

Глава IX

Представления групп $SU(2)$ и $SU(3)$

В данной главе рассматриваются представления групп $SU(2)$ и $SU(3)$. Эти представления используются при построении теории спина в квантовой механике и теории унитарной симметрии элементарных частиц.

§9.1. Группа $SU(2)$ и её представления

9.1.1. Представления группы $SU(2)$

В соответствии с классификацией приведённой в §4.6, п.7 группа $SU(2)$ состоит из унитарных унимодулярных операторов в двумерном комплексном евклидовом пространстве $C(2)$. В матричной форме группа $SU(2)$ состоит из 2×2 матриц вида

$$\begin{pmatrix} U_1^1 & U_2^1 \\ U_1^2 & U_2^2 \end{pmatrix}, \quad (9.1.1)$$

где

$$|U_1^1|^2 + |U_2^1|^2 = 1, \quad |U_1^2|^2 + |U_2^2|^2 = 1, \quad (9.1.2)$$

$$\bar{U}_1^1 U_1^2 + \bar{U}_2^1 U_2^2 = 0, \quad U_1^1 U_2^2 - U_1^2 U_2^1 = 1. \quad (9.1.3)$$

Положим $U_1^1 = \alpha$, а $U_2^1 = \beta$, тогда первое условие (9.1.3) будет выполняться при

$$U_1^2 = -k\bar{U}_2^1 = -k\bar{\beta} \text{ и } U_2^2 = k\bar{U}_1^1 = k\bar{\alpha},$$

где k - некоторое число.

Условия (9.1.2) примут вид

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = |k\alpha|^2 + |k\beta|^2 = 1,$$

откуда сразу следует $|k| = 1$, или $k = e^{i\varphi}$, где φ действительное число.

В соответствии с вышеизложенным мы можем записать, что

$$U_1^2 = -e^{i\varphi}\bar{\beta}, \quad U_2^2 = e^{i\varphi}\bar{\alpha}.$$

Тогда,

$$U_1^1 U_2^2 - U_1^2 U_2^1 = e^{i\varphi}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta}) = 1.$$

Учитывая, что из условий (9.1.3) следует $e^{i\varphi} = 1$, получим

$$\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1. \quad (9.1.4)$$

Окончательно, матрицы группы $SU(2)$ примут вид

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad (9.1.5)$$

где α, β - произвольные комплексные числа, удовлетворяющие соотношению (9.1.4). Размерность группы $SU(2)$ равна (§4.6, п.7) трём.

Векторы пространства $C(2)$ мы будем называть *спинорами*, а тензоры над пространством $C(2)$ - *спинтензорами*.

Рассмотрим теперь некоторые общие свойства неприводимых представлений группы $SU(2)$. Обозначим индексы спиноров через a, b, \dots . Так как каждый индекс может принимать лишь два значения 1 и 2, то единственными антисимметричными спинорами будут антисимметричные спиноры второго ранга ε^{ab} и ε_{ab} . Выберем эти спиноры так,

чтобы $\varepsilon^{ab} = -\varepsilon_{ab}$, например

$$\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = \varepsilon^{21} = -\varepsilon^{12} = 1. \quad (9.1.6)$$

Можно показать, что

$$\varepsilon^{ab} \varepsilon_{bc} = \varepsilon_{cb} \varepsilon^{ba} = \delta_c^a. \quad (9.1.7)$$

Спиноры ε^{ab} и ε_{ab} позволяют поднимать или опускать индексы спиноров. Например,

$$\psi_a = \varepsilon_{ab} \psi^b; \quad \psi^a = \varepsilon^{ab} \psi_b, \quad (9.1.8)$$

то есть контравариантный спинор ψ^a эквивалентен ковариантному спинору ψ_a . Аналогично спиноры ψ_{ab} и ψ^{ab} связаны соотношениями

$$\psi_{ab} = \varepsilon_{ac} \psi_b^c; \quad \psi_b^a = \varepsilon^{ac} \psi_{cb}. \quad (9.1.9)$$

Если ψ_b^a имеет нулевой след, то ψ_{ab} симметричен. Действительно, если $\psi_a^a = 0$, то согласно (9.1.7)

$$\varepsilon^{ab} \psi_{ab} = \varepsilon^{ab} \varepsilon_{ac} \psi_b^c = -\varepsilon^{ba} \varepsilon_{ac} \psi_b^c = -\delta_c^b \psi_b^c = -\psi_c^c = 0,$$

а равенство нулю произведения $\varepsilon^{ab} \psi_{ab}$ означает, что $\psi_{ab} = \psi_{ba}$. Обратное, если $\psi_{ab} = \psi_{ba}$, то $\psi_a^a = \varepsilon^{ac} \psi_{ca} = 0$, то есть ψ_a^a имеет нулевой след.

Итак, неприводимый симметричный спинор $\psi_{\{ab\}}$ полностью эквивалентен смешанному спинору ψ_b^a с нулевым следом.

Рассмотрим произвольный неприводимый смешанный спинор $\psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}}$, для которого следы по всем парам индексов a_i и b_j равны нулю:

$$\psi_{\{a_1 \dots a_{i-1} c a_{i+1} \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_{j-1} c b_{j+1} \dots b_q\}} = 0. \quad (9.1.10)$$

Опуская все верхние индексы с помощью ε_{ab} , получаем ковариантный спинор ранга $p + q$:

$$\Psi_{c_1 \dots c_q a_1 \dots a_p} = \varepsilon_{c_1 b_1} \dots \varepsilon_{c_q b_q} \Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}}, \quad (9.1.11)$$

причём из симметричности спинора $\Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}}$ по верхним индексам и по нижним индексам следует симметричность спинора (9.1.11) по всем индексам $a_1 \dots a_p$ и по всем индексам $c_1 \dots c_q$. Можно показать, что спинор (9.1.11) симметричен также относительно перестановки любой пары индексов a_i и c_j . Действительно, умножая его на $\varepsilon^{c_j a_i}$ и суммируя по a_i и c_j , получим, согласно (9.1.7) и (9.1.10),

$$\begin{aligned} \varepsilon^{c_j a_i} \Psi_{c_1 \dots c_j \dots c_q a_1 \dots a_i \dots a_p} &= \varepsilon^{c_j a_i} \varepsilon_{c_1 b_1} \dots \varepsilon_{c_j b_j} \dots \varepsilon_{c_q b_q} \Psi_{\{a_1 \dots a_i \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_j \dots b_q\}} = \\ &= -\varepsilon_{c_1 b_1} \dots \delta_{b_j}^{a_i} \dots \varepsilon_{c_q b_q} \Psi_{\{a_1 \dots a_i \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_j \dots b_q\}} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, если следы (9.1.10) равны нулю, то ковариантный спинор (9.1.11) симметричен по всем перестановкам всех индексов:

$$\varepsilon_{c_1 b_1} \dots \varepsilon_{c_q b_q} \Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}} = \Psi_{\{a_1 \dots a_p c_1 \dots c_q\}}. \quad (9.1.12)$$

Спинор $\Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}}$ так же можно выразить через $\Psi_{\{a_1 \dots a_p c_1 \dots c_q\}}$

$$\Psi_{\{a_1 \dots a_p\}}^{\{b_1 \dots b_q\}} = \varepsilon^{b_1 c_1} \dots \varepsilon^{b_q c_q} \Psi_{\{a_1 \dots a_p c_1 \dots c_q\}}. \quad (9.1.13)$$

Таким образом *все неприводимые представления группы $SU(2)$ могут быть рассмотрены как ковариантные симметрические спиноры $\Psi_{\{a_1 \dots a_r\}}$, соответствующие схеме Юнга, состоящей из строки с r квадратами.*

В соответствии с §8.6 симметричные ковариантные спиноры можно получить симметризацией произвольных спиноров с компонентами $\Psi_{a_1 \dots a_r}$, являющихся векторами в пространстве C_r , преобразующемся по представлению $U \otimes \dots \otimes U$ раз. Так как любой вектор в C_r определяется по представлению $U \otimes \dots \otimes U$. Так как любой вектор в C_r определяется формулой $\Psi = \Psi_{a_1 \dots a_r} e^{a_1 \dots a_r}$, где $e^{a_1 \dots a_r}$ - ортонормированный базис в C_r , то симметричные спиноры являются векторами в подпространстве

C_r^s с базисом

$$\mathbf{e}^{\{a_1 \dots a_r\}} = \frac{\sum_{P(a_1 \dots a_r)} e^{a_1 \dots a_r}}{\left| \sum_{P(a_1 \dots a_r)} \mathbf{e}^{a_1 \dots a_r} \right|}, \quad (9.1.14)$$

где $\sum_{P(a_1 \dots a_r)}$ обозначает суммирование по всем перестановкам индексов

$a_1 \dots a_r$.

9.1.2. Инфинитезимальные операторы группы $SU(2)$

В качестве генераторов группы $SU(2)$ мы можем выбрать матрицы Паули: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (см. §6.6., п.5)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (6.6.13)$$

а в качестве матричных элементов инфинитезимальных операторов J_i , операторы (7.4.7), совпадающие с операторами углового момента. Таким образом, мы можем для операторов J_i использовать соотношения, полученные в §7.4., то есть для данного j оператор J_3 (J_z) имеет $2j+1$ собственных значений $-j, -j+1, \dots, j-1, j$ и для любого $\mathbf{e}^{\{a_1 \dots a_r\}}$

$$\mathbf{J}^2 \mathbf{e}^{\{a_1 \dots a_r\}} = j(j+1) \mathbf{e}^{\{a_1 \dots a_r\}}. \quad (9.1.15)$$

Для базиса $\mathbf{e}^{a_1 \dots a_r}$ мы можем также записать

$$(J_i)_{(a_1 \dots a_r)(b_1 \dots b_r)} = \sum_{i=1}^r \delta_{a_1 b_1} \dots \delta_{a_{i-1} b_{i-1}} \sigma_i \delta_{a_{i+1} b_{i+1}} \dots \delta_{a_r b_r}. \quad (9.1.16)$$

9.1.3. Примеры спиноров низших рангов

Рассмотрим некоторые спиноры низших рангов, характеризующие состояния с моментами $j = \frac{1}{2}$ и $j = 1$.

1. $j = \frac{1}{2}$. Состояния с $j = \frac{1}{2}$ описываются спинором ψ_a или эквивалентным ему спинором ψ^a , $a = 1, 2$. Рассмотрим сначала ковариантный спинор ψ_a . Базис в пространстве C_1 , преобразующемуся по данному представлению, состоит из векторов \mathbf{e}^1 и \mathbf{e}^2 . Каждый спинор представим в виде столбца с двумя элементами:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{e}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ а } \mathbf{e}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9.1.17)$$

Согласно (6.6.13) и (9.1.16), имеем

$$J_3 \mathbf{e}^1 = \frac{1}{2} \mathbf{e}^1, \quad J_3 \mathbf{e}^2 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^2. \quad (9.1.18)$$

Если вместо ψ_a мы возьмём $\psi^a = \varepsilon^{ab} \psi_b$, то для

$$\mathbf{e}^1 \quad (\psi_1 = 1, \psi_2 = 0) \text{ имеем } \psi^1 = 0, \psi^2 = 1,$$

а для

$$\mathbf{e}^2 \quad (\psi_1 = 0, \psi_2 = 1) \text{ имеем } \psi^1 = -1, \psi^2 = 0.$$

Таким образом, между базисом \mathbf{e}^a в пространстве C_1 и базисом \mathbf{f}_a в пространстве $C_{\bar{1}}$ имеет место соответствие

$$\mathbf{e}^1 \leftrightarrow \mathbf{f}_2, \quad \mathbf{e}^2 \leftrightarrow -\mathbf{f}_1. \quad (9.1.19)$$

Инфинитезимальные операторы J_i контравариантного представления Ψ^a связаны с инфинитезимальными операторами σ_i фундаментального представления Ψ_a соотношением

$$J_i = \bar{\sigma}_i = -(\sigma_i)^T. \quad (9.1.20)$$

Поэтому

$$J_3 \mathbf{f}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{f}_2, \quad J_3 \mathbf{f}_1 = -\frac{1}{2} \mathbf{f}_1, \quad (9.1.21)$$

что согласуется с (9.1.19).

2. $j = 1$. Состояния с $j = 1$ можно описывать при помощи симметричного ковариантного спинора второго ранга $\Psi_{\{ab\}}$. Пусть \mathbf{e}^{ab} - базис в пространстве C_2 , преобразующемся по представлению $U \otimes U$, тогда симметричными спинорами являются векторы подпространства C_2^s с базисом

$$\mathbf{e}^{\{11\}} = \mathbf{e}^{11}, \quad \mathbf{e}^{\{12\}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}^{12} + \mathbf{e}^{21}), \quad \mathbf{e}^{\{22\}} = \mathbf{e}^{22}.$$

Согласно (9.1.16) имеем

$$J_i \mathbf{e}^{ab} = (\sigma_i)_{a'a} \mathbf{e}^{a'b} + (\sigma_i)_{b'b} \mathbf{e}^{ab'}, \quad (9.1.22)$$

и, в частности,

$$J_3 \mathbf{e}^{\{11\}} = \mathbf{e}^{\{11\}}, \quad J_3 \mathbf{e}^{\{12\}} = 0, \quad J_3 \mathbf{e}^{\{22\}} = -\mathbf{e}^{\{22\}} \quad (9.1.23)$$

и мы можем положить

$$\mathbf{e}_+ = \mathbf{e}^{\{11\}}, \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}^{\{12\}}, \quad \mathbf{e}_- = \mathbf{e}^{\{22\}}. \quad (9.1.24)$$

С другой стороны, состояния с $j = 1$ можно описывать с помощью контравариантного симметричного спинора Ψ^{ab} или смешанного спинора Ψ_b^a с нулевым следом.

Рассмотрим более подробно спинор Ψ_b^a . Ранее мы установили (см. (8.6.10)), что любой спинор Φ_b^a разлагается на два ортогональных спинора, один из которых имеет нулевой след, а другой кратен δ_b^a :

$$\Phi_b^a = \left(\Phi_b^a - \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_c^c \right) + \frac{1}{2} \delta_b^a \Phi_c^c.$$

Соответственно, пространство $C_{1\bar{1}}$ с базисом \mathbf{f}_b^a , преобразующееся по представлению $U \otimes \bar{U}$, разлагается на два ортогональных подпространства. Спиноры, кратные δ_b^a , принадлежат одномерному подпространству с базисом

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2}} \delta_b^a \mathbf{f}_a^b = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{f}_1^1 + \mathbf{f}_2^2). \quad (9.1.25)$$

Второе подпространство, все векторы которого ортогональны δ , имеет базис

$$\mathbf{f}_2^1, \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{f}_1^1 - \mathbf{f}_2^2), \mathbf{f}_1^2. \quad (9.1.26)$$

Нетрудно проверить, что

$$J_3 \mathbf{f}_2^1 = \mathbf{f}_2^1, J_3 \left(\frac{\mathbf{f}_1^1 \pm \mathbf{f}_2^2}{\sqrt{2}} \right) = 0, J_3 \mathbf{f}_1^2 = -\mathbf{f}_1^2 \quad (9.1.27)$$

и мы можем положить

$$\mathbf{f}_+ = -\mathbf{f}_2^1, \mathbf{f}_0 = \frac{\mathbf{f}_1^1 - \mathbf{f}_2^2}{\sqrt{2}}, \mathbf{f}_- = \mathbf{f}_1^2. \quad (1.9.28)$$

Если представить спиноры в виде матрицы

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1^1 & \psi_1^2 \\ \psi_2^1 & \psi_2^2 \end{pmatrix},$$

то получим

$$\mathbf{f}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{f}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.1.29)$$

Отметим, что для получения неприводимых представлений с базисами (9.1.24) и (9.1.28) можно применить метод описанный в §7.4 заранее зная, что \mathbf{e}^{11} - единственный ковариантный спинор второго ранга с $J_3 = +1$, принадлежащий некоторому неприводимому представлению. Действуя на этот спинор инфинитезимальными операторами J_i несколько раз, можно получить все остальные спиноры в данном неприводимом представлении.

С учётом (7.4.8) и того, что

$$\sigma_+ = \sigma_1 + i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_- = \sigma_1 - i\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

получим все спиноры (9.1.24)

$$J_- \mathbf{e}^{11} = \mathbf{e}^{12} + \mathbf{e}^{21}, \quad J_- (\mathbf{e}^{12} + \mathbf{e}^{21}) = 2\mathbf{e}^{22}.$$

Аналогично

$$J_- \mathbf{f}_2^1 = \mathbf{f}_2^2 - \mathbf{f}_1^1, \quad J_- (\mathbf{f}_2^2 - \mathbf{f}_1^1) = -2\mathbf{f}_1^2,$$

то есть, получаем все спиноры (9.1.28).

§9.2. Группа $SU(3)$ и её представления

9.2.1. Генераторы группы $SU(3)$

Как было показано в гл. VI, п.3, генераторами группы $SU(3)$ являются $3^2 - 1 = 8$ эрмитовых 3×3 матриц Гелл-Манна (6.6.24) с нулевым следом:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \tag{6.6.24}
\end{aligned}$$

удовлетворяющие соотношениям (6.6.25)-(6.6.27).

Выбор генераторов в виде матриц (6.6.24) удобен тем, что эти матрицы аналогичны матрицам Паули σ_i для группы $SU(2)$, и при изучении различных подгрупп $SU(2)$ группы $SU(3)$ сразу видно, к каким подгруппам относится каждая матрица.

Так как λ_1 и λ_8 коммутируют мы их в дальнейшем свяжем с квантовыми числами: зарядом и гиперзарядом. Можно показать, что $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ образуют алгебру Ли группы $SU(2)$. В дальнейшем эти генераторы мы отождествим с генераторами изотопической группы.

Свяжем λ_3 с зарядом, а λ_8 с гиперзарядом. При изучении изото-

пической инвариантности иногда удобно пользоваться (см. (7.4.8)) линейной комбинацией операторов σ_1 и σ_2

$$\sigma_{\pm} = \sigma_1 \pm i\sigma_2. \tag{9.2.1}$$

По аналогии с (9.2.1) положим

$$\left. \begin{aligned} t_+ &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ t_- &= \frac{1}{2}(\lambda_1 - i\lambda_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \tag{9.2.2}$$

$$\left. \begin{aligned} u_+ &= \frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ u_- &= \frac{1}{2}(\lambda_4 - i\lambda_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \tag{9.2.3}$$

$$\left. \begin{aligned} v_+ &= \frac{1}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ v_- &= \frac{1}{2}(\lambda_6 - i\lambda_7) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \tag{9.2.4}$$

$$h_1 = t_3 = t_z = \frac{1}{2} \lambda_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.2.5)$$

$$h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} y = \frac{1}{2} \lambda_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (9.2.6)$$

Можно показать, что коммутатор любых двух из (9.2.2)-(9.2.6) матриц является их линейной комбинацией, что является следствием общего свойства (7.2.5) инфинитезимальных операторов группы.

Матрицы t_{\pm} и $t_z = h_1$, будучи инфинитезимальными операторами подгруппы $SU(2)$, удовлетворяют перестановочным соотношениям (7.4.9) и (7.4.11):

$$[t_+, t_-] = 2t_z \quad (9.2.7)$$

и

$$[h_i, t_{\pm}] = \pm \alpha_i^t t_{\pm}. \quad (9.2.8)$$

Можно так же показать, что

$$[h_i, u_{\pm}] = \pm \alpha_i^u u_{\pm}, \quad (9.2.9)$$

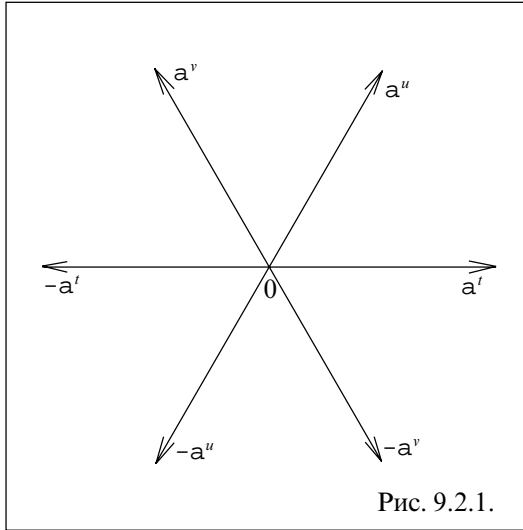
$$[h_i, v_{\pm}] = \pm \alpha_i^v v_{\pm}, \quad (9.2.10)$$

где $i = 1, 2$, а

$$\alpha_i^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i^u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i^v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix}. \quad (9.2.11)$$

Представим значения $\pm \alpha_i^t$, $\pm \alpha_i^u$, $\pm \alpha_i^v$ двумерными векторами с компонентами $\pm \alpha_1^t$, $\pm \alpha_1^u$, $\pm \alpha_1^v$ на оси Ox и компонентами $\pm \alpha_2^t$,

$\pm \alpha_2^u, \pm \alpha_2^v$ на оси Oy соответственно, в результате чего получим так называемую корневую диаграмму группы $SU(3)$, а векторы с данными компонентами назовём корнями (Рис. 9.2.1).



9.2.2. Неприводимые представления группы $SU(3)$

Для построения неприводимых представлений группы $SU(3)$ воспользуемся теорией изложенной в гл. VIII. Обозначим спинорные индексы через α, β, \dots . Поскольку каждый индекс принимает лишь три значения, то не существует полностью антисимметричного спинора ранга больше 3. Полностью антисимметричные спиноры третьего ранга $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ и $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}$ являются инвариантами. Выберем эти спиноры так, чтобы $\epsilon_{123} = \epsilon^{123} = 1$. При помощи этих спиноров можно превращать каждую пару антисимметричных верхних индексов в нижний и наоборот:

$$\Psi_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \Psi^{[\beta\gamma]} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \Psi_{[\beta\gamma]}. \quad (9.2.12)$$

Это означает, что все неприводимые представления группы $SU(3)$ можно рассматривать как спиноры, симметричные по всем верхним индексам и по всем нижним индексам и имеющие нулевые следы.

Неприводимое представление, соответствующее спинору с p верхними и q нижними симметричными индексами, обозначим $D(q, p)$. Так, $D(q, 0)$ соответствует ковариантному спинору ранга q , а $D(0, p)$ — контравариантному спинору ранга p .

Подсчитаем число независимых компонент ковариантного спинора ранга q . Если каждый индекс принимал бы только два значения, то число независимых компонент этого спинора было бы равно $q + 1$, как это имеет место для группы $SU(2)$. В данном случае каждый индекс принимает три значения. Рассмотрим компоненты, для которых q' индексов принимают значения 1 и 2, а $q - q'$ остальных индексов — значения 3. Число таких компонент равно $q' + 1$. Так как q' меняется от нуля до q , то число всех компонент симметричного ковариантного спинора ранга q равно

$$N(q, 0) = \sum_{q'=0}^q (q' + 1) = \frac{1}{2} (q + 1)(q + 2).$$

Аналогично число независимых компонент симметричного контравариантного спинора ранга p равно

$$N(0, p) = \frac{1}{2} (p + 1)(p + 2).$$

Рассмотрим теперь смешанный спинор ранга $p + q$, q раз ковариантный и p раз контравариантный, $\Psi_{\alpha_1 \dots \alpha_q}^{\beta_1 \dots \beta_p}$.

Число компонент такого смешанного спинора было бы равно

$$N(q,0)N(0,p) = \frac{1}{4}(q+1)(q+2)(p+1)(p+2),$$

если все следы $\psi_{\alpha_1 \dots \gamma \dots \alpha_q}^{\beta_1 \dots \gamma \dots \beta_p}$ были бы произвольными. Так как число таких следов равно числу компонент смешанного спинора ранга $p+q-2$, $q-1$ раз ковариантного и $p-1$ раз контравариантного, то есть равно

$$N(q-1,0)N(0,p-1) = \frac{1}{4}q(q+1)p(p+1),$$

то для неприводимого спинора ранга $p+q$, все следы которого равны нулю, получим

$$\frac{1}{4}q(q+1)p(p+1)$$

условий.

Итак, число независимых компонент неприводимого смешанного спинора q раз ковариантного и p раз контравариантного, равно

$$\begin{aligned} N(q,p) &= \frac{1}{4}(q+1)(q+2)(p+1)(p+2) - \\ &- \frac{1}{4}q(q+1)p(p+1) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2). \end{aligned} \quad (9.2.13)$$

Например.

$$N(1,0) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 3,$$

$$N(0,1) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3 = \bar{3},$$

$$N(1,1) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 = 8,$$

$$N(3,0) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5 = 10,$$

$$N(0,3) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 \cdot 3 = \overline{10},$$

$$N(2,2) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 6 = 27.$$

Инфинитезимальные операторы представления, соответствующие генераторам $t_{\pm}, u_{\pm}, v_{\pm}$ и h_i , обозначим через $T_{\pm}, U_{\pm}, V_{\pm}$ и H_i соответственно, а инфинитезимальные операторы, соответствующие генераторам λ_i через Λ_i . Для ковариантного спинора первого ранга

$$(\Lambda_i)_{\alpha\beta} = (\lambda_i)_{\alpha\beta},$$

а для контравариантного спинора первого ранга

$$(\Lambda_i)_{\alpha\beta} = (\overline{\lambda_i})_{\alpha\beta} = -(\lambda_i^T)_{\alpha\beta} = -(\lambda_i)_{\beta\alpha}.$$

Если в пространстве $C_{q\overline{p}}$, преобразующемся по представлению

$$U \otimes \dots \otimes U \otimes \overline{U} \otimes \dots \otimes \overline{U},$$

q раз p раз

выберем ортонормированный базис $\mathbf{e}_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}$, то действие инфинитезимального оператора Λ_i на эти векторы выразится формулой

$$\begin{aligned} \Lambda_i \mathbf{e}_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} &= \sum_{r=1}^q (\lambda_i)_{\alpha_r \alpha'_r} \mathbf{e}_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r-1} \alpha'_r \alpha_{r+1} \dots \alpha_q} - \\ &- \sum_{r=1}^p (\lambda_i^T)_{\beta_r \beta'_r} \mathbf{e}_{\beta_1 \dots \beta_{r-1} \beta'_r \beta_{r+1} \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}. \end{aligned} \quad (9.2.14)$$

Так как генераторы h_i диагональны, то соответствующие им инфинитезимальные операторы H_i также будут диагональны. Обозначим числа ковариантных индексов, равных 1, 2 и 3 через $q(1)$, $q(2)$ и $q(3)$ соответственно, а числа контравариантных индексов - $p(1)$, $p(2)$ и

$p(3)$. Тогда из формулы (9.2.14) и конкретного вида матриц λ_i (6.6.24) можно показать, что базисный вектор с заданными числами индексов, равных 1, 2 и 3, соответствует следующим собственным значениям операторов H_i :

$$H_1 \mathbf{e}_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \left\{ \frac{1}{2} [q(1) - p(1)] - \frac{1}{2} [q(2) - p(2)] \right\} \mathbf{e}_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}, \quad (9.2.15)$$

$$H_2 \mathbf{e}_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} = \left\{ \frac{1}{2\sqrt{3}} [q(1) - p(1)] + \frac{1}{2\sqrt{3}} [q(2) - p(2)] - \frac{1}{\sqrt{3}} [q(3) - p(3)] \right\} \mathbf{e}_{\beta_1 \dots \beta_p}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}. \quad (9.2.16)$$

Аналогичные соотношения имеют место для канонического базиса неприводимых представлений. Собственные значения операторов H_i будем рассматривать как компоненты двумерных векторов, называемых весами. Изображая эти векторы на графиках, мы получим так называемые весовые диаграммы.

Произведение двух неприводимых представлений, вообще говоря, приводимо и разлагается на неприводимые представления. Например, любой произвольный смешанный спинор вида ψ_α^β преобразующийся по представлению $3 \times \bar{3}$, разлагается на сумму инвариантного спинора, пропорционального δ_α^β и неприводимого спинора с нулевым следом (8.6.10):

$$\psi_\alpha^\beta = \frac{1}{3} \delta_\alpha^\beta \psi_\gamma^\gamma + \left(\psi_\alpha^\beta - \frac{1}{3} \delta_\alpha^\beta \psi_\gamma^\gamma \right).$$

Таким образом,

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8,$$

или

$$D(1,0) \otimes D(0,1) = D(0,0) \oplus D(1,1).$$

Если для получения неприводимых спиноров из произвольного смешанного спинора второго ранга следует вычесть след, то для получе-

ния неприводимых спиноров из произвольного ковариантного или контравариантного спинора необходимо симметризовать или антисимметризовать индексы:

$$\Psi_{\alpha\beta} = \Psi_{\{\alpha\beta\}} + \Psi_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2} \{ \Psi_{\alpha\beta} + \Psi_{\beta\alpha} \} + \frac{1}{2} \{ \Psi_{\alpha\beta} - \Psi_{\beta\alpha} \}.$$

Антисимметричный ковариантный спинор второго ранга эквивалентен (см. (9.2.12)) контравариантному спинору первого ранга, поэтому можно получить закон умножения представлений

$$3 \otimes 3 = 6 \oplus \bar{3},$$

или

$$D(1,0) \otimes D(0,1) = D(2,0) \oplus D(0,1).$$

Аналогично

$$\bar{3} \otimes \bar{3} = \bar{6} \oplus 3,$$

или

$$D(0,1) \otimes D(0,1) = D(0,2) \oplus D(1,0).$$

Приведём для справки несколько формул, которые можно получить таким же методом:

$$6 \otimes 3 = 8 \oplus 10,$$

или

$$D(2,0) \otimes D(1,0) = D(1,1) \oplus D(3,0);$$

$$\bar{6} \otimes \bar{3} = 8 \oplus \bar{10},$$

или

$$D(0,2) \otimes D(0,1) = D(1,1) \oplus D(0,3);$$

$$6 \otimes \bar{6} = 1 \oplus 8 \oplus 27,$$

или

$$D(2,0) \otimes D(0,2) = D(0,0) \oplus D(1,1) \oplus D(2,2);$$

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27,$$

или

$$D(1,1) \otimes D(1,1) = D(0,0) \oplus D(1,1) \oplus D(1,1) \oplus D(3,0) \oplus \\ \oplus D(0,3) \oplus D(2,2);$$

$$10 \otimes \overline{10} = 1 \oplus 8 \oplus 27 \oplus 64,$$

или

$$D(3,0) \otimes D(0,3) = D(0,0) \oplus D(1,1) \oplus D(2,2) \oplus D(3,3).$$

9.2.3 Спиноры низших рангов

Рассмотрим подробно некоторые простейшие неприводимые представления, которые мы будем использовать в физических приложениях.

Трёхмерное комплексное пространство C_1 с базисом e^a , $a = 1, 2, 3$, преобразуется по фундаментальному представлению $D(1,0)$. Векторы в этом пространстве являются ковариантными спинорами первого ранга с компонентами ψ_a . Каждый базисный вектор соответствует некоторому весу. Представим эти векторы на весовой диаграмме (Рис. 9.2.2).

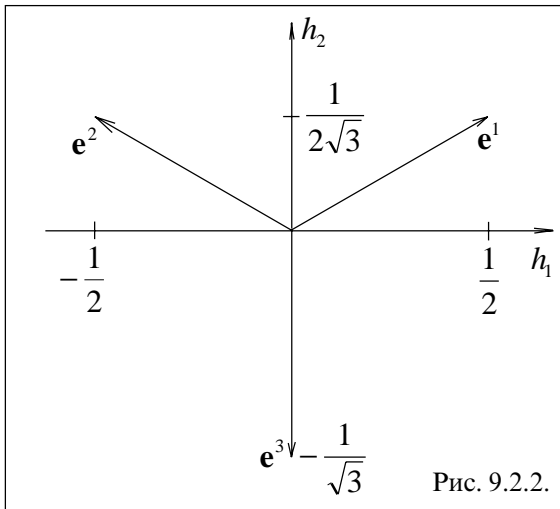


Рис. 9.2.2.

Из диаграммы следует, что

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \mathbf{e}^1;$$

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \mathbf{e}^2; \quad (9.2.17)$$

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \mathbf{e}^3.$$

Аналогично для контрагредиентного к фундаментальному представлению – контравариантного спинора первого ранга имеем весовую диаграмму (Рис. 9.2.3).

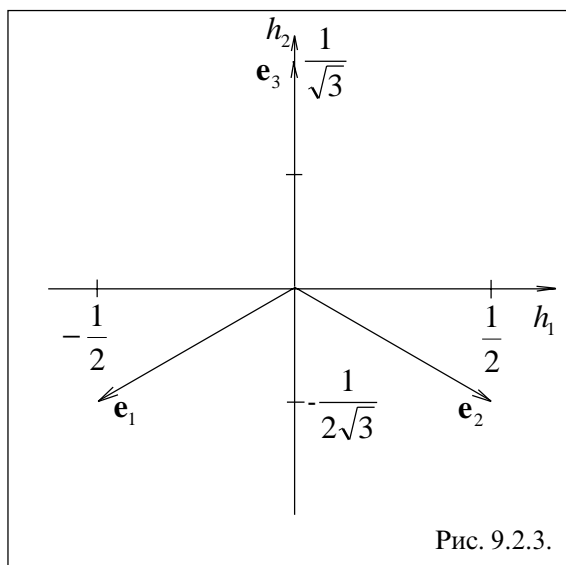


Рис. 9.2.3.

Откуда

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \mathbf{e}_1;$$

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \mathbf{e}_2;$$

$$\begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \mathbf{e}_3.$$
(9.2.18)

Рассмотрим теперь представление $D(2,0)$. Канонический базис этого представления получается из базиса $\mathbf{e}^{\alpha\beta}$ представления $U \otimes U$ путём симметризации индексов

$$\mathbf{e}^{\alpha\beta} = \frac{\mathbf{e}^{\alpha\beta} + \mathbf{e}^{\beta\alpha}}{|\mathbf{e}^{\alpha\beta} + \mathbf{e}^{\beta\alpha}|}.$$

В исходном базисе $\mathbf{e}^{\alpha\beta}$ шесть базисных векторов $\mathbf{e}^{\{\alpha\beta\}}$ представления $D(2,0)$ имеют следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} f^1 = \mathbf{e}^{\{11\}} : \quad \psi_{11} &= 1; \\ f^2 = \mathbf{e}^{\{12\}} : \quad \psi_{12} = \psi_{21} &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ f^3 = \mathbf{e}^{\{22\}} : \quad \psi_{22} &= 1; \\ f^4 = \mathbf{e}^{\{13\}} : \quad \psi_{13} = \psi_{31} &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \end{aligned}$$
(9.2.19)

$$f^5 = \mathbf{e}^{\{23\}}: \quad \psi_{23} = \psi_{32} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$f^6 = \mathbf{e}^{\{33\}}: \quad \psi_{33} = 1.$$

Из (9.2.15) и (9.2.16) видно, каким собственным значениям операторов H_i соответствуют эти векторы и мы можем составить весовую диаграмму (Рис. 9.2.4).

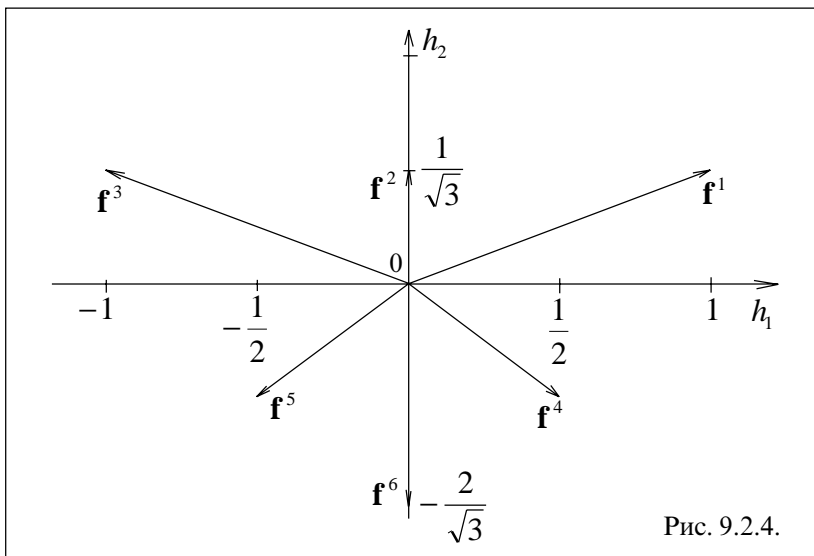


Рис. 9.2.4.

Для представления $D(0,2)$ достаточно заменить нижние индексы на верхние и обратно и поменять знаки весов всех базисных векторов.

Рассмотрим наконец представление $D(1,1)$, по которому преобразуется смешанный спинор второго ранга ψ_β^α с нулевым следом $\psi_\alpha^\alpha = 0$.

Как известно, произвольный смешанный спинор второго ранга Φ_β^α разлагается на сумму спинора с нулевым следом и инвариантного спинора, пропорционального δ_β^α :

$$\Phi_\beta^\alpha = \left(\Phi_\beta^\alpha - \frac{1}{3} \delta_\beta^\alpha \Phi_\gamma^\gamma \right) + \frac{1}{3} \delta_\beta^\alpha \Phi_\gamma^\gamma.$$

Соответствующее пространство $C_{1\bar{1}}$ с базисом \mathbf{e}_β^α , преобразующееся по представлению $U \otimes \bar{U}$, разлагается на два ортогональных подпространства. Инвариантный спинор δ_β^α принадлежит одномерному представлению с базисом

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{3}} (\mathbf{e}_1^1 + \mathbf{e}_2^2 + \mathbf{e}_3^3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \delta_\beta^\alpha \mathbf{e}_\beta^\alpha.$$

В исходном базисе этот вектор имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\psi_1^1 = \psi_2^2 = \psi_3^3 = \frac{1}{\sqrt{3}}. \tag{9.2.20}$$

Базисные векторы во втором подпространстве, преобразующемся по представлению $D(1,1)$, ортогональны вектору (9.2.20). Этому условию удовлетворяют шесть базисных векторов \mathbf{e}_β^α с $\alpha \neq \beta$. Два остальных имеют вид линейных комбинаций векторов \mathbf{e}_1^1 , \mathbf{e}_2^2 и \mathbf{e}_3^3 . Эти комбинации надо выбрать так, чтобы они были ортогональны друг другу. Этим условиям удовлетворяют следующие комбинации:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_2^2); \quad \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_1^1 + \mathbf{e}_2^2 - 2\mathbf{e}_3^3).$$

Таким образом, базисы в пространстве $D(1,1)$ можно выбрать в виде

$$\mathbf{e}_2^1, \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_2^2), \mathbf{e}_1^2, \mathbf{e}_3^1, \mathbf{e}_3^2, \mathbf{e}_1^3, \mathbf{e}_2^3, \frac{1}{\sqrt{6}} (\mathbf{e}_1^1 + \mathbf{e}_2^2 - 2\mathbf{e}_3^3).$$

В исходном базисе эти векторы имеют следующие ненулевые компоненты:

$$f^1 = \mathbf{e}_2^1 : \quad \psi_1^2 = 1;$$

$$\begin{aligned}
f^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_2^2): & \psi_1^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \psi_2^2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\
f^3 &= \mathbf{e}_1^2: & \psi_2^1 &= 1; \\
f^4 &= \mathbf{e}_3^1: & \psi_1^3 &= 1; \\
f^5 &= \mathbf{e}_3^2: & \psi_2^3 &= 1; \\
f^6 &= \mathbf{e}_1^3: & \psi_3^1 &= 1; \\
f^7 &= \mathbf{e}_2^3: & \psi_3^2 &= 1; \\
f^8 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1^1 + \mathbf{e}_2^2 - 2\mathbf{e}_3^3): & \psi_1^1 &= \psi_2^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \psi_3^3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}.
\end{aligned} \tag{9.2.21}$$

На основании (9.2.15) и (9.2.16) можно найти веса этих векторов и получить соответствующую весовую диаграмму.

9.2.4. Подгруппы $SU(2)$

Группа $SU(3)$ содержит три различные подгруппы $SU(2)$, каждая из которых оставляет инвариантным один из трёх базисных векторов трёхмерного пространства, в котором действуют все преобразования группы $SU(3)$.

Генераторами одной из таких подгрупп могут быть t_{\pm} и $t_3 = t_z$. Эту подгруппу мы будем называть T -подгруппой. Другими подгруппами $SU(2)$ будут подгруппы с генераторами

$$u_{\pm}, u_3 = \frac{1}{4}(\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8) \tag{9.2.22}$$

и

$$v_{\pm}, v_3 = \frac{1}{4}(-\lambda_3 + \sqrt{3}\lambda_8), \tag{9.2.23}$$

которые мы будем называть U - и V - подгруппами соответственно.

Каждое неприводимое представление группы $SU(3)$ содержит различные неприводимые представления одной из этих подгрупп, причём неприводимые представления одной подгруппы не совпадают с неприводимыми представлениями других подгрупп.

Генератор $h_2 = \frac{1}{2} \lambda_8$ коммутирует со всеми генераторами T -подгруппы и, таким образом, в каждом неприводимом представлении T -подгруппы инфинитезимальный оператор $H_2 = \frac{1}{2} \lambda_8$, в соответствии с первой леммой Шура кратен единице. Все состояния одного T -мультиплета соответствуют одному и тому же собственному значению оператора H_2 или оператора

$$Y^t = \frac{2}{\sqrt{3}} H_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \Lambda_8. \quad (9.2.24)$$

Аналогично оператор

$$Y^u = H_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} H_2 = \frac{1}{2} \Lambda_3 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \Lambda_8 \quad (9.2.25)$$

коммутирует с генераторами U -подгруппы, а оператор

$$Y^v = -\left(H_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} H_2 \right) = -\frac{1}{2} \Lambda_3 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \Lambda_8 \quad (9.2.26)$$

коммутирует с генераторами V -подгруппы.

Для каждого неприводимого представления U -подгруппы (или V -подгруппы) Y^u (или Y^v) имеет вполне определённое значение.

Рассмотрим расщепление некоторых неприводимых представлений группы $SU(3)$ на неприводимые представления её подгрупп $SU(2)$.

Начнём с фундаментального представления с базисами \mathbf{e}^1 , \mathbf{e}^2 и \mathbf{e}^3 . Так как t_{\pm} и t_3 действуют только на \mathbf{e}^1 и \mathbf{e}^2 :

$$t_- \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^2; \quad t_+ \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}^1; \quad t_3 \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^1; \quad t_3 \mathbf{e}^2 = -\frac{1}{2} \mathbf{e}^2; \quad t_{\pm} \mathbf{e}^3 = t_3 \mathbf{e}^3 = 0,$$

то \mathbf{e}^1 и \mathbf{e}^2 образуют неприводимое представление T -подгруппы. Это – фундаментальное представление группы $SU(2)$. Вектор \mathbf{e}^3 является базисом одномерного представления. Мы можем говорить, что представление $D(1,0)$ расщепляется на T -спинор (с T -спином $\frac{1}{2}$) с базисами \mathbf{e}^1 и \mathbf{e}^2 и T -скаляр \mathbf{e}^3 (с T -спином 0). Аналогично оно расщепляется на U -спинор (с U -спином $\frac{1}{2}$) с базисами \mathbf{e}^1 и \mathbf{e}^3 и U -скаляр \mathbf{e}^2 (с U -спином 0) и V -спинор (с V -спином $\frac{1}{2}$) с базисами \mathbf{e}^2 и \mathbf{e}^3 и V -скаляр \mathbf{e}^1 (с V -спином 0).

Можно показать, что

$$\begin{aligned} Y^t \mathbf{e}^1 &= \frac{1}{3} \mathbf{e}^1, \quad Y^t \mathbf{e}^2 = \frac{1}{3} \mathbf{e}^2, \quad Y^t \mathbf{e}^3 = -\frac{2}{3} \mathbf{e}^3; \\ Y^u \mathbf{e}^1 &= \frac{1}{3} \mathbf{e}^1, \quad Y^u \mathbf{e}^3 = \frac{1}{3} \mathbf{e}^3, \quad Y^u \mathbf{e}^2 = -\frac{2}{3} \mathbf{e}^2; \\ Y^v \mathbf{e}^2 &= \frac{1}{3} \mathbf{e}^2, \quad Y^v \mathbf{e}^3 = \frac{1}{3} \mathbf{e}^3, \quad Y^v \mathbf{e}^1 = -\frac{2}{3} \mathbf{e}^1. \end{aligned} \tag{9.2.27}$$

Заменяя знаки в правых частях (9.2.27), мы получим расщепление в $D(0,1)$.

Рассмотрим расщепление высшего представления с помощью следующего метода. Выберем какой-нибудь базисный вектор, который принадлежит определённому неприводимому представлению некоторой подгруппы. Так как инфинитезимальные операторы этой подгруппы переводят этот вектор в остальные базисные векторы данного представления или их комбинации, то для получения базиса этого представления достаточно подействовать на выбранный вектор всеми инфинитезималь-

ными операторами рассматриваемой подгруппы.

Проиллюстрируем этот метод на примере представления $D(1,1)$.

Рассмотрим вектор \mathbf{e}_2^1 , соответствующий значениям $T_3 = 1$ и $Y' = 0$.

Если этот вектор не принадлежит определённому неприводимому представлению, то он имеет вид суммы двух или нескольких векторов, принадлежащих различным неприводимым представлениям. Все последние векторы должны быть собственными векторами операторов T_3 и Y' с одними и теми же собственными значениями в силу условий $T_3 \mathbf{e}_2^1 = \mathbf{e}_2^1$ и $Y' \mathbf{e}_2^1 = 0$. Однако, \mathbf{e}_2^1 является единственным вектором со значениями $T_3 = 1$ и $Y' = 0$. Следовательно, он должен принадлежать определённому неприводимому представлению. Действуя на этот вектор операторами T_{\pm} и T_3 мы получим базис представления с $T_3 = 1$ и $Y' = 0$

$$\mathbf{e}_2^1, \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2^1 - \mathbf{e}_2^2), \mathbf{e}_1^2. \tag{9.2.28}$$

Аналогично из \mathbf{e}_3^1 получаем T - спинор с $T = \frac{1}{2}$ и $Y' = 1$

$$\mathbf{e}_3^1, \mathbf{e}_3^2, \tag{9.2.29}$$

а из \mathbf{e}_1^3 - другой T - спинор

$$T = \frac{1}{2} \text{ и } Y' = -1: \mathbf{e}_2^3, \mathbf{e}_1^3. \tag{9.2.30}$$

Последний вектор в выражении (9.2.21)

$$T = 0 \text{ и } Y' = 0: \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1^1 + \mathbf{e}_2^2 - 2\mathbf{e}_3^3). \tag{9.2.31}$$

Аналогично представление $D(1,1)$ расщепляется на U - или V - мультиплеты:

$$\left. \begin{aligned} U = 1, Y^u = 0: & \mathbf{e}_3^1, \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1^1 - \mathbf{e}_3^3), \mathbf{e}_2^3, \\ U = \frac{1}{2}, Y^u = 1: & \mathbf{e}_2^1, \mathbf{e}_2^3, \\ U = \frac{1}{2}, Y^u = -1: & \mathbf{e}_3^2, \mathbf{e}_1^2, \\ U = 0, Y^u = 0: & \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_1^1 + \mathbf{e}_3^3 - 2\mathbf{e}_2^2) \end{aligned} \right\} \quad (9.2.31)$$

$$\left. \begin{aligned} V = 1, Y^v = 0: & \mathbf{e}_3^2, \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_2^2 - \mathbf{e}_3^3), \mathbf{e}_2^3, \\ V = \frac{1}{2}, Y^v = 1: & \mathbf{e}_1^2, \mathbf{e}_1^3, \\ V = \frac{1}{2}, Y^v = -1: & \mathbf{e}_3^1, \mathbf{e}_2^1, \\ V = 0, Y^v = 0: & \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{e}_2^2 + \mathbf{e}_3^3 - 2\mathbf{e}_1^1) \end{aligned} \right\} \quad (9.2.32)$$

В физических приложениях рассматриваются симметрии требующие использования групп $SU(4)$ и $SU(6)$. Мы же ограничимся рассмотрением групп $SU(2)$ и $SU(3)$ в надежде на то, что читатель, проявив определённое упорство и благополучно добравшийся до конца данного учебного пособия в состоянии самостоятельно разобраться в вопросах построения неприводимых представлений групп $SU(4)$ и $SU(6)$.