U группы G. Если все операторы $U(g)$ этого представления унитарны, то такое представление будем называть унитарным представлением. Покажем, что для любой компактной группы (§4.3) каждое её представление эквивалентно некоторому унитарному представлению. Фактически, мы докажем сейчас теорему Машке, сформулированную в §5.6. Для доказательства теоремы Машке воспользуемся тем фактом, что для компактной группы можно ввести инвариантное интегрирование (4.3.4).

Покажем, прежде всего, что если операторы $U(g)$ неунитарны относительно заданного скалярного произведения $(x|y)$, то можно перейти к такому скалярному произведению $(x|y)'$, относительно которого все операторы $U(g)$ будут унитарны, то есть

$$(U(g)x|U(g)y)' = (x|y)' . \tag{8.1.1}$$

Отметим, что для любой пары векторов x и y величина

$$f(g) = (U(g)x|U(g)y)$$

является некоторой ограниченной функцией на группе G и для компактной группы G существует инвариантный интеграл (4.3.4)

$$\int_G f(h)dh = \int_G f(gh)dh = \int_G f(hg)dh,$$

где g - любой элемент группы G.

Положим

$$(x|y)' = \int_G (U(h)x|U(h)y)dh. \tag{8.1.2}$$

Нетрудно проверить, что произведение $(x|y)'$ удовлетворяет соотношениям (1.10.1), (1.10.2) и (1.10.8), то есть, удовлетворяет условиям для скалярного произведения векторов в комплексном пространстве. По отношению к этому скалярному произведению все операторы $U(g)$ унитарны, так как, согласно соотношениям (4.3.4) и (8.1.2),

$$(U(g)x|U(g)y)' = \int_G (U(h)U(g)x|U(h)U(g)y)dh =$$

$$= \int_G (U(hg)x|U(hg)y)dh = \int_G (U(h)x|U(h)y)dh = (x|y)',$$

то есть условие унитарности (8.1.1) выполняется.

Пусть теперь e_α - некоторый базис, ортонормированный относительно старого скалярного произведения (1.10.9)

$$(e_\alpha|e_\beta) = \delta_{\alpha\beta},$$

а e'_α - некоторый базис, ортонормированный относительного нового скалярного произведения

$$(e'_\alpha|e'_\beta)' = \delta_{\alpha\beta}.$$

Обозначим A оператор, переводящий e_α в e'_α:

$$Ae_\alpha = e'_\alpha .$$

Если

$$x = x^\alpha e_\alpha , \quad y = y^\alpha e_\alpha ,$$

то

$$Ax = x^\alpha e'_\alpha , \quad Ay = y^\alpha e'_\alpha$$

и, следовательно,

$$\left(Ax \middle| Ay\right)' = x^\alpha y^\alpha = \left(x \middle| y\right), \tag{8.1.3}$$

или

$$\left(x \middle| y\right)' = \left(A^{-1}x \middle| A^{-1}y\right). \tag{8.1.4}$$

Положим теперь

$$U'(g) = A^{-1}U(g)A . \tag{8.1.5}$$

Из соотношений (8.1.3), (8.1.4) и (8.1.1.) следует, что

$$\left(U'(g)x \middle| U'(g)y\right) = \left(A^{-1}U(g)Ax \middle| A^{-1}U(g)Ay\right) =$$

$$= \left(U(g)Ax \middle| U(g)Ay\right) = \left(Ax \middle| Ay\right)' = \left(x \middle| y\right),$$

то есть все операторы $U'(g)$ унитарны относительно старого скалярного произведения.

Таким образом, каждое представление компактной группы эквивалентно унитарному представлению и для компактной группы Ли мы можем ограничиться лишь унитарными представлениями.

§8.2. Неприводимые представления

Пусть нам задано некоторое представление U группы G в пространстве $C(n)$ и пусть $C(k)$- некоторое подпространство пространства $C(n)$, то есть некоторое множество элементов из $C(n)$, которое само является пространством. В преобразовании $U(g)$ вектор x из пространства $C(k)$ превращается в вектор $U(g)x$, который принадлежит $C(n)$, но может и не принадлежать $C(k)$. Если векторы $U(g)x$ принадлежат $C(k)$ при любых x из $C(k)$ и любых преобразованиях $U(g)$, то есть, если во всех преобразованиях $U(g)$ векторы из $C(k)$ превращаются в векторы того же подпространства $C(k)$, мы будем говорить, что $C(k)$ является инвариантным подпространством представления U. Если такого нетривиального инвариантного подпространства не существует, то представление называется неприводимым.

Пусть U - некоторое приводимое представление группы G в пространстве $C(n)$, $C(k)$ - некоторое инвариантное подпространство представления U, а $C(l)$ - ортогональное дополнение (см. §1.16) к $C(k)$. Покажем, что если представление U унитарно, то $C(l)$ - также инвариантное подпространство.

Действительно, пусть $x' \in C(k)$, а $x'' \in C(l)$. Так как $C(k)$ является инвариантным подпространством, то $U(g)^{-1}x' = U(g^{-1})x'$ также принадлежит $C(k)$, и мы можем записать

$$\left(U(g)^{-1}x' \middle| x''\right) = 0 .$$

Из унитарности представления U следует, что

$$\left(U(g)^{-1}x' \middle| x''\right) = \left(U(g)U(g)^{-1}x' \middle| U(g)x''\right) = \left(x' \middle| U(g)x''\right) = 0 .$$

Таким образом, если $x'' \in C(l)$, то $U(g)x''$ ортогонален любому вектору $x' \in C(k)$ для любого $U(g)$ и мы доказали, что $C(l)$ является инвариантным подпространством. Пространство $C(n)$ расщепляется на два ортогональных инвариантных подпространства: $C(k)$ и $C(l)$. Если представления U_1 и U_2 индуцируемые представлением U в подпространствах $C(k)$ и $C(l)$ соответственно, приводимы, то они снова расщепляются на неприводимые представления в ортогональных подпространствах. Приводимое представление, расщепляемое на неприводимые, называется вполне приводимым. Не всякое приводимое представление вполне приводимо, но приводимое унитарное представление вполне приводимо.

Для компактной группы Ли каждое представление эквивалентно унитарному, то есть вполне приводимому представлению.

Покажем теперь, что неприводимые унитарные представления компактной группы G конечномерны. Пусть e - единичный вектор в пространстве $C(n)$, преобразующемся по унитарному неприводимому представлению U группы G. В силу унитарности преобразования $U(g)$ мы можем записать

$$|U(g)e| = \sqrt{(U(g)e|U(g)e)} = \sqrt{(e|e)} = |e| = 1.$$

Таким образом, отображение

$$g \to U(g)e$$

является отображением группы G в единичную сферу пространства $C(n)$. Так как группа компактна, то множество векторов $U(g)e$ тоже компактно. Из функционального анализа известно, что любое компактное множество на единичной сфере гильбертова пространства содержится в конечномерном пространстве. С другой стороны, из неприводимости представления U следует, что $C(n)$ совпадает с пространством, порождённым множеством векторов $U(g)e$, то есть совпадает с множеством всех линейных комбинаций линейно независимых векторов среди векторов $U(g)e$, причём число этих линейно независимых векторов конечно. Отсюда следует и конечность пространства $C(n)$.

Мы установили, что пространство, преобразующееся по неприводимому представлению U, порождается множеством векторов $U(g)e$ для всех $U(g)$ и некоторого вектора e. Рассмотрим более подробно это свойство неприводимых представлений.

Пусть нам задано представление U группы G в пространстве $C(n)$, и $C(k)$- инвариантное подпространство, преобразующееся по неприводимому представлению U_1 и индуцируемое представлением U. Если мы знаем некоторый вектор x подпространства $C(k)$, то мы можем построить это подпространство следующим образом (см. §7.4., п.7.4.2). Сначала действуем на x всеми операторами $U(g)$ из представления U, в результате чего получим множество векторов $U(g)x$. Затем образуем всевозможные линейные комбинации векторов из этого множества получив таким образом подпространство, инвариантное относительно представления U, которое не может распадаться на два ортогональных инвариантных подпространства, так как порождается множеством векторов $U(g)x$, каждый из которых получается из вектора x при помощи преобразования $U(g)$.

§8.3. Сопряженные и контрагредиентные преобразования

Рассмотрим различные представления, связанные с данным представлением U и имеющие такую же размерность, что и U, но не эквивалентные представлению U.

Если соответствие

$$g \to U(g) \tag{8.3.1}$$

является некоторым представлением группы G, то можно показать, что соответствие

$$g \to \overline{U(g)}, \tag{8.3.2}$$

где $\overline{U(g)}$ - матрица, комплексно сопряженная к $U(g)$, служит также представлением группы G. Это представление называется сопряженным к U и обозначается $\overline{U}$.

Покажем, что наряду с отображениями (8.3.1) и (8.3.2) соответствие

$$g \to U\left(g^{-1}\right)^T = \left[U(g)^{-1}\right]^T \tag{8.3.3}$$

является также представлением группы G. Действительно, полагая

$$\tilde{U}(g) = U\left(g^{-1}\right)^T, \tag{8.3.4}$$

получим

$$\tilde{U}(g_1)\tilde{U}(g_2) = U\left(g_1^{-1}\right)^T U\left(g_2^{-1}\right)^T = \left[U\left(g_2^{-1}\right)U\left(g_1^{-1}\right)\right]^T =$$
$$= U\left(g_2^{-1}g_1^{-1}\right)^T = U\left((g_1g_2)^{-1}\right)^T = \tilde{U}(g_1g_2),$$

что и требовалось доказать. Это представление называется *контрагредиентным* к U представлением $\tilde{U}$. Для унитарных представлений контрагредиентное к U представление $\tilde{U}$ совпадает с сопряженным к U представлением $\bar{U}$. Действительно, так как все операторы $U(g)$ унитарны $U(g)^+ = U(g)^{-1} = U\left(g^{-1}\right)$, то $\overline{U(g)} = U\left(g^{-1}\right)^T$.

Введение конрагредиентных представлений позволяет образовать инварианты групп. Пусть x - вектор с компонентами x^α, преобразующийся по представлению U группы G, а $\tilde{y}$ - ковектор с компонентами y_α, преобразующийся по представлению $\tilde{U}$, причём U может быть неунитарным. Мы можем записать

$$x'^\alpha = U(g)^\alpha_\beta x^\beta, \quad y'_\alpha = \tilde{U}(g)^\beta_\alpha y_\beta = U\left(g^{-1}\right)^\beta_\alpha y_\beta .$$

Отсюда получаем

$$y'_\alpha x'^\alpha = y_\beta U\left(g^{-1}\right)^\beta_\alpha U(g)^\alpha_\gamma x^\gamma = y_\beta U(e)^\beta_\gamma x^\gamma = y_\beta x^\beta ,$$

то есть сумма $y_\alpha x^\alpha$ инвариантна.

§8.4. Генераторы группы $SU(n)$ и её основные представления

Рассмотрим несколько общих утверждений для унитарных унимодулярных групп, которые нам понадобятся при более детальном рассмотрении групп $SU(2)$ и $SU(3)$.

В главе IV, §4.6, п.7 мы установили, что размерность m группы $SU(n)$ равна

$$m = n^2 - 1. \tag{8.4.1}$$

Из условия

$$\det U(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = 1$$

для матрицы $U(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$, бесконечно близкой к единице:

$$U(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) \approx \mathbf{1} + \xi_k X_k,$$

следует, что следы генераторов X_k равны нулю:

$$SpX_k = 0, \tag{8.4.2}$$

а из условия унитарности

$$U(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)^+ U(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m) = \mathbf{1}$$

следует, что матрицы X_k антиэрмитовы:

$$X_k^+ = -X_k \tag{8.4.3}$$

(см. формулы (7.2.2) и (7.2.6)). При умножении X_k на $i = \sqrt{-1}$, они станут эрмитовыми.

Рассмотрим теперь некоторые основные неприводимые представления группы $SU(n)$. Представлением с наименьшей размерностью является одномерное представление, в котором всем элементам $g = U$ соответствует умножение на 1:

$$U \to 1,$$

и, следовательно, все инфинитезимальные операторы равны нулю:

$$Y_k = 0. \tag{8.4.4}$$

Можно показать, что одним из неприводимых представлений с наименьшей размерностью, отличной от 1, является представление

$$U \to U.$$

В данном случае сама группа $SU(n)$ рассматривается как её представление. Это представление называется *фундаментальным*. Его инфинитезимальные операторы совпадают с генераторами группы

$$Y_k = X_k . \tag{8.4.5}$$

Другим неприводимым представлением с наименьшей размерностью, отличной от единицы, служит *конрагредиентное к фундаментальному представление*, совпадающее с сопряженным, инфинитезимальные операторы которого равны

$$Y_k = \bar{X}_k = -X_k^T . \tag{8.4.6}$$

Договоримся теперь о некоторых обозначениях. Базисные векторы в пространстве C_1 состоящем из одного экземпляра пространства $C(n)$, которое преобразуется по фундаментальному представлению, обозначим $\mathbf{e}^\alpha$; $\alpha = 1,2,\ldots,n$.

Предположим, что эти базисные векторы удовлетворяют условию

$$\left(\mathbf{e}^\alpha \middle| \mathbf{e}^\beta\right) = \delta_{\alpha\beta} ,$$

то есть ортонормированны. В представлении U вектор $\mathbf{e}^\alpha$ превращается в некоторый вектор $\mathbf{e}'^\alpha$

$$\mathbf{e}'^\alpha = U\mathbf{e}^\alpha = U_{\beta\alpha}\mathbf{e}^\beta . \tag{8.4.7}$$

Пусть ψ вектор из C_1 с компонентами ψ_α

$$\psi = \psi_\alpha \mathbf{e}^\alpha . \tag{8.4.8}$$

Тогда в преобразовании U он превращается в вектор ψ' с компонентами ψ'_α

$$\psi'_\alpha = U_{\alpha\beta}\psi_\beta . \tag{8.4.9}$$

В дальнейшем векторы в пространстве C_1, преобразующемся по фундаментальному представлению, будем называть *ковариантными спинорами первого ранга*. Итак, компоненты ковариантных спиноров первого ранга преобразуются по закону (8.4.9).

По аналогии, в пространстве $C_{\bar{1}}$ (состоящем из одного комплекта пространства $\widetilde{C}(n)$) преобразующемся по представлению контрагредиентному к фундаментальному представлению выберем некоторый базис $\mathbf{e}_\alpha$. Преобразование векторов $\mathbf{e}_\alpha$ имеет вид

$$\mathbf{e}'_\alpha = \overline{U}\mathbf{e}_\alpha = \overline{U}_{\beta\alpha}\mathbf{e}_\beta \,. \tag{8.4.10}$$

Если ψ - некоторый вектор из пространства $C_{\bar{1}}$ с компонентами ψ^α

$$\psi = \psi^\alpha \mathbf{e}_\alpha \,, \tag{8.4.11}$$

то по аналогии с (8.4.9) мы имеем

$$\psi'^\alpha = \overline{U}_{\alpha\beta}\psi^\beta = \psi^\beta U^+_{\beta\alpha} \,. \tag{8.4.12}$$

Векторы в пространстве $C_{\bar{1}}$ называются *контравариантными спинорами первого ранга*. Итак, компоненты контравариантного спинора первого ранга преобразуются по закону (8.4.12).

Заметим, что если ψ_α - компонент ковариантного спинора, то комплексно сопряженные величины $\overline{(\psi_\alpha)}$ преобразуются как компоненты контравариантного спинора, который обозначим как ψ^+. Таким образом,

$$\left(\psi^+\right)^\alpha = \overline{(\psi_\alpha)}. \tag{8.4.13}$$

§8.5. Спиноры высших рангов

Рассмотрим пространства преобразующиеся по представлениям, являющимся произведениями фундаментальных представлений и контрагредиентных к фундаментальному представлению.

Рассмотрим пространство C_p, преобразующееся по представлению $U \otimes U \otimes \ldots \otimes U$, которое можно представить в виде произведения p фундаментальных представлений U.

Базисные векторы $\mathbf{e}^{\alpha_1 \ldots \alpha_p}$ в этом пространстве преобразуются по аналогии с законом (8.4.7)

$$\mathbf{e}'^{\alpha_1\ldots\alpha_p} = U^p \mathbf{e}^{\alpha_1\ldots\alpha_p} = U_{\beta_1\alpha_1}\ldots U_{\beta_p\alpha_p}\mathbf{e}^{\alpha_1\ldots\alpha_p} . \qquad (8.5.1)$$

Полагая векторы $\mathbf{e}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ ортонормированными, мы можем записать

$$\left(\mathbf{e}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\middle|\mathbf{e}^{\beta_1\ldots\beta_p}\right) = \delta_{\alpha_1\beta_1}\ldots\delta_{\alpha_p\beta_p} .$$

Произвольный вектор в пространстве C_p определяется формулой

$$\psi^p = \psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\mathbf{e}^{\alpha_1\ldots\alpha_p} , \qquad (8.5.2)$$

компоненты $\psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ которого преобразуются по закону

$$\psi'_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = U_{\alpha_1\beta_1}\ldots U_{\alpha_p\beta_p}\psi_{\beta_1\ldots\beta_p} . \qquad (8.5.3)$$

Векторы в пространстве C_p с компонентами вида $\psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ называются ковариантными спинорами p -го ранга, преобразующиеся как произведения p компонент ковариантных спиноров первого ранга.

Аналогично ортонормированные базисные векторы $\mathbf{e}'_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$

$$\left(\mathbf{e}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\middle|\mathbf{e}_{\beta_1\ldots\beta_p}\right) = \delta_{\alpha_1\beta_1}\ldots\delta_{\alpha_p\beta_p}$$

в пространстве $C_{\bar{p}}$, преобразующиеся по представлению $\overline{U} \otimes \overline{U} \otimes \ldots \otimes \overline{U}$, являющемуся произведением p контрагредиентных к фундаментальному представлений $\overline{U}$, преобразуются как

$$\mathbf{e}'_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = U^{\bar{p}}\mathbf{e}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \overline{U}_{\beta_1\alpha_1}\ldots\overline{U}_{\beta_p\alpha_p}\mathbf{e}_{\beta_1\ldots\beta_p} , \qquad (8.5.4)$$

а компоненты $\psi^{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ вектора $\boldsymbol{\psi}^{\bar{p}}$

$$\boldsymbol{\psi}^{\bar{p}} = \psi^{\alpha_1\ldots\alpha_p}\mathbf{e}_{\alpha_1\ldots\alpha_p} \qquad (8.5.5)$$

преобразуются по закону

$$\psi'^{\alpha_1\ldots\alpha_p} = \overline{U}_{\alpha_1\beta_1}\ldots\overline{U}_{\alpha_p\beta_p}\psi^{\beta_1\ldots\beta_p} = \psi^{\beta_1\ldots\beta_p}U^+_{\beta_1\alpha_1}\ldots U^+_{\beta_p\alpha_p} . \qquad (8.5.6)$$

Эти векторы будем называть контравариантными спинорами p -

го ранга, преобразующимися по закону (8.5.6). Заметим, что если $\psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ - компоненты ковариантного спинора ранга p, то $\left(\overline{\psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}\right)$ - компоненты контравариантного спинора того же ранга

$$\left(\psi^{+}\right)^{\alpha_1\ldots\alpha_p}=\left(\overline{\psi_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}\right).$$

В пространстве $C_{p\bar{q}}$, преобразующемся по представлению

$$\underbrace{U\otimes\ldots\otimes U}_{p\text{ раз}}\otimes\underbrace{\overline{U}\otimes\ldots\otimes\overline{U}}_{q\text{ раз}},$$

введём ортонормированный базис $\mathbf{e}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}$

$$\left(\mathbf{e}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}\middle|\mathbf{e}^{\alpha'_1\ldots\alpha'_p}_{\beta'_1\ldots\beta'_q}\right)=\delta_{\alpha_1\alpha'_1}\ldots\delta_{\alpha_p\alpha'_p}\delta_{\beta_1\beta'_1}\ldots\delta_{\beta_q\beta'_q}.$$

Тогда

$$U^{p\bar{q}}\mathbf{e}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}=U_{\gamma_1\alpha_1}\ldots U_{\gamma_p\alpha_p}\overline{U}_{\delta_1\beta_1}\ldots\overline{U}_{\delta_q\beta_q}\mathbf{e}^{\gamma_1\ldots\gamma_p}_{\delta_1\ldots\delta_q}. \tag{8.5.7}$$

Компоненты вектора

$$\boldsymbol{\psi}^{p\bar{q}}=\psi^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\mathbf{e}^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q} \tag{8.5.8}$$

преобразуются по закону

$$\psi'^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}=U_{\alpha_1\gamma_1}\ldots U_{\alpha_p\gamma_p}\overline{U}_{\beta_1\delta_1}\ldots\overline{U}_{\beta_q\delta_q}\psi^{\delta_1\ldots\delta_p}_{\gamma_1\ldots\gamma_p}. \tag{8.5.9}$$

Эти векторы будем называть *смешанными спинорами*, ковариантными p раз и контравариантными q раз.

Так как каждый спинор полностью определяется своими компонентами, то в дальнейшем для характеристики спиноров, то есть векторов в пространстве $C_{p\bar{q}}$, будем пользоваться их компонентами $\psi^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$. Если $\psi^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ - компоненты спинора p раз ковариантного и q раз контравариантного, то $\left(\overline{\psi^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}}\right)$- компоненты некоторого спинора q раз ковариантного и p раз контравариантного, который мы обозначим как $\boldsymbol{\psi}^{+}$. Таким образом

$$\left(\psi^{+}\right)^{\alpha_1\ldots\alpha_p}_{\beta_1\ldots\beta_q}=\overline{\left(\psi^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}\right)}. \tag{8.5.10}$$

Рассмотрим для примера три спинора: спинор второго ранга в $C_{1\bar{1}}$ с компонентами

$$\psi^{\alpha}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta} \tag{8.5.11}$$

и спиноры n-го ранга в C_n и $C_{\bar{n}}$ с компонентами

$$\psi_{\alpha_1\ldots\alpha_n}=\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}, \tag{8.5.12}$$

и

$$\psi^{\alpha_1\ldots\alpha_n}=\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n}, \tag{8.5.13}$$

где $\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n}=\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}=0$, если два (или более) индекса α_i и α_j совпадают, равно 1, если $(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ - чётная перестановка $(1,2,\ldots,n)$, и равно –1, если $(\alpha_1\ldots\alpha_n)$ - нечётная перестановка. Этот спинор будем называть *полностью антисимметричным тензором* n-го ранга. Для спинора (8.5.11) в силу условия $UU^{+}=1$ имеем закон преобразования

$$\delta'^{\alpha}_{\beta}=U_{\beta\delta}\overline{U}_{\alpha\gamma}\delta^{\gamma}_{\delta}=U_{\beta\gamma}U^{+}_{\gamma\alpha}=\left(UU^{+}\right)_{\beta\alpha}=\delta^{\alpha}_{\beta},$$

а для спиноров (8.5.12) и (8.5.13) в силу условия $\det U=1$, имеем

$$\varepsilon'_{\alpha_1\ldots\alpha_n}=U_{\alpha_1\beta_1}\ldots U_{\alpha_n\beta_n}\varepsilon_{\beta_1\ldots\beta_n}=\det U\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}=\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$$

и

$$\varepsilon'^{\alpha_1\ldots\alpha_n}=\overline{U}_{\alpha_1\beta_1}\ldots\overline{U}_{\alpha_n\beta_n}\varepsilon^{\beta_1\ldots\beta_n}=\det\overline{U}\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n}=\varepsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_n}.$$

Мы видим, что компоненты спиноров не меняются при всех преобразованиях группы $SU(n)$, то есть эти спиноры являются инвариантами группы $SU(n)$. Если обозначить через

$$\mathbf{e}^{\alpha}_{\beta},\ \mathbf{e}^{\alpha_1\ldots\alpha_n},\ \mathbf{e}_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$$

базисы в пространствах $C_{1\bar{1}}$, C_n и $C_{\bar{n}}$ соответственно, то векторы в этих пространствах с компонентами (8.5.11)-(8.5.13) имеют вид

$$\boldsymbol{\delta} = \mathbf{e}^{\alpha}_{\alpha} = \mathbf{e}^{1}_{1} + \ldots + \mathbf{e}^{n}_{n}, \tag{8.5.14}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \mathbf{e}^{123\ldots n} - \mathbf{e}^{213\ldots n} + \mathbf{e}^{231\ldots n} - \ldots, \tag{8.5.15}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{p} = \mathbf{e}_{123\ldots n} - \mathbf{e}_{213\ldots n} + \mathbf{e}_{231\ldots n} - \ldots. \tag{8.5.16}$$

Эти векторы служат базисами одномерных пространств, инвариантных относительно группы $SU(n)$, то есть являются базисами пространств, преобразующихся по её одномерным представлениям.

§8.6. Неприводимые представления

Рассмотренные в предыдущем параграфе произведения фундаментальных и контрагредиентных им представлений приводимы. Так эти представления являются произведениями унитарных представлений, то они унитарны и, следовательно, вполне приводимы (см. §8.2). Разложим эти представления на неприводимые.

Начнём с наиболее простого примера представления $U \otimes U$ в пространстве C_2 с базисом $\mathbf{e}^{\alpha_1\alpha_2}$. Векторы в этом пространстве – ковариантные спиноры второго ранга. Из произвольного спинора $\psi_{\alpha_1\alpha_2}$ образуем симметричный и антисимметричный спиноры с компонентами

$$\psi_{\{\alpha_1\alpha_2\}} = \frac{1}{2}\left(\psi_{\alpha_1\alpha_2} + \psi_{\alpha_2\alpha_1}\right); \tag{8.6.1}$$

$$\psi_{[\alpha_1\alpha_2]} = \frac{1}{2}\left(\psi_{\alpha_1\alpha_2} - \psi_{\alpha_2\alpha_1}\right). \tag{8.6.2}$$

В соответствии с этим пространство C_2 разлагается на два подпространства C_2^s и C_2^a, базисы которых образуются из $\dfrac{n(n+1)}{2}$ векторов

$$\mathbf{e}^{\{\alpha_1\alpha_2\}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}^{\alpha_1\alpha_2} + \mathbf{e}^{\alpha_2\alpha_1}\right), \ \alpha_1 \neq \alpha_2, \\ \mathbf{e}^{\alpha_1\alpha_2}, \ \alpha_1 = \alpha_2, \end{cases} \tag{8.6.3}$$

и $\frac{n(n-1)}{2}$ векторов

$$\mathbf{e}^{[\alpha_1\alpha_2]} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}^{\alpha_1\alpha_2} - \mathbf{e}^{\alpha_2\alpha_1}\right) \tag{8.6.4}$$

соответственно.

Любой вектор в пространстве C_2^s имеет вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi}_q &= \sum_{\alpha_1\geq\alpha_2}\Phi_{\alpha_1\alpha_2}\mathbf{e}^{\{\alpha_1\alpha_2\}} = \\ &= \sum_{\alpha}\Phi_{\alpha\alpha}\mathbf{e}^{\alpha\alpha} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{\alpha_1>\alpha_2}\Phi_{\alpha_1\alpha_2}\left(\mathbf{e}^{\alpha_1\alpha_2} + \mathbf{e}^{\alpha_2\alpha_1}\right)\end{aligned} \tag{8.6.5}$$

Обозначая через $\psi^s_{\alpha_1\alpha_2}$ компоненты вектора $\boldsymbol{\psi}_s$ в исходном базисе $\mathbf{e}^{\alpha_1\alpha_2}$, мы можем записать

$$\boldsymbol{\psi}_s = \psi^s_{\alpha_1\alpha_2}\mathbf{e}^{\alpha_1\alpha_2}\,. \tag{8.6.6}$$

Сравнивая выражения (8.5.6) и (8.6.6), получим

$$\psi^s_{\alpha_1\alpha_2} = \psi^s_{\alpha_2\alpha_1} = \begin{cases}\Phi_{\alpha_1\alpha_2}, & \alpha_1=\alpha_2,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_{\alpha_1\alpha_2}, & \alpha_1>\alpha_2,\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_{\alpha_2\alpha_1}, & \alpha_1<\alpha_2.\end{cases} \tag{8.6.7}$$

Мы видим, что векторы в пространстве C_2^s - симметричные спиноры. Поскольку любой вектор вида (8.6.3) ортогонален любому вектору вида (8.6.4), подпространства C_2^s и C_2^a ортогональны. Они являются инвариантными подпространствами, так как в любом преобразовании $U\otimes U$ симметричный спинор второго ранга преобразуется в симметричный спинор второго ранга, то есть вектор из подпространства C_2^s переходит в вектор из этого подпространства, и аналогично антисимметричный спинор превращается в антисимметричный спинор, то есть подпространство C_2^a переходит в себя.

Покажем, что они преобразуются по неприводимым представлениям. Выберем любые два базисных вектора, например вида (8.6.3). С помощью соотношения (7.2.4) (или (6.10.9)) мы можем показать, что для инфинитезимального оператора Y_k

$$Y_k = \mathbf{1}^{(1)} \otimes Y_k^{(2)} + Y_k^{(1)} \otimes \mathbf{1}^{(2)}, \tag{8.6.8}$$

где $\mathbf{1}^{(i)}$ - единичный оператор в пространстве C_i, операторы $Y_k^{(1)}$ действуют только на первый индекс, а операторы $Y_k^{(2)}$ - на второй. Можно показать, что существует такая последовательность инфинитезимальных операторов $Y_{k_1}, Y_{k_2}, \ldots, Y_{k_m}, \ldots$, что в результате действия этих операторов на один из выбранных векторов можно получить вектор, пропорциональный второму. Этот факт можно считать доказательством неприводимости представлений в C_2^s и C_2^a.

Таким образом, любой ковариантный спинор второго ранга разлагается на симметричный и антисимметричный ковариантный спиноры

$$\psi_{\alpha_1\alpha_2} = \psi_{\{\alpha_1\alpha_2\}} + \psi_{[\alpha_1\alpha_2]}, \tag{8.6.9}$$

образующие неприводимое представление.

Рассмотрим теперь представление $U \otimes \overline{U}$ в пространстве $C_{1\bar{1}}$ с базисом $\mathbf{e}_\beta^\alpha$. Векторы в этом пространстве являются спинорами второго ранга с компонентами ψ_α^β. Покажем, прежде всего, что сумма ψ_α^α инвариантна относительно всех преобразований $U \otimes \overline{U}$. Согласно (8.5.9), имеем

$$\psi_\alpha'^\beta = U_{\alpha\gamma}\overline{U}_{\beta\delta} = \psi_\gamma^\delta,$$

$$\psi'^{\alpha}_{\alpha} = U_{\alpha\gamma}\overline{U}_{\alpha\delta}\psi^{\delta}_{\gamma} = U_{\alpha\gamma}U^{+}_{\delta\alpha}\psi^{\delta}_{\gamma} = \left(UU^{+}\right)_{\delta\gamma}\psi^{\delta}_{\gamma} = \delta_{\delta\gamma}\psi^{\delta}_{\gamma} = \psi^{\alpha}_{\alpha},$$

что и требовалось доказать. Заметим, если спинор ψ^{β}_{α} имеет след равный нулю, то это свойство инвариантно относительно всех преобразований $U \otimes \overline{U}$.

Рассмотрим произвольный спинор ψ^{β}_{α} и разложим его на две части, первая из которых имеет нулевой след, а вторая пропорциональна δ^{β}_{α} :

$$\psi^{\beta}_{\alpha} = \left(\psi^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{n}\delta^{\beta}_{\alpha}\psi^{\gamma}_{\gamma}\right) + \frac{1}{n}\delta^{\beta}_{\alpha}\psi^{\gamma}_{\gamma}. \tag{8.6.10}$$

В §8.5 мы показали, что спинор δ^{β}_{α} является инвариантом и таким образом, спиноры с нулевым следом $\psi^{\beta}_{\alpha} - \frac{1}{n}\delta^{\beta}_{\alpha}\psi^{\gamma}_{\gamma}$ и спиноры $\frac{1}{n}\delta^{\beta}_{\alpha}\psi^{\gamma}_{\gamma}$, кратные спинору δ^{β}_{α} , образуют инвариантные подпространства в $C_{1\bar{1}}$, которые ортогональны, так как скалярное произведение δ^{β}_{α} на произвольный спинор Φ^{α}_{β} равно следу этого спинора

$$\delta^{\beta}_{\alpha}\Phi^{\alpha}_{\beta} = \Phi^{\alpha}_{\alpha}. \tag{8.6.11}$$

С помощью изложенного выше метода можно показать, что спиноры с нулевым следом образуют неприводимые представления и формула (8.6.10) есть разложение произвольного спинора ψ^{β}_{α} на неприводимые. Первый спинор в этой формуле имеет $n^2 - 1$ компоненту, а второй является инвариантом. Заметим, что инвариантность суммы ψ^{α}_{α} - частный случай следующего общего факта. Если $\psi^{\beta_1\ldots\beta_q}_{\alpha_1\ldots\alpha_p}$ - смешанный спинор $(p+q)$-го ранга, p раз ковариантный и q раз контравариантный, то сумма $\psi^{\alpha\beta_2\ldots\beta_q}_{\alpha\alpha_2\ldots\alpha_p}$ является (см. §3.6) смешанным спинором

$(p+q-2)$-го ранга, $p-1$ ковариантным и $q-1$ контравариантным.

Рассмотрим теперь спиноры высших рангов. Из любого ковариантного спинора, например p-го ранга, можно образовать полностью симметричный спинор $\psi_{\{\alpha_1 \ldots \alpha_p\}}$, который неприводим. Если $p \le n$, можно образовать так же и полностью антисимметричный спинор $\psi_{[\alpha_1 \ldots \alpha_p]}$, который так же неприводим. Так как для полностью антисимметричного спинора все индексы должны быть различными, не существует полностью антисимметричного спинора ранга $p > n$. Симметричный спинор p-го ранга имеет

$$\frac{1}{p!} n(n+1) \ldots (n+p-1)$$

независимых координат, а антисимметричный спинор p-го ранга имеет

$$\frac{1}{p!} n(n-1) \ldots (n-p+1)$$

независимых компонент. Кроме спиноров $\psi_{\{\alpha_1 \ldots \alpha_p\}}$ и $\psi_{[\alpha_1 \ldots \alpha_p]}$ существуют так же и другие спиноры, симметризованные по некоторым парам индексов и затем антисимметризованные по другим парам индексов. Эти спиноры характеризуются схемами Юнга, содержащими клетки, где антисимметризованным индексам соответствуют клетки расположенные в одном столбце, а симметризованным индексам – в одной строке. Любой ковариантный спинор третьего ранга $\psi_{\alpha\beta\gamma}$ может быть представлен в виде суммы следующих четырёх неприводимых спиноров: полностью симметричного спинора

$$\psi_{\{\alpha\beta\gamma\}} = \frac{1}{6}\left(\psi_{\alpha\beta\gamma} + \psi_{\beta\alpha\gamma} + \psi_{\beta\gamma\alpha} + \psi_{\gamma\beta\alpha} + \psi_{\gamma\alpha\beta} + \psi_{\alpha\gamma\beta}\right), \qquad (8.6.12)$$

полностью антисимметричного спинора

$$\psi_{[\alpha\beta\gamma]} = \frac{1}{6}\left(\psi_{\alpha\beta\gamma} - \psi_{\beta\alpha\gamma} + \psi_{\beta\gamma\alpha} - \psi_{\gamma\beta\alpha} + \psi_{\gamma\alpha\beta} - \psi_{\alpha\gamma\beta}\right), \qquad (8.6.13)$$

спинора, симметризованного по α и β, и затем антисимметризованного по β и γ,

$$\psi_{\{\alpha[\beta\}\gamma]} = \frac{1}{3}\left(\psi_{\alpha\beta\gamma} + \psi_{\beta\alpha\gamma} - \psi_{\alpha\gamma\beta} - \psi_{\gamma\alpha\beta}\right) \tag{8.6.14}$$

и спинора, симметризованного по β и γ, а затем антисимметризованного по α и β,

$$\psi_{[\alpha\{\beta]\gamma\}} = \frac{1}{3}\left(\psi_{\alpha\beta\gamma} + \psi_{\alpha\gamma\beta} - \psi_{\beta\alpha\gamma} - \psi_{\beta\gamma\alpha}\right), \tag{8.6.15}$$

откуда

$$\psi_{\alpha\beta\gamma} = \psi_{\{\alpha\beta\gamma\}} + \psi_{[\alpha\beta\gamma]} + \psi_{\{\alpha[\beta\}\gamma]} + \psi_{[\alpha\{\beta]\gamma\}} \tag{8.6.16}$$

и

$$\psi_{\{\alpha[\beta\}\gamma]} + \psi_{\{\beta[\gamma\}\alpha]} + \psi_{\{\gamma[\alpha\}\beta]} = 0\,. \tag{8.6.17}$$

Неприводимые спиноры (8.6.12)-(8.6.15) характеризуются схемами Юнга:

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline \alpha & \beta & \gamma \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|}\hline \alpha \\ \hline \beta \\ \hline \gamma \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline \beta & \alpha \\ \hline \gamma \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|}\hline \beta & \gamma \\ \hline \alpha \\ \cline{1-1} \end{array}$$

Числа компонент этих спиноров соответственно равны

$$\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2),\ \ \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2),\ \ \frac{1}{3}n\left(n^2-1\right),\ \ \frac{1}{3}n\left(n^2-1\right).$$

По аналогии любой ковариантный спинор p-го ранга разлагается на сумму неприводимых спиноров, симметризованных и антисимметризованных по определённым схемам Юнга.

При помощи полностью антисимметризованного спинора n-го ранга $\varepsilon_{\alpha_1\ldots\alpha_n}$ для любых контрагредиентных и смешанных спиноров можно ввести эквивалентные им ковариантные спиноры.

Например, контравариантный спинор ψ^{α} эквивалентен полностью антисимметричному спинору пятого ранга:

$$\psi_{[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\nu}\psi^{\nu}\ ,$$

так как произведение $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\nu}\psi^{\nu}$ образует спинор седьмого ранга, один раз контравариантный и шесть раз ковариантный, а суммирование (свёртка) по ν превращает его в ковариантный спинор пятого ранга. Аналогичным методом можно опустить все верхние индексы любого спинора и превратить его в ковариантный спинор.

Выше мы отметили, что не существует полностью антисимметричного спинора ранга $p > n$. Это означает, что каждый столбец в схеме Юнга содержит не более n клеток. Более того, полностью антисимметричный спинор n-го ранга является инвариантом, так что их можно не рассматривать. Итак, каждый столбец содержит не более чем $n-1$ строк, каждая из которых может содержать любое число клеток. Числа клеток в этих строках $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$ полностью определяют соответствующие неприводимое представление. Итак, каждое неприводимое представление характеризуется $n-1$ целыми числами $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}$, являющимися числами клеток в $n-1$ строках в соответствующей схеме Юнга. Во многих случаях эквивалентные спиноры, например типа ψ^{α} и $\psi_{[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon]}$, физически неэквивалентны и поэтому необходимо рассмотреть отдельно верхние и нижние индексы и для характеристики спиноров нужно ввести две схемы Юнга: одну для верхних индексов, а другую для нижних. Чтобы образовать неприводимые представления, необходимо также вычесть следы по всем парам индексов, содержащим один верхний и один нижний индексы.

Так как группа $SU(n)$ компактна, все её неприводимые представления можно считать унитарными. Они вполне приводимы и распадаются на неприводимые представления, а последние конечномерны.

При помощи изложенного выше метода можно исчерпать все возможные неприводимые представления группы $SU(n)$.