Глава II
Группы и их представления

§ 7. Линейные преобразования

n-мерное векторное пространство $(e_1, \ldots, e_n)$ образовано линейными комбинациями $c_1 e_1 + \cdots + c_n e_n$ n линейно-независимых *базисных векторов* $e_1, \ldots, e_n$ с комплексными коэффициентами $c_1, \ldots, c_n$, Вообще мы будем называть векторным пространством любую совокупность произвольных величин, состоящую из линейных комбинаций n линейно-независимых величин. Так, например, в рассмотренных в разделе I задачах собственные функции каждого уровня энергии образуют векторное пространство.

Линейный оператор или *линейное преобразование* A векторного пространства в самое себя переводит каждый базисный вектор e_μ в новый вектор e'_μ

$$Ae_\mu = e'_\mu = \sum e_\lambda a_{\lambda\mu}, \tag{7.1}$$

и каждой линейной комбинации $v = \sum e_\lambda c_\lambda$ приводит в соответствие такую же линейную комбинацию e'_λ

$$Av = \sum \sum e_\lambda a_{\lambda\mu} c_\mu.$$

Коэффициенты Av равны, следовательно,

$$c'_\lambda = \sum a_{\lambda\mu} c_\mu. \tag{7.2}$$

При определенном выборе базисных векторов $e_1, \ldots, e_n$ линейное преобразование A представляется матрицей

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

которую часто тоже обозначают через A.[1]

Применяя два линейных преобразования A и B одно за другим, сначала B, а потом A, получим произведение преобразований AB, которое, вследствие соотношения

$$ABe_\mu = A(Be_\mu) = A\sum e_\lambda b_{\lambda\mu} = \sum\sum e_\varkappa a_{\varkappa\lambda} b_{\lambda\mu},$$

может быть представлено произведением матриц $(a_{\varkappa\lambda})\cdot(b_{\lambda\mu})$ с элементами $\sum\limits_\lambda a_{\varkappa\lambda} b_{\lambda\mu}$.

Уравнение (7.2) можно записать в виде матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} c'_1 \\ \vdots \\ c'_n \end{pmatrix} = (a_{\lambda\mu}) \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Если детерминант $|A|$ матрицы A отличен от нуля, то можно решить (7.2) относительно c_μ и получить преобразование A^{-1}, обратное преобразованию A

$$A^{-1}Av = v \text{ для каждого вектора } v.$$

Поэтому произведение $A^{-1}A$, а также AA^{-1} является «идентичным преобразованием» **1**, которое представляется «единичной матрицей».

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Если же, напротив, $|A| = 0$, то A не имеет обратной матрицы и называется *сингулярной* матрицей.

[1] При применении этих формул надо обратить внимание на то, что каждое уравнение (7.1) соответствует столбцу матрицы A, а каждое уравнение (7.2) соответствует строке. Выписывая полностью уравнения (7.1)

$$\begin{aligned} Ae_1 &= e_1 a_{11} + e_2 a_{21} + \cdots + e_n a_{n1} \\ Ae_2 &= e_1 a_{12} + e_2 a_{22} + \cdots + e_n a_{n2}, \\ &\cdots \end{aligned}$$

мы видим, что матрица коэффициентов справа является транспонированной относительно исходной.

Введем новые базисные векторы $d_1, \ldots, d_n$ с помощью базисного преобразования с несингулярной матрицей $P = (p_{\lambda\mu})$

$$d_\nu = Pe_\nu, \quad e_\nu = P^{-1}d_\nu, \quad P^{-1} = (q_{\varkappa\lambda}),$$

тогда

$$\begin{aligned} Ad_\nu = A\sum e_\mu p_{\mu\nu} = \sum\sum e_\lambda a_{\lambda\mu} p_{\mu\lambda} = \\ = \sum\sum\sum d_\varkappa q_{\varkappa\lambda} a_{\lambda\mu} p_{\mu\nu}; \end{aligned}$$

откуда следует, что то же самое преобразование A, отнесенное к новому базису, представляется матрицей $P^{-1}AP$. Если мы преобразуем все пространство с помощью преобразования Q, тогда преобразование A переходит в новое преобразование QAQ^{-1}. Действительно, если старое преобразование A переводит вектор v в w, то новое преобразование должно переводить вектор Qv в Qw, а это и дает преобразование QAQ^{-1}.

Мы говорим об *унитарном векторном пространстве*, если установлена *эрмитовская форма*

$$(v, v) = \sum\sum g_{\lambda\mu}\bar{c}_\lambda c_\mu; \quad g_{\lambda\mu} = \bar{g}_{\mu\lambda},$$

значение которой для любого вектора $v = (c_1, \ldots, c_n)$, за исключением $v = 0$, всегда положительно (*определенная положительная* эрмитовская форма). При этом *скалярное произведение* двух векторов определяется выражением

$$(v,\, w) = \sum\sum g_{\lambda\mu}\bar{c}_\lambda d_\mu. \tag{7.3}$$

Если оно равно нулю, векторы называются *ортогональными.*

Можно выбрать *ортогональные* базисные векторы $e_1, \ldots, e_n$ так, чтобы $(e_\lambda, e_\mu) = 0$ для $\lambda \neq \mu$. Тогда $g_{\lambda\mu} = 0$ для $\lambda \neq \mu$.[1]

Далее мы можем *нормировать* эти векторы так, чтобы $(e_\lambda, e_\lambda) = 1$ или $g_{\lambda\lambda} = 1$. Тогда

$$(v,\, v) = \sum \bar{c}_\lambda c_\lambda; \quad (v,\, w) = \sum \bar{c}_\lambda d_\lambda,$$

[1] *Доказательство.* Если векторы $e_1, \ldots, e_n$ не ортогональны, то мы сначала заменим для $\lambda = 2, 3, \ldots, n$ каждое e_λ на $e'_\lambda = e_\lambda + \beta_\lambda e_1$, где β выбрано так что $(e_1, e'_\lambda) = (e_1, e_\lambda) + \beta \cdot (e_\lambda, e_\lambda) = 0$. Таким же образом заменим потом для $\lambda = 3, \ldots, n$ каждое e'_λ на $e''_\lambda = e'_\lambda + \beta'_\lambda e'_2$ так, что $(e'_2, e''_\lambda) = 0$ и т. д. ■

и матрица $(g_{\lambda\mu}$ в (7.3) сводится к единичной матрице для новых ортогональных базисных векторов.

m-мерное *линейное подпространство* или *частичное пространство* $(v_1, \dots, v_m)$ векторного пространства $(e_1, \dots, e_n)$ состоит из всех линейных комбинаций m линейно-независимых векторов $v_1, \dots, v_m$. Даже когда v_λ не являются линейно-независимыми, их линейные комбинации образуют подпространство $(v_1, \dots, v_m)$, но тогда число его измерений меньше, чем m.

Для каждого m-мерного подпространства $\mathfrak{r} = (v_1, \dots, v_m)$ унитарного векторного пространства $\mathfrak{R}_n$ существует *полностью перпендикулярное* к нему подпространство $\mathfrak{r}'$, состоящее из всех векторов w, ортогональных к $v_1 - v_m$. Если дополнить $v_1 - v_m$ ортогональными к ним базисными векторами $v_{m+1} - v_n$ до базиса всего пространства, то легко видеть, что перпендикулярное подпространство $\mathfrak{r}'$ слагается из всех линейных комбинаций $v_{m+1} - v_n$. Следовательно, $\mathfrak{r}'$ $(n-m)$-мерно; $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}'$ образуют все пространство $\mathfrak{R}_n$, т. е. каждый вектор в $\mathfrak{R}_n$ является суммой одного вектора из $\mathfrak{r}$ и одного вектора из $\mathfrak{r}'$.

Линейное преобразование A называется *унитарным,* если оно оставляет неизменными все скалярные произведения, т. е. если

$$\sum g_{\lambda\mu}\bar{c}'_\lambda d'_\mu = \sum g_{\lambda\mu}\bar{c}_\lambda d_\mu \quad \text{при } c'_\lambda = \sum a_{\lambda\mu}c_\mu,\ d'_\lambda = \sum a_{\lambda\mu}d_\mu.$$

Это имеет место при условии

$$\widetilde{A}GA = G,$$

где $\widetilde{A}$ — транспонированная комплексно сопряженная с A матрица, а $G = (g_{\lambda\mu})$. В частности, когда G единичная матрица, предыдущее условие сводится к

$$\widetilde{A}A = E \quad \text{или} \quad \sum \bar{a}_{\lambda\mu}a_{\lambda\nu} = \delta_{\mu\lambda}. \tag{7.4}$$

Поэтому $\widetilde{A}$ является матрицей, обратной A

$$A^{-1} = \widetilde{A}. \tag{7.5}$$

Линейное преобразование A называется *эрмитовски симметричным* или *самосопряженным* (см. §1), если всегда $(Av, w) = (v, Aw)$.

При отнесении матрицы A к нормированной ортогональной системе базисных векторов самосопряженность выражается соотношением

$$a_{\lambda\mu} = \bar{a}_{\mu\lambda}. \tag{7.6}$$

Теорема. *Если самосопряженное или унитарное*[1] *преобразование A переводит линейное подпространство в само себя, то оно, кроме того, преобразует и перпендикулярное ему подпространство в само себя.*

Доказательство.

Для унитарных преобразований эта теорема очевидна. Для самосопряженных преобразований она вытекает из следующих соображений. Если $v_1, \ldots, v_m$ базисные векторы первого подпространства и если w любой перпендикулярный к ним вектор, то мы имеем

$$(Aw,\, v_\lambda) = (w,\, Av_\lambda) = 0,$$

поэтому Aw ортогонально ко всем v_λ. ■

Из этой теоремы вытекает, что *как каждое самосопряженное, так и каждое унитарное преобразование обладает замкнутой (т. е. состоящей из n векторов) ортогональной системой собственных векторов v*

$$Av = \lambda v.$$

Действительно, с помощью векового уравнения (см. §5)

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \tag{7.7}$$

находим некоторый собственный вектор v_1, компоненты которого $c_1, \ldots, c_n$ дают решение системы уравнений

$$\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)c_1 + a_{12}c_2 + \cdots &= 0 \\ a_{21}c_1 + (a_{22}-\lambda)c_2 + \cdots &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} + a_{n2}c_2 + \cdots &= 0. \end{aligned}$$

Перпендикулярное к нему пространство $\mathfrak{R}_{n-1}$, согласно вышеприведенной теореме, преобразуется матрицей A в само себя. Следовательно, мы можем определить тем же способом в $\mathfrak{R}_{n-1}$ единичный вектор v_2 и т. д.

Если воспользоваться найденными $v_1, \ldots, v_n$ как базисными векторами для $\mathfrak{R}_n$, то преобразование A будет представляться диагональной матрицей.

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix}.$$

[1] Следует подчеркнуть, что понятия унитарного и самосопряженного преобразования существенно различны, совпадая лишь в случае $A = E$. (Прим. ред.).

В этом случае говорят, что преобразование A отнесено к главным осям. Отсюда вытекает далее, что каждое собственное значение λ преобразования A встречается среди λ_ν, и все принадлежащие ему собственные векторы могут быть представлены линейными комбинациями векторов v_ν, для которых $\lambda_\nu = \lambda$.

Теорема. *Каждая система коммутирующих друг с другом унитарных или самосопряженных матриц может быть одновременно преобразована к главным осям.*

Доказательство.

Если все матрицы системы являются кратными единичной матрице[1], то доказательство тривиально. Пусть A — матрица системы, не кратная единичной матрице. Обозначим замкнутую ортогональную систему собственных векторов матрицы A через

$$v_1, v_2, \ldots, v_k; \quad w_1, \ldots, w_h; \ldots;$$

а соответствующие им собственные значения через

$$\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1; \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_2; \ldots \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ и т. д.}).$$

Тогда собственному значению λ_1 соответствует линейное подпространство $\mathfrak{R}_k = (v_1, \ldots, v_k)$, состоящее из всех собственных векторов, принадлежащих к этому значению. Точно так же λ_2 соответствует пространство $\mathfrak{R}_h$ и т. д. Пусть теперь матрица B коммутирует с A. Тогда B должна преобразовывать пространства $\mathfrak{R}_k$, $\mathfrak{R}_h$ в самих себя (а именно, если v вектор в $\mathfrak{R}_k$,, тогда $Av = \lambda_1 v$). Отсюда следует $ABv = BAv = B\lambda_1 v = \lambda_1 Bv$, а это обозначает, что Bv опять принадлежит к $\mathfrak{R}_k$.

Предположим теперь, что наша теорема доказана для пространства с меньшим числом измерений (для измерения 1 она тривиальна). Тогда в пространствах $\mathfrak{R}_k$, $\mathfrak{R}_h$, ..., $\mathfrak{R}_m$ все преобразования $A, B, \ldots$ одновременно относятся к главным осям. Этим и доказывается теорема.

■

Левую часть векового уравнения (7.7) можно рассматривать как детерминант $|A - \lambda E|$ матрицы $A - \lambda E$. Среди его коэффициентов особенно важен коэффициент при $(-\lambda)^{n-1}$, так называемый «шпур» или след A

$$S(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn},$$

[1] Т. е. имеют вид λE, где E — единичная матрица, а λ — обыкновенное число. (Прим. ред.).

а также независящий от λ член детерминант $|A|$. Так как левая часть $|A - \lambda E|$ векового уравнения остается инвариантной при преобразовании матрицы A к другому базису

$$|P^{-1}AP - \lambda E| = |P^{-1}(A - \lambda E)P| = |P|^{-1}|A - \lambda E| \cdot |P| = |A - \lambda E|,$$

то и все ее коэффициенты тоже инварианты. В частности

$$S(P^{-1}AP) = S(A).$$

§ 8. Группы

Совокупность $\mathfrak{g}$ *элементов* a, b, c, $\ldots$ какого-либо типа (например, чисел, преобразований) называется группой, если она удовлетворяет следующим четырем условиям.

1) Каждой паре элементов a, b соответствует «произведение» $a \cdot b$ (или ab), которое тоже относится к $\mathfrak{g}$.

2) Ассоциативный закон: $ab \cdot c = a \cdot bc$.

3) Существует «единичный элемент» e или 1 со свойствами $ae = ea = a$.

4) Для каждого элемента a из $\mathfrak{g}$ существует в $\mathfrak{g}$ обратный элемент a^{-1} так, что $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.

Если $ab = ba$, группа называется *абелевой.*

Если элементами группы являются преобразования (например, линейные) или перестановки (перестановки предметов), а произведение ab — преобразование или перестановка, возникающая, когда применяют *сначала* b, а *потом* a (как в §7), то ассоциативный закон 2 выполняется автоматически. Единица e обозначает «тождественное преобразование», оставляющее все объекты неизменными, и a^{-1} обратное преобразование, уничтожающее преобразование a. *Следовательно, множество (неособенное) преобразований является группой, если оно для каждой пары, преобразований содержит также их произведение и для каждого преобразования содержат также обратное ему.* То же самое имеет место для групп перестановок.

Например, вещественные вращения трехмерного пространства вокруг неподвижной точки образуют неабелеву группу, группу вращения $\mathfrak{d}_3$. Более общую группу получим, применив еще и отражение. Вращения вокруг неподвижной оси образуют абелеву группу. Преобразования Лоренца, т. е. вещественные несингулярные преобразования четырехмерного пространства, оставляющие инвариантной квадратичную форму $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ и не меняющие направление течения времени, образуют группу Лоренца. Линейные преобразования в n-мерном векторном пространстве с детерминантом, равным единице, образуют *особую линейную группу* $\mathfrak{c}_n$. Унитарные преобразования с детерминантом, равным единице, образуют *особую унитарную* группу $\mathfrak{u}_n$. Перестановки n предметов образуют *симметричную группу* $\mathfrak{S}_n$.

Перестановки симметричной группы могут быть определены следующим образом. Пусть, например, P перестановка цифр 1, 2, 3, 4, 5, переводящая 1 в 5, 5 в 4, 4 в 1 и далее 2 в 3 и 3 в 2. Тогда пишут $P = (1\,5\,4)$ $(2\,3)$. Способ записи показывает, что P является произведением двух «циклических перестановок» $(1\;5\;4)$ и $(2\;3)$. Точно так же $(1\;2\;3\;4)$ обозначает циклическую перестановку, которая переводит 1 в 2, 2 в 3, 3 в 4 и 4 в 1.

Вышеуказанный «циклический способ записи» особенно удобен, когда речь идет о том, чтобы определить перестановку QPQ^{-1}, «*сопряженную*» с перестановкой P. Для этой цели запишем P как произведение циклических перестановок и применим перестановку Q к символам, входящим в эти циклы. Пусть, например,

$$P = (1\,2\,3\,4\,5), \quad Q = (2\,3),$$

тогда

$$QPQ^{-1} = (1\,3\,2\,4\,5).$$

В любой группе $\mathfrak{g}$ элементы tst^{-1}, сопряженные с элементом s, образуют *класс сопряженных друг с другом элементов группы*.

Каждая перестановка может быть записана как произведение транспозиций типа $(i\,k)$, переставляющих только эти две цифры. Например,

$$(1\,2\,3\,4\,5) = (1\,2)\,(2\,3)\,(3\,4)\,(4\,5).$$

Четные перестановки, т. е. произведения четного числа транспозиций сами по себе образуют группу, так называемую *знакопеременную группу* $\mathfrak{A}_n$.

Во многих абелевых группах элементы, составленные из a и b, обозначаются не через $a\cdot b$, как ранее, а через $a+b$. В этом случае пишут 0 вместо 1 (так как $a+0=a$) и $-a$ вместо a^{-1} (так как $-a+a=0$). К этим аддитивным группам относятся, например, все векторные пространства, которые удовлетворяют соотношениям 2–4 [при аддитивном способе записи, например, $(a+b)+c = a+(b+c)$].

Векторное пространство имеет еще одну особенность: его элементы (векторы) можно не только сочетать сложением друг с другом, но и сочетать путем умножения на (комплексные) числа; умноженный на θ вектор тоже дает вектор и мы имеем

$$\theta(u + v) = \theta u + \theta v. \tag{8.1}$$

Вообще, когда к элементам аддитивной группы применяются определенные «операторы» или «множители» θ со свойствами (8.1), то говорят *о группе с операторами.* Например, каждую систему линейных преобразований векторного пространства вместе со всеми числами θ можно рассматривать как операторную область для этого векторного пространства.

Часть элементов группы, образующая группу с тем же законом сочетания $a \cdot b$, называется *подгруппой.* Чтобы это имело место, она должна содержать вместе с a и b также и $a \cdot b$, вместе с a также и a^{-1}. Например, знакопеременная группа $\mathfrak{A}_n$ является подгруппой симметричной группы $\mathfrak{S}_n$.

В случае аддитивной группы подгруппа должна соответственно содержать элементы $a + b$ и $-a$. Для группы с оператором требуется, помимо того, чтобы подгруппа вместе с a содержала и θa (*допустимая подгруппа*). Например, подпространство векторного пространства является допустимой подгруппой; совокупность векторов, представляющих собой целые кратные одного вектора, образует недопустимую подгруппу.

Наиболее общим примером подгруппы неабелевой группы G является *центр* $\mathfrak{G}$, состоящий из таких элементов z, которые коммутируют со всеми элементами $\mathfrak{G}$.

Из подгруппы $\mathfrak{g}$ группы $\mathfrak{G}$ путем умножения всех элементов $\mathfrak{g}$ слева на любой фиксированный элемент a группы $\mathfrak{G}$ получается «сопряженная система» или «смежный класс». Два элемента a, b относятся к одной и той же сопряженной системе, если $b^{-1}a$ принадлежит к $\mathfrak{g}$. Две различные сопряженные системы не имеют между собой общих элементов, и все эти системы, вместе взятые, образуют группу $\mathfrak{G}$. Например, сопряженными системами $\mathfrak{A}_n$ в $\mathfrak{S}_n$ являются четные и нечетные перестановки.

Если умножить элементы сопряженной системы $(a\mathfrak{g})$ на элементы другой сопряженной системы $(b\mathfrak{g})$, то не всегда получается сопряженная система по отношению к $\mathfrak{g}$. Это имеет место, однако, в том случае, когда подгруппа $\mathfrak{g}$ идентична со всеми «сопряженными» с ней подгруппами $a\mathfrak{g}a^{-1}$. Такая подгруппа называется *нормальным делителем.* Например, $\mathfrak{A}_n$ является нормальным делителем $\mathfrak{S}_n$. Точно так же центр любой группы всегда является ее нормальным делителем, тогда как $\mathfrak{S}_n$ не является нормальным делителем $\mathfrak{S}_{n+1}$. Если помножить сопряженные системы $a\mathfrak{g}$ и $b\mathfrak{g}$ нормального делителя $\mathfrak{g}$ указанным образом друг на друга и если трактовать полученную сопряженную систему $ab\mathfrak{g}$ как произведение обеих исходных, то эти системы, рассматриваемые как элементы, тоже образуют группу, так называемую, *дополнительную группу* $\mathfrak{G}/\mathfrak{g}$. В абелевой группе (например, в векторном пространстве) все подгруппы являются нормальными делителями. Таким образом, в этом случае можно всегда построить дополнительную группу. Для построения дополнительной группы векторного пространства $\mathfrak{R} = (e_1, \dots, e_n)$ для подпространства $\mathfrak{r} = (v_1, \dots, v_n)$ объединяют в одну сопряженную систему все векторы, получающиеся из какого-либо вектора, путем прибавления всех векторов рассматриваемого подпространства и трактуют эти системы как элементы новой аддитивной группы. При умножении на число θ подпространство переходит в самое себя (т. е. оно является допустимой подгруппой) и поэтому каждая сопряженная система переходит в сопряженную систему. Поэтому можно применять умножение на число θ и для сопряженных систем, так что группа, элементы которой являются сопряженными системами, снова является также группой с операторами. Если дополнить базис подпространства $(v_1, \dots, v_m)$ до базиса всего пространства прибавлением дальнейших линейно-независимых векторов $v_{m+1}, \dots, v_n$, то получается сопряженная система из всех векторов $c_1v_1 + \dots + c_{m+1}v_{m+1} + \dots + c_nv_n$ с фиксированными коэффициентами $c_{m+1}, \dots, c_n$. Следовательно, разные сопряженные системы могут быть однозначно представлены векторами $c_{m+1}v_{m+1} + \dots + c_nv_n$. Отсюда следует, что *дополнительная группа* $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ *является* $(n-m)$*-мерным векторным пространством.*

Вообще, в каждой аддитивной группе с оператором θ все сопряженные системы подгруппы $\mathfrak{g}$ можно умножить на оператор θ (предполагая, что подгруппа является допустимой), т. е. дополнительная группа $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ является группой с той же областью операторов.

Если каждому элементу a группы $\mathfrak{g}$ соответствует элемент $\overline{a}$ группы $\overline{\mathfrak{g}}$ так, что произведению ab соответствует произведение $\overline{a}\overline{b}$ (и поэтому единичному элементу — единичный элемент, а обратному — обратный) и если при этом каждый элемент $\mathfrak{g}$ по крайней мере раз встречается, как соответствующий элементу $\overline{a}$, то говорят, что группа $\mathfrak{g}$ является *гомоморфным изображением* $\overline{\mathfrak{g}}$. (Например, пусть $\mathfrak{g}$ — симметричная группа $\mathfrak{S}_n$. Приведем в соответствие каждой четной перестановке число $+1$ и каждой нечетной — число -1. Тогда $\overline{\mathfrak{g}}$ будет группа, элементами которой являются числа $+1$ и -1.)

Если различным элементам a, b соответствуют различные отображения $\overline{a}$, $\overline{b}$ (что в предыдущем примере имеет место только при $n = 2$), то отображение называется *изоморфным,* а группы — *изоморфными;* они различаются только обозначениями элементов, структура же их совершенно одинакова. Тогда пишут

$$\mathfrak{g} \cong \overline{\mathfrak{g}}.$$

В случае аддитивных групп с операторами для гомо- и изоморфизма требуется, помимо соответствия суммы $a + b$ сумме $\overline{a} + \overline{b}$, еще соответствие между θa и $\theta \overline{a}$ (поэтому обе группы должны обладать общей областью операторов). В этом случае говорят об *операторном гомо- или изоморфизме.* Например, два векторных пространства операторно-изоморфны, когда они обладают одинаковым числом измерений, так как тогда каждому базисному вектору одного пространства соответствует базисный вектор другого и каждой линейной комбинации первых — такая же линейная комбинация вторых. Каждое линейное преобразование векторного пространства является операторным гомоморфизмом, поскольку операторами служат обыкновенные числа.

Если группа $\mathfrak{g}$ гомоморфно, но не изоморфно отображается группой $\overline{\mathfrak{g}}$, то элементы $\mathfrak{g}$, соответствующие единичному элементу $\overline{\mathfrak{g}}$, образуют, как легко видеть, нормальный делитель $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ и элементы $\mathfrak{g}$, отвечающие произвольному фиксированному элементу в $\overline{\mathfrak{g}}$, всегда образуют сопряженную систему этого нормального делителя. Таким образом, каждой сопряженной системе $\mathfrak{h}$ соответствует однозначно элемент в $\overline{\mathfrak{g}}$, причем это соотношение является изоморфизмом. Таким образом, мы получаем следующий *закон гомоморфизма.*

Если $\mathfrak{g}$ гомоморфно отображается в $\overline{\mathfrak{g}}$, то $\overline{\mathfrak{g}}$ изоморфно с дополнительной группой $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ состоит из элементов $\mathfrak{g}$, соответствующих единичным элементам в $\overline{\mathfrak{g}}$. Обратно, $\mathfrak{g}$ также гомоморфно отображается в каждой дополнительной группе $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, если каждому элементу соответствует та сопряженная система, к которой он принадлежит. (В вышеприведенном примере, где группа $\overline{\mathfrak{g}}$ состояла из чисел $+1$, -1, $\mathfrak{h}$ является знакопеременной группой.)

Закон гомоморфизма остается в силе и для групп с операторами; при этом вместо гомо- и изоморфизма нужно соответственно говорить об операторном гомо- или изоморфизме.

Особенно важным является тот частный случай понятия о гомоморфизме, когда отображающая группа $\overline{\mathfrak{g}}$ состоит из линейных преобразований векторного пространства $\mathfrak{R}$. При этом каждому элементу группы $\mathfrak{g}$ соответствует несингулярное линейное преобразование A пространства $\mathfrak{R}$ такого рода, что произведению $a \cdot b$ всегда соответствует произведение AB. В этом случае говорят о *представлении группы $\mathfrak{g}$ линейными преобразованиями* (или матрицами). Число измерений n пространства представлений называется *степенью* представления. Если сопоставление является взаимнооднозначным, т. е. изоморфным, то представление называют *точным.* Если представление не точно, то оно, по закону гомоморфизма, является точным представлением дополнительной группы $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Для более подробного изучения основ теории групп можно воспользоваться книгами A. Speiser, Theorie der Grupen von endlicher Ordnung или B. L. van der Waerden, Modern Algebra I.[1]

Применение представлений групп в квантовой механике основывается на следующем.

Уравнение Шредингера для системы частиц при определенных преобразованиях переменных, входящих в волновую функцию, переходит в самого себя, например:

а) при перестановках координат различных электронов (или иногда ядер), играющих одинаковую роль в уравнении;

б) при трансляциях, вращениях и отражениях пространства, не меняющих имеющегося силового поля. Если ядро в атоме рассматривается как неподвижный центр сил, то речь идет о вращений вокруг этой точки и об отражении (симметрии) относительно нее. Для атома в однородном магнитном или электрическом поле группа вращений заменяется подгруппой вращений вокруг неподвижной оси. Если в двухатомной молекуле (в первом приближении) оба ядра считаются неподвижными центрами сил, то рассматривается вращение вокруг линии, соединяющей ядра, и отражение от проходящих через нее плоскостей. Для двух ядер с одинаковыми зарядами к этому еще добавляется отражение от средней плоскости, перпендикулярной к линии, соединяющей ядра, и т. д.

Рассмотренные преобразования шредингеровской задачи собственных значений в каждом случае образуют группу, а именно в случае а) симметричную перестановочную группу $\mathfrak{S}_f$, когда в системе имеется f электронов, и в случае б) группу вращений и отражений. Преобразования, соответствующие этим группам, дают вместе с тем преобразования волновых функций ψ, если предположить, что пространственное преобразование T (вращение или отражение), переводящее систему точек $q_1, q_2, \ldots, q_f$ в $q'_1, \ldots, q'_f$, преобразует волновую функцию ψ в ψ', где

$$\psi'(q'_1, \ldots, q'_f) = \psi(q_1, \ldots, q_f)$$

или, что то же самое,

$$\psi'(q_1, \ldots, q_f) = \psi(T^{-1}q_1, \ldots, T^{-1}q_f).$$

[1] Русский перевод, Б. Л. Ван-дер-Варден. Современная алгебра. Т. I. ОНТИ, 1935.

Таким образом, функция ψ должна преобразовываться линейно, а это значит, что если S и T два преобразования, то

$$(ST)\psi = S(T\psi).$$

Так как при этих преобразованиях дифференциальное уравнение Шредингера не меняется, то его собственные функции должны переходить в собственные функции, соответствующие тому же собственному значению. *Следовательно, собственные функции каждого уровня энергии преобразуются линейно и эти преобразования образуют представления рассматриваемой группы.*

Если удается установить и классифицировать различные возможные представления рассматриваемых групп, то этим одновременно дается классификация собственных значений и собственных функций атома и молекулы. На этом основывается групповая систематика термов.

§ 9. Эквивалентность и приводимость представлений

Часто бывает целесообразно связать с векторным пространством $\mathfrak{R}$ представление об аддитивной группе с операторами. При этом операторами являются элементы группы a; произведение av, a на вектор v, обозначает, что к вектору v применено линейное преобразование A, соответствующее a. Этот способ записи напрашивается сам собой при квантово-механических задачах. Результат применения вращения D или перестановки P к собственной функции ψ естественно обозначать через $D\psi$ или $P\psi$. При этом способе записи мы избегаем введения соответствующей матрицы A, что очень удобно, так как при одновременном рассмотрении различных пространств представлений, подпространств и т. д. пришлось бы вводить новые буквы A, A' и т. д. для их преобразований. Наконец, мы имеем то преимущество, что все понятия и законы теории групп можно непосредственно применять к пространству представлений, так как оно рассматривается как аддитивная группа с операторами. Так, например, представление операторного изоморфизма, примененное к двум пространствам представлений $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$ одной и той же группы $\mathfrak{g}$, сразу дает нам понятие об эквивалентности двух представлений.

Два представления $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ называются эквивалентными, когда в $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}'$ базисные векторы можно выбрать таким образом, что каждый элемент группы в обоих пространствах представляется одной и той же матрицей. Это обозначает, что представление посредством матрицы A эквивалентно представлению $P^{-1}AP$, где P какая-нибудь постоянная матрица.

Понятие допустимой подгруппы (т. е. инвариантной относительно оператора θ) приводит к понятию *инвариантного подпространства,* т. е. такого линейного подпространства, которое при преобразованиях рассматриваемого представления переходит в само себя. Если существует такое инвариантное подпространство $\mathfrak{r}$, не состоящее из нулевых векторов и не являющееся всем пространством $\mathfrak{R}$, то представление и соответствующее ему векторное пространство называется *приводимым* (по отношению к группе $\mathfrak{g}$)[1].

Какой вид имеют матрицы приводимого представления? Мы выберем систему базисных векторов инвариантного подпространства $u_1, \ldots, u_h$ и дополним ее до базиса $(u_1, \ldots, u_n)$ полного пространства $\mathfrak{R}$. Мы имеем при этом

$$\left.\begin{aligned} au_\mu &= \sum_1^h u_\lambda p_{\lambda\mu} && (\mu = 1, \ldots, h), \\ au_\nu &= \sum_1^h u_\lambda q_{\lambda\nu} + \sum_{h+1}^n u_\lambda s_{\lambda\nu} && (\nu = h+1, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

Поэтому матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

где P, Q и S также являются матрицами и 0 обозначает нулевую матрицу. Матрица P относится к представлению $\mathfrak{g}$ в подпространстве $\mathfrak{r}$.

Что означают матрицы S?

Дополнительное пространство $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ также допускает операторы a из $\mathfrak{g}$. Если перейти в уравнении (9.1) от векторов u к соответствующим им сопряженным системам $\overline{u}$ (см. вторую часть закона гомоморфизма), то $\overline{u}_1, \ldots, \overline{u}_h$ обращаются в нуль, так как все $u_1, \ldots, u_h$ принадлежат к подпространству $\mathfrak{r}$, т. е. к нулевой сопряженной системе, тогда как $\overline{u}_{h+1}, \ldots, \overline{u}_n$ образуют линейно-независимый базис дополнительного пространства $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$. Таким образом, имеем

$$a\overline{u}_\nu = \sum_{h+1}^n \overline{u}_\lambda s_{\lambda\nu} \qquad (\nu = h+1, \ldots, n).$$

---

[1]Для понятия приводимости не обязательно, чтобы операторы (a или θ) образовали группу; может быть задана произвольная система операторов, линейные преобразования которой переводят пространство $\mathfrak{R}$ в само себя.

Следовательно, матрицы S образуют представление, которое связано с дополнительным пространством $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$.

В выборе дополнительных базисных векторов $u_{h+1}, \ldots, u_n$ имеется, понятно, некоторый произвол.

Если специальным выбором этих базисных векторов можно достичь того, чтобы все матричные элементы q равнялись нулю, то $(u_{h+1}, \ldots, u_n)$ также определяют инвариантное подпространство $\mathfrak{s}$. Тогда говорят, что пространство $\mathfrak{R}$ *распадается* на инвариантные подпространства $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}. \tag{9.2}$$

Точно так же о связанном с $\mathfrak{R}$ представлении $\mathfrak{D}$ говорят, что оно распадается на связанные с $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{s}$ представления $\mathfrak{D}_1$ и $\mathfrak{D}_2$ и пишут

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2.$$

В этом случае матрица S относится к представлению пространства $\mathfrak{s}$. Отсюда сразу получаем *закон изоморфизма.* Из (9.2) *следует, что* $\mathfrak{s} \cong \mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ (и также, что $\mathfrak{r} \cong \mathfrak{R}/\mathfrak{s}$)[1].

В дальнейшем мы будем главным образом иметь дело с представлениями групп при помощи унитарных преобразований. При этом для каждого инвариантного подпространства существует полностью перпендикулярное к нему подпространство $\mathfrak{s}$; *таким образом, в этом случае из приводимости вытекает распад.*

Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — подгруппы аддитивной абелевой группы, то символом $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ обозначают объединенную группу, которая состоит из всех сумм $a+b$ (a из $\mathfrak{a}$, b из $\mathfrak{b}$). Если каждый элемент $\mathfrak{s} = (\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ может быть однозначно представлен суммой $a + b$, то $\mathfrak{s}$ называют *прямой суммой* $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ и пишут $\mathfrak{s} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, как в уравнении (9.2). Критерием прямоты суммы является то, что общим элементом подгруппы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ является лишь нуль[2].

Соответственным образом определяется прямая сумма более чем двух подгрупп. Их обозначение

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_h$$

---

[1]Этот закон является частным случаем общего закона изоморфизма в теории групп

$$\mathfrak{B}/\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}\mathfrak{D},$$

в котором $\mathfrak{B}$ — объединенная группа, $\mathfrak{D}$ — общий наибольший делитель подгрупп $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. Этот закон имеет место, поскольку $\mathfrak{A}$ является нормальным делителем $\mathfrak{B}$. См.: Б. Л. Ван-дер-Варден. Современная алгебра. Т. I, §40.

[2]В случае неабелевых групп надо еще добавить требование, чтобы $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ были нормальными делителями $\mathfrak{S}$.

показывает, что каждый элемент $\mathfrak{s}$ может быть однозначно представлен суммой $a_1 + \cdots + a_h$. Критерием для этого служит то, что каждое $\mathfrak{a}_\nu$ имеет только нулевой общий элемент с суммой предыдущих $\mathfrak{a}_\lambda$.

Аддитивная группа $\mathfrak{G}$ с операторами (в частности, векторное пространство при каком-либо представлении) называется *неприводимой* или *минимальной,* если она не содержит никаких инвариантных подгрупп (кроме самой себя и нуля). Она называется *полностью приводимой*, если является прямой суммой неприводимых (дозволенных) подгрупп

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_h.$$

Точно так же представление называется полностью приводимым, если таковым является принадлежащее ему векторное пространство; тогда представление имеет «приводимую форму»

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 + \cdots + \mathfrak{D}_h.^{1}$$

В $\mathfrak{D}_\nu$ могут входить, конечно, эквивалентные пары.

Пример полностью приводимого представления.

Возьмем три базисных вектора e_1, e_2, e_3 и подвергнем их всем перестановкам симметричной группы $\mathfrak{S}_3$

$$\begin{array}{llll} (1\,2) & e_1 = e_2 & \qquad (1\,2\,3) & e_1 = e_2 \\ (1\,2) & e_2 = e_1 & \qquad (1\,2\,3) & e_2 = e_3 \\ (1\,2) & e_3 = e_3 & \qquad (1\,2\,3) & e_3 = e_1 \end{array}$$

Тогда мы получим представление перестановочной группы с помощью линейных (унитарных) преобразований. Представление приводимо, так как вектор $s = e_1 + e_2 + e_3$ инвариантен при всех перестановках; последнее относится также к подпространству или «лучу» $\mathfrak{r}_1$, состоящему из всего многообразия $s\alpha$. Перпендикулярное к этому лучу подпространство, которое образовано разностями $e_1 - e_2$, $e_2 - e_3$, тоже инвариантно и, как легко видеть, не содержит более никаких инвариантных подпространств. Поэтому трехмерное векторное пространство $\mathfrak{G}$ полностью приводимо

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2,$$

[1] Матрица представления имеет при этом следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_h \end{pmatrix},$$

где матрица A_γ относится к неприводимому представлению $\mathfrak{D}_\nu$.

и представление распадается на два неприводимых представления 1-ой и 2-ой степени. Матрицы этих представлений могут быть легко определены. Представление 1-ой степени является «тождественным представлением», при котором каждой перестановке соответствует единичная матрица. Представление 2-ой степени обладает матрицами

$$(1\,2) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (1\,3) \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2\,3) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$
$$(1\,2\,3) \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad (1\,3\,2) \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad 1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Унитарные представления (представления с помощью унитарных преобразований) и вообще системы унитарных преобразований всегда полностью приводимы (или неприводимы), потому что, если векторное пространство $\mathfrak{R}$ приводимо и $\mathfrak{r}$ инвариантное подпространство, то $\mathfrak{R}$ распадается на $\mathfrak{r}$ и на строго перпендикулярное к нему инвариантное подпространство $\mathfrak{r}'$. Если одно из этих двух пространств опять приводимо, то оно распадается таким же образом и т. д.

Встречающиеся в квантовой механике представления унитарны, потому что при любых вращениях или перестановках распространенный по всему фазовому пространству интеграл

$$N\psi = \int \overline{\psi}\psi\, dV$$

остается инвариантным.

Смысл приводимости представлений для квантовой механики заключается в следующем. Когда уровни энергии системы, например многоэлектронной системы, приближенно известны при пренебрежении некоторыми членами в выражении для энергии, которые далее вводятся как возмущающие члены εW (при постепенном возрастании ε от нуля), то во многих случаях бывает известно, что возмущающие члены инвариантны относительно той же группы $\mathfrak{g}$, как и невозмущенный оператор H_0.

Как невозмущенные, так и возмущенные функции при операциях группы $\mathfrak{g}$ претерпевают ряд линейных преобразований, которые приводимы или неприводимы. В пределе $\varepsilon \to 0$ преобразования возмущенных функций должны переходить в преобразования невозмущенных функций. Ясно, однако, что приводимая группа преобразований не может переходить в неприводимую при $\varepsilon \to 0$, матрицы $\left(\begin{smallmatrix} P & Q \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ или $\left(\begin{smallmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{smallmatrix}\right)$ дают при $\varepsilon = 0$ матрицы того же типа. Точно так же при граничном переходе не меняются степени представления; в лучшем случае различные уровни энергии могут стремиться к совпадению, вследствие чего два или более пространства с числом измерений n_1, n_2 сливаются в пространство с числом измерений $n_1 + n_2$, в котором при этом имеет место приводимое представление.

Отсюда следует: если в пределе при $\varepsilon = 0$ имеется неприводимое представление n-ой степени, то и для малого ε имеет место неприводимое представление той же степени.

И, так как параметр ε может быть постепенно увеличен до сколь угодно большого значения, сказанное остается в силе и при большой величине энергии возмущения. *Если в отсутствии возмущения имеется неприводимое представление группы $\mathfrak{g}$ степени n и если возмущение инвариантно относительно этой группы, то возмущение, как бы велико оно ни было, не может вызвать расщепления термов и при любой его величине имеет место неприводимое представление порядка n.*

Аналогично получается следующий вывод: *если при $\varepsilon = 0$ имеется целиком приводимое представление степени n, которое распадается на неприводимые представления $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \cdots + \Sigma_r$, то n-кратный терм при возмущении может расщепиться максимум на r термов, собственные функции которых в пределе при $\varepsilon \to 0$ преобразуются по неприводимым представлениям $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_r$.*

Мы установим позже для всех рассматриваемых групп все вообще возможные неприводимые представления. Их можно во всех встречающихся случаях отличать друг от друга номерами (квантовыми числами). При непрерывном изменении величины ε такие номера не могут внезапно (скачкообразно) меняться; поэтому при возрастании ε представление должно оставаться неизменным с точностью до эквивалентности. В вышеприведенном случае оно остается всегда одним из представлений $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$ (или суммой некоторых из них).

§ 10. Представления абелевых групп. Примеры

При унитарном представлении абелевой группы все матрицы представления коммутируют между собой и поэтому могут (согласно концу § 7) одновременно преобразовываться к главным осям. Если $v_1, \ldots, v_n$ — главные оси или собственные векторы, то одномерные подпространства $(v_1), \ldots, (v_n)$ инвариантны относительно всех преобразований группы. Следовательно, представления распадаются исключительно на представления первой степени, которые, само собою разумеется, неприводимы.

Пример 1. Представляемая группа называется *циклической группой порядка n*, если она состоит из степеней $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}$ элемента a, причем $a^n = 1$. В представлении первого порядка элемент a представлен матрицей (α). Тогда a^2 должно быть представлено (α^2) и т. д. и, наконец, $a^n = 1$ представлено (α^n). Следовательно, $\alpha^n = 1$, откуда α есть n-ый корень из единицы. Существует n различных n-ых корней из единицы

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i m}{n}} \qquad (m = 0, 1, \ldots, n-1),$$

поэтому циклическая группа степени n имеет ровно n различных представлений первой степени. Любое представление распадается на представление первой степени, причем, естественно, данное представление первой степени может встречаться несколько раз.

Например, группа перестановок двух предметов (электронов) является циклической группой второй степени. Если a обозначает перестановку обоих предметов, то представление имеет вид

$$a \to (+1), \quad a \to (-1).$$

Оператор a не меняет векторов v_+, относящихся к представлению $(+1)$, вектора же v_-, относящиеся к (-1), меняют знак

$$av_+ = v_+, \quad av_- = -v_-.$$

Вектор v_+ называется «симметричным», v_- — «антисимметричным». Так, например, спектр атома гелия распадается на две совершенно раздельных системы термов, из которых одна относится к симметричным собственным функциям (синглетная система), а вторая к антисимметричным (триплетная система).

То же самое имеет место для группы, состоящей из отражения (инверсии) в начале координат (в трехмерном пространстве)

$$x' = -x; \quad y' = -y; \quad z' = -z$$

и тождественного преобразования. Здесь также имеется два типа базисных векторов v_+, v_-. Вектор v_+ принадлежит к «характеру отражения $+1$», вектор v_- к «характеру отражения -1». Это различие обусловливает распад системы термов любого атома на две подсистемы, отличающиеся значением характера отражений $w = \pm 1$.

Пример 2. (Группа вращений вокруг неизменной оси). Каждое вращение D_φ определяется углом вращения φ. Если вращение D_φ представлено матрицей первого порядка $\chi(\varphi)$, то, чтобы произведению вращений соответствовало произведение матриц, должно иметь место

$$\chi(\varphi_1 + \varphi_2) = \chi(\varphi_1) \cdot \chi(\varphi_2).$$

Непрерывными решениями этого функционального уравнения являются функции

$$\chi(\varphi) = e^{c\varphi}.$$

Так как $\chi(2\pi) = \chi(0)$ (по крайней мере для однозначных представлений), то

$$e^{2\pi c} = 1,$$

следовательно, $ic = m$ с цельночисленным m. Поэтому представление имеет вид

$$\chi(\varphi) = e^{-im\varphi}.$$

Отсюда следует, что существует бесконечное количество представлений первой степени, относящихся к значениям

$$m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$$

Из них образуется всякое однозначное непрерывное представление.

Этот способ рассмотрения применяется главным образом в молекулярных спектрах.

Рассмотрим в первом приближении двухатомную молекулу как систему из двух неподвижных ядер, вокруг которых вращаются электроны. При вращении вокруг линии, соединяющей ядра, собственные функции каждого уровня энергии переходят в самих себя. Мы получаем, таким образом, для каждого уровня энергии представление группы вращений вокруг этой оси, которое мы можем считать приведенным. Собственные функции, а следовательно, и соответственные термы можно различать по относящимся к ним различным представлениям первой степени с $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, к которым они принадлежат. Для абсолютного значения $|m|$ применяют символ Λ. Термы с $\Lambda = 0$ $(m = 0)$ обозначают как Σ-термы, с $\Lambda = 1$ $(m = \pm 1)$ как Π-термы, с $\Lambda = 2$, $(m = \pm 2)$ как Δ-термы и т. д. Почему термы с противоположными значениями m (например, с $m = +1$ и $m = -1$) не отличаются в обозначении друг от друга, мы увидим ниже.

Пример 3. (Группа вращений и отражений). Оператор энергии только что рассмотренной двухатомной молекулы с двумя неподвижными центрами допускает не только вращение вокруг неподвижной оси молекул α, но и отражения относительно плоскостей, проведенных через эту ось. Эти вращения и отражения образуют неабелеву группу $\mathfrak{G}$, *группу вращений и отражений*. Примем во внимание отражение от какой-нибудь определенной плоскости и обозначим его через s_y. Тогда из s_y и произвольных вращений можно получить все остальные отражения.

При этом имеют место соотношения:

$$\begin{aligned} D_\varphi \cdot D_\psi &= D_{\varphi+\psi} \\ D_\varphi s_y &= s_y D_{-\varphi}. \end{aligned}$$

В каждом пространстве представлений группы $\mathfrak{G}$ можно сначала выполнить приведение подгруппы вращений. Это дает уже известные нам векторы v_m (где m целое число), которые при вращении D_φ умножаются на $e^{-im\varphi}$.

Положим теперь $m = \Lambda > 0$. При отражении s_y v_Λ переходит в вектор $v_{-\Lambda}$, так как

$$D_\varphi(s_y v_\Lambda) = s_y D_\varphi v_\Lambda = s_y e^{-i\Lambda\varphi} v_\Lambda = e^{i\Lambda\varphi}(s_y v_\Lambda).$$

v_Λ и $v_{-\Lambda}$ образуют двухмерное подпространство $\mathfrak{r}_\Lambda = (v_\Lambda, v_{-\Lambda})$, инвариантное относительно группы $\mathfrak{G}$ и не содержащее меньших инвариантных подпространств. В самом деле, если бы в пространстве $\mathfrak{r}_\Lambda$ существовало одномерное инвариантное подпространство $\mathfrak{r}'$, то оно вместе с тем было бы неприводимым пространством представлений подгруппы вращений. Тогда его базисный вектор должен был бы при вращении на φ умножаться на $e^{im\varphi}$, где m может быть только $\pm\Lambda$, так как только эти два представления группы вращений входят, как слагающие, в пространство представлений $\mathfrak{r}_\Lambda$. Но при отражении этот базисный вектор переходит в другой, относящийся к характеру вращения $-\Lambda$, поэтому подпространство $\mathfrak{r}'$ должно быть по меньшей мере двухмерным и пространство представлений $(v_\Lambda, v_{-\Lambda})$ неприводимо. Отсюда следует, что в молекуле с двумя неподвижными ядрами к каждому собственному значению относятся только две собственные функции ψ_Λ, $\psi_{-\Lambda}$.

Представляющие матрицы для вращения D_φ и отражения s_y имеют вид

$$\begin{pmatrix} e^{-i\Lambda\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\Lambda\varphi} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это представление обозначается символом $\mathfrak{A}_\Lambda$.

В случае $\Lambda = 0$, когда векторы v_0 инвариантны при всех вращениях, $v_{-\Lambda}$ и v_Λ не отличаются друг от друга. Если пространство векторов v_0 рассматривается, как пространство преобразований циклической группы, состоящей из тождества и отражений, и если эти представления циклической группы приводимы, то существует два типа представлений первой степени, определяющихся «характером отражения» $+1$ и -1 и обозначающихся через $\mathfrak{A}_0^+$ и $\mathfrak{A}_0^-$. Базисные векторы неприводимого пространства представлений $\mathfrak{A}_0^\pm$ при каждом отражении умножаются на ± 1 и остаются инвариантными при всех вращениях. Следовательно, неприводимыми представлениями группы инверсии $\mathfrak{G}$ являются $\mathfrak{A}_0^+$, $\mathfrak{A}_0^-$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, ...

Как показывает предыдущий пример, для неабелевой группы $\mathfrak{g}$ могут тоже существовать неприводимые представления первого порядка, но они обязательно являются неточными, так как представляющие матрицы коммутируют друг с другом, тогда как элементы группы не коммутируют между собой. Так как элементам группы ab и ba не соответствует одна и та же матрица, то «коммутатору»

$$ab\,(ba)^{-1} = aba^{-1}b^{-1}$$

соответствует единичная матрица. Все эти коммутаторы и их произведения образуют подгруппу в $\mathfrak{g}$ — «коммутант», элементы которой представляются единичными матрицами. Таким образом, представление является точным представлением (абелевой) дополнительной группы $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, где нормальный делитель $\mathfrak{h}$ по крайней мере охватывает коммутант.

Пример 4. Симметрическая группа $\mathfrak{S}_n$ $(n > 2)$ не является абелевой. Коммутаторами ее (между прочим) являются перестановки

$$(ij)\,(ijk)\,(ij)^{-1}(ijk)^{-1} = (ijk),$$

которые все «трехцикличны». Как легко видеть, они и их произведения образуют «знакопеременную группу» $\mathfrak{A}_n$ (§ 8). Поэтому каждое представление первой степени группы $\mathfrak{S}_n$ является одновременно представлением группы $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n$. Так как эта дополнительная группа является циклической группой второго порядка, то она имеет только два представления первой степени: одно *тождественное* или *симметричное* представление, в котором всем перестановкам соответствует единичная матрица (1); другое — *антисимметричное* представление, в котором четным перестановкам соответствует матрица (1), а нечетным — матрица (−1). Все остальные представления группы $\mathfrak{S}_n$ выше, чем первой степени.

Пример 5. (Симметрическая группа $\mathfrak{S}_3$). Ее неприводимые представления можно определить совершенно таким же способом, как и представления группы вращений и отражений $\mathfrak{G}$, рассмотренные в примере 3, а именно, исходя из произвольного представления $\mathfrak{S}_3$ и осуществляя приведение содержащегося в нем представления знакопеременной группы $\mathfrak{A}_3$. Группа $\mathfrak{A}_3$ циклична и состоит из 3 перестановок 1, (1 2 3), (1 3 2).

Согласно первому примеру, существует только три представления первого порядка тройной циклической группы, при которых элементам 1 соответствует корень третьей степени из единицы

$$1 \quad \text{или} \quad \rho = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad \text{или} \quad \rho' = \rho^{-1} = e^{-\frac{2\pi i}{3}}.$$

Вектор v_ρ, соответствующий корню ρ при применении перестановки (1 2), дает вектор $v_{\rho'}$, соответствующий ρ^{-1}, так как

$$\begin{aligned}(1\,2\,3)\,v_{\rho'} &= (1\,2\,3)\,(1\,2)\,v_\rho = (1\,2)\,(1\,2\,3)^{-1}v_\rho = \\ &= (1\,2)\,\rho^{-1}v_\rho = \rho^{-1}v_{\rho'}.\end{aligned}$$

Векторы v_ρ, $v_{\rho'}$ образуют пространство неприводимого представления второй степени. В пространстве векторов v_1, остающихся инвариантными при перестановках 1, (1 2 3), (1 3 2), находим, применяя циклическую группу 1, (1 2), еще два представления первой степени, а именно тождественное и антисимметричное. Таким образом, существует совокупность двух представлений первого порядка и одного неприводимого представления второго порядка. Из приведенного доказательства следует, что каждое представление целиком распадается на неприводимые представления трех названных типов. Найденное в примере § 9 представление второй степени должно быть эквивалентно описанному здесь представлению второй степени $(v_\rho, v_{\rho'})$, что легко подтверждается вычислением.

§ 11. Теоремы однозначности

Теорема 1. *Если $\mathfrak{G} = \mathfrak{g}_1 + \cdots + \mathfrak{g}_h$ целиком, приводимая аддитивная группа, а $\mathfrak{H}$ любая (дозволенная) подгруппа, то*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + \mathfrak{g}_{\nu_1} + \cdots + \mathfrak{g}_{\nu_k}$$

при надлежащем выборе $\mathfrak{g}_{\nu_i}$ из группы $\mathfrak{g}$.

Доказательство.

Построим

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_1 &= (\mathfrak{H}, \mathfrak{g}_1),\\ \mathfrak{H}_2 &= (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{g}_2),\\ &\ \ \dots\\ \mathfrak{H}_h &= (\mathfrak{H}_{h-1}, \mathfrak{g}_h) = \mathfrak{G}.\end{aligned}$$

Пересечение $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{g}_1$ является инвариантной подгруппой $\mathfrak{g}_1$, следовательно, оно является либо $\mathfrak{g}_1$, либо нулем, так как по предположению $\mathfrak{g}_1$ неприводимо. Если пересечение равно $\mathfrak{g}_1$, то $\mathfrak{g}_1$ содержится в $\mathfrak{H}$, откуда $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}$. Если пересечение равно нулю, то $(\mathfrak{H}, \mathfrak{g}_1)$ прямая сумма, и поэтому $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H} + \mathfrak{g}_1$.

Таким же образом, как и с $\mathfrak{H}_1$, поступаем и со всеми остальными группами $\mathfrak{H}_\nu$ и достигаем того, что все скобки $(\mathfrak{H}_{\nu-1}, \mathfrak{g}_\nu)$ либо превращаются в прямые суммы, либо приводятся к члену $\mathfrak{H}_{\nu-1}$. Из совокупности всех этих уравнений получаем, что $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_h$ является прямой суммой $\mathfrak{H}$ и некоторых $\mathfrak{g}_\nu$, что и требовалось доказать. ∎

Теорема 2. *Если*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \cdots + \mathfrak{g}_h$$

одновременно

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g}_1' + \mathfrak{g}_2 + \cdots + \mathfrak{g}_h,$$

то

$$\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_1'.$$

Доказательство.

Из приведенного в § 9 закона изоморфизма следует, что $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_1'$ оба изоморфны с дополнительной группой

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{g}_2 + \cdots + \mathfrak{g}_h.$$

∎

Теорема 3. *Если*

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \cdots + \mathfrak{g}_r$$

и $\mathfrak{G} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 + \cdots + \mathfrak{h}_s$ *— два разложения целиком приводимой аддитивной группы на неприводимые, то* $r = s$ *и* $\mathfrak{g}_\nu$*, взятые в той или иной последовательности, изоморфны с* $\mathfrak{h}_\mu$.

Доказательство.

Применяя первую теорему с $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}_2 + \cdots + \mathfrak{h}_s$, получаем

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{h}_2 + \cdots + \mathfrak{h}_s) + (\sum \mathfrak{g}_\nu),$$

где $\sum \mathfrak{g}_\nu$ — сумма некоторых $\mathfrak{g}_\nu$. Из второй теоремы следует, что $\sum \mathfrak{g}_\nu \cong \mathfrak{h}_1$. Так как $\mathfrak{h}_1$ неприводимо, то сумма $\sum \mathfrak{g}_\nu$ тоже должна быть неприводимой и поэтому должна состоять из одного члена, а следовательно, (при надлежащей нумерации $\mathfrak{g}_\nu$) из члена $\mathfrak{g}_1$. Таким образом, мы имеем $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{h}_1$ и

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{h}_3 + \cdots + \mathfrak{h}_s + \mathfrak{g}_1.$$

Применяя опять первую теорему с $\mathfrak{H} = \mathfrak{h}_3 + \cdots + \mathfrak{h}_s + \mathfrak{g}_1$, получим

$$\mathfrak{G} = (\mathfrak{h}_3 + \cdots + \mathfrak{h}_s + \mathfrak{g}_1) + \sum{}' \mathfrak{g}_\nu$$

(сумма $\sum'$ не содержит $\mathfrak{g}_1$), откуда, сравнивая с предыдущим уравнением, получаем по второй теореме $\sum \mathfrak{g}_\nu \cong \mathfrak{h}_2$. Следовательно, сумма опять состоит из одного члена, а именно из $\mathfrak{g}_2$. Мы имеем $\mathfrak{g}_2 \cong \mathfrak{h}_2$ и

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{h}_3 + \dots + \mathfrak{h}_s + \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2.$$

Продолжая, получим $\mathfrak{g}_\nu \cong \mathfrak{h}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \dots, s-1)$ и

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{h}_s + \mathfrak{g}_1 + \dots + \mathfrak{g}_{s-1}.$$

Отсюда опять по второй теореме $\mathfrak{h}_s \cong \mathfrak{g}_s + \dots + \mathfrak{g}_r$, а следовательно, так как последняя сумма может состоять только из одного члена, то $r = s$ и $\mathfrak{g}_s \cong \mathfrak{h}_s$. ∎

В частности, из этой теоремы следует, что неприводимые составные части, на которые распадается представление, зависят только от самого этого представления, а не от выбранного разложения векторного пространства на неприводимые подпространства. Поэтому имеет, например, определенный смысл говорить, что в заданном представлении $\mathfrak{D}$ неприводимое представление $\mathfrak{D}_1$ содержится три раза, а другое представление $\mathfrak{D}_2$ один раз.

Из первой теоремы вытекает важное соотношение

$$\mathfrak{G}/\mathfrak{H} \cong \mathfrak{g}_{\nu_1} + \dots + \mathfrak{g}_{\nu_k}.$$

Так как каждое гомоморфное изображение $\mathfrak{G}$ изоморфно с дополнительной группой $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$, мы имеем:

Теорема 4. *Каждое голоморфное изображение целиком приводимой аддитивной группы изоморфно с суммой некоторых компонент $\mathfrak{g}_\nu$ группы $\mathfrak{g}$.*

§ 12. Преобразования произведений по Кронекеру

Пусть заданы преобразование A n-мерного векторного пространства $\mathfrak{R}_n$ и преобразование B пространства $\mathfrak{R}_m$. В качестве $\mathfrak{R}_n$ мы можем взять совокупность линейных форм $c_1u_1 + \dots + c_nu_n$ с n переменными $u_1, \dots$, а в качестве $\mathfrak{R}_m$ — совокупность линейных форм $d_1v_1 + \dots + d_mv_m$. Величины u_λ и v_ρ являются базисными векторами.

$n \cdot m$ линейно-независимых произведений $u_\lambda v_\rho$ тоже могут быть использованы как базисные элементы векторного пространства, векторы которого имеют форму $\sum c_{\lambda\rho} u_\lambda v_\rho$. Если теперь мы преобразуем u

с помощью A и v с помощью B, то и произведение $u_\lambda v$ подвергнется линейному преобразованию

$$u'_\mu v'_\sigma = \sum u_\lambda v_\rho a_{\lambda\mu} \beta_{\rho\sigma},$$

которое обозначается как *произведение преобразований* $A \times B$. Оно применяется прежде всего в тех случаях, когда A и B являются представлениями одного и того же оператора a группы $\mathfrak{g}$. При этом $(A \times B) u_\lambda v_\rho$ является просто результатом применения оператора a к произведению $u_\lambda v_\rho$. Если A и B образуют два представления $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}'$ группы $\mathfrak{g}$, то $A \times B$, очевидно, образуют представление той же группы, называемое *произведением представлений* $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}'$.

Таким же образом можно умножить друг на друга более чем два представления. Мы получаем при этом представление типа

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}' \times \mathfrak{D}'' = (\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}') \times \mathfrak{D}'' = \mathfrak{D} \times (\mathfrak{D}' \times \mathfrak{D}'').$$

Произведение двух унитарных преобразований тоже унитарно. Доказательство этой теоремы предоставляем читателю.

Пусть $\mathfrak{D}$ и $\widetilde{\mathfrak{D}}$ — два неприводимых представления группы $\mathfrak{G}$. Спрашивается, при каком условии в произведении представлений содержится в качестве составной части тождественное представление или, что то же самое, при каком условии в пространстве представлений $\mathfrak{D} \times \widetilde{\mathfrak{D}}$ существует инвариантный вектор?

Если $\mathfrak{R} = (u_1, \ldots, u_n)$ — пространство представления $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{S} = (v_1, \ldots, v_m)$ пространства представления $\widetilde{\mathfrak{D}}$, то каждый вектор пространства произведения имеет вид

$$w = \sum \sum c_{\lambda\rho} u_\lambda v_\rho = \sum_1^n u_\lambda v'_\lambda \qquad \left(v'_\lambda = \sum_1^m c_{\lambda\rho} v_\rho\right).$$

Для того чтобы w было инвариантным, по отношению к каждому элементу a группы должно иметь место равенство

$$aw = \sum_1^n (au_\lambda)\,(av'_\lambda) = \sum_1^n u_\lambda v'_\lambda.$$

Положим

$$au_\lambda = \sum_1^n u_\mu \alpha_{\mu\lambda}.$$

Это дает

$$\sum\sum u_\mu \alpha_{\mu\lambda} \cdot av'_\mu = \sum u_\mu v'_\mu$$

или

$$\sum_1^n \alpha_{\mu\lambda} \cdot av'_\lambda = v'_\mu. \tag{12.1}$$

Если мы положим $\alpha_{\mu\lambda} = \alpha'_{\lambda\mu}$ (транспонированная матрица) и обозначим через $(\beta_{\lambda\mu})$ матрицу обратную $(\alpha_{\lambda\mu}$, то (12.1) можно решить относительно av'_λ, после чего, помножив на $\beta_{\mu\nu}$ и просуммировав по μ, получаем

$$av'_\nu = \sum v'_\mu \beta_{\mu\nu}. \tag{12.2}$$

Отсюда, во-первых, следует, что $(v'_1, \ldots, v'_n)$ является подпространством $\mathfrak{S}$, инвариантным относительно группы $\mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{S}$ неприводимо, то $(v'_1, \ldots, v'_n)$ совпадает с $\mathfrak{S}$. Поэтому число измерений m равно максимум n: $m \leqslant n$. Меняя ролями $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$, получаем также $n \geqslant m$, откуда $m = n$. Следовательно, векторы $v'_1, \ldots, v'_n$ линейно-независимы: они могут быть использованы как базисные векторы для $\mathfrak{S}$ и обозначены через $v_1, \ldots, v_n$. Формула (12.2) показывает, что элементу группы a в представлении $\widetilde{\mathfrak{D}}$ соответствует матрица $(\beta_{\lambda\mu})$.

Следовательно, *для того чтобы, в пространстве представлений $\mathfrak{D} \times \widetilde{\mathfrak{D}}$ существовал инвариантный вектор w, матрицы $\widetilde{\mathfrak{D}}$, отнесенные к соответственно выбранному базису $(v_1, \ldots, v_n)$, должны быть обратны транспонированным матрицам представления $\mathfrak{D}$; при этом инвариантный вектор имеет вид*

$$w = \sum_1^n u_\lambda v_\lambda.$$

Соотношение между двумя представлениями $\mathfrak{D}$ и $\widetilde{\mathfrak{D}}$, заключающееся в том, что $\sum u_\lambda v_\lambda$ является инвариантным, естественно, обратимо: матрицы $\mathfrak{D}$ также являются обратными по отношению к транспонированным матрицам представления $\widetilde{\mathfrak{D}}$. Представления $\mathfrak{D}$ и $\widetilde{\mathfrak{D}}$, связанные между собой таким соотношением, называются *контрагредиентными друг к другу*. Каждому представлению $\mathfrak{D}$ соответствует контрагредиентное представление $\widetilde{\mathfrak{D}}$. Если $\mathfrak{D}$ приводимо, то приводимо и $\widetilde{\mathfrak{D}}$, и обратно. В случае унитарных представлений транспонированно-обратные матрицы $(\beta_{\lambda\mu})$ комплексно-сопряжены с $(\alpha_{\lambda\mu})$ и, следовательно, в этом случае контрагредиентное представление одновременно является и комплексно-сопряженным.

Поэтому, если целиком приводимое представление $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 + \cdots + \mathfrak{D}_h$ содержит как составную часть определенное неприводимое представление $\widetilde{\mathfrak{J}}$, контрагредиентное к $\mathfrak{J}$, то для того, чтобы произведение представлений $\mathfrak{D} \times \mathfrak{J} = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{J} + \cdots + \mathfrak{D}_h \times \mathfrak{J}$ в своем разложении содержало один раз тождественное представление, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{J}$ было контрагредиентно к одному из $\mathfrak{D}_\nu$.

Отсюда следует: *для того чтобы произведение представлений $\mathfrak{D} \times \mathfrak{G}$ содержало в качестве составной части неприводимое представление $\widetilde{\mathfrak{J}}$, произведение представлений $\mathfrak{D} \times \mathfrak{G} \times \mathfrak{J}$ должно, по крайней мере раз, содержать тождественное представление.* Это соотношение симметрично относительно $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{J}$.

Для абелевых групп и вообще в случае представлений первой степени произведение представлений довольно тривиально. Если $(\chi(a))$ и $(\chi'(a))$ матрицы, представляющие элемент a группы, то $(\chi(a)\chi'(a))$ представляющая матрица для a в произведении представлений. Если представление $\mathfrak{D}\colon a \to \alpha$ первой степени, а другое представление $\mathfrak{D}'\, a \to A$ имеет любой характер, то произведение представлений дает $a \to \alpha A$. Если $\mathfrak{D}'$ неприводимо, то $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}'$ тоже неприводимо, потому что приводимая система αA при умножении всех матриц на α^{-1} дала бы приводимую систему A. Но при представлениях степени выше первой произведение неприводимых представлений может быть приводимо.

Пример 6. Вычислим и разложим на неприводимые произведения представлений $\mathfrak{A}_0^+$, $\mathfrak{A}_0^-$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, … аксиальной группы инверсий (§ 10, пример 3).

Базисными векторами представлений $\mathfrak{A}_\lambda$ и $\mathfrak{A}_\mu$ (при $\lambda > 0$ и $\mu > 0$) являются $u_{\pm\lambda}$ и $v_{\pm\mu}$, а их произведениями — $-u_\lambda v_\mu$, $u_{-\lambda}v_{-\mu}$, $u_\lambda v_{-\mu}$ и $u_{-\lambda}v_\mu$. Отражение s_y переставляет первые два вектора и вторые два вектора между собой. В первой паре при вращении D_φ появляется множитель $e^{\pm i(\lambda+\mu)\varphi}$ и она преобразуется поэтому по $\mathfrak{A}_{\lambda+\mu}$. Во второй паре при D_φ появляется множитель $e^{\pm i(\lambda-\mu)}$ и она преобразуется в случае $\lambda \neq \mu$ по $\mathfrak{A}_{|\lambda-\mu|}$. В случае $\lambda = \mu$ оба вектора $u_\lambda v_{-\lambda}$ и $u_{-\lambda}v_\lambda$ остаются инвариантными по отношению к D_φ. Их сумма $u_\lambda v_{-\lambda} + u_{-\lambda}v_\lambda$ при отражении s_y умножается на $+1$, а их разность $u_\lambda v_{-\lambda} - u_{-\lambda}v_\lambda$ — на -1.

Поэтому

$$\mathfrak{A}_\lambda \times \mathfrak{A}_\mu = \mathfrak{A}_{\lambda+\mu} + \mathfrak{A}_{|\lambda-\mu|} \quad \text{при } \lambda \neq \mu, \quad \text{оба } > 0,$$
$$\mathfrak{A}_\lambda \times \mathfrak{A}_\lambda = \mathfrak{A}_{2\lambda} + \mathfrak{A}_0^+ + \mathfrak{A}_0^- \quad \text{при } \lambda = \mu > 0.$$

Если $\mu = 0^+$, то произведение $u_\lambda v_0$ и $u_{-\lambda} v_0$ преобразуется так же, как u_λ и $u_{-\lambda}$, т. е как $\mathfrak{A}_1$. Отсюда следует $\mathfrak{A}_\lambda \times \mathfrak{A}_0^+ = \mathfrak{A}_\lambda$ (это имеет место также и при $\lambda = 0\pm$).

Для $\mu = 0^-$ и $\lambda > 0$ $u_\lambda v_0$ и $u_{-\lambda} v_0$ преобразуются так же, как u_λ и $u_{-\lambda}$, т. е. как $\mathfrak{A}_\lambda$. Это дает

$$\mathfrak{A}_\lambda \times \mathfrak{A}_0^- = \mathfrak{A}_\lambda \qquad (\lambda > 0).$$

Если, наконец, $\lambda = \mu = 0^-$, то произведение $u_0 v_0$ остается инвариантным при вращении D_φ и отражении s_y. Отсюда имеем

$$\mathfrak{A}_0^- \times \mathfrak{A}_0^- = \mathfrak{A}_0^+.$$

§ 13. Матрицы, коммутирующие с данным представлением

Пусть $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$ — два векторных пространства с общей областью $\mathfrak{G}$ операторов, производящих в обоих пространствах линейные преобразования. Далее, пусть задано линейное преобразование T, которое операторно-гомоморфно отображает пространство $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{S}$ или в некоторое подпространство пространства $\mathfrak{S}$. Операторный гомоморфизм приводит к тому, что, когда $Tv = w$ для каждого a из $\mathfrak{G}$, преобразование T также переводит av в aw, т. е.

$$Tav = aTv$$

или a коммутирует с T. Теперь докажем *лемму Шура.*

Лемма Шура. *Если $\mathfrak{R}$ неприводимо, то T либо является изоморфизмом, либо преобразует каждый вектор в нулевой вектор.*

В первом случае $\mathfrak{R}$ эквивалентно неприводимому подпространству $\mathfrak{S}$. Если $\mathfrak{S}$ само неприводимо, то $\mathfrak{R}$ эквивалентно $\mathfrak{S}$. В частности, если $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$ и для $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$ применяются одинаковые базисные векторы, то далее мы получаем: *матрица T является кратной единичной матрицей.*

Доказательство.

По закону гомоморфизма T является изоморфным изображением дополнительного пространства $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$. Если $\mathfrak{R}$ неприводимо, то должно иметь место или $\mathfrak{r} = (0)$ или $\mathfrak{R} = \mathfrak{r}$. Это и дает доказываемую альтернативу.

Чтобы доказать соотношение $T = \tau E$ в случае $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$, определим τ так, что детерминант $|T - \tau E| = 0$. Так как одновременно с T и $T - \tau E$ коммутирует со всеми $\mathfrak{a}$, то по только что доказанной части теоремы матрица $T - \tau E$ или представляет однозначное, следовательно, несингулярное преобразование, или равна нулю. Следовательно, если $|T - \tau E| = 0$, то $T - \tau E = 0$, т. е. $T = \tau E$. ■

То же самое соотношение $T = \tau E$ имеет место, если положить не $\mathfrak{R} = \mathfrak{S}$, а $\mathfrak{R} \cong \mathfrak{S}$, так как выбранные базисы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$ соответствуют друг другу вследствие изоморфизма.

Мы определим теперь линейные преобразования, коммутирующие с целиком приводимой системой $\mathfrak{G}$ линейных преобразований пространства $\mathfrak{R}$. Другими словами, согласно вышесказанному, мы определим операторные гомоморфизмы целиком приводимого пространства представлений $\mathfrak{R}$ с областью операторов $\mathfrak{G}$.

Положим

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \cdots + \mathfrak{r}_r. \tag{13.1}$$

Если пространства $\mathfrak{r}, \ldots, \mathfrak{r}_k$ преобразуются с помощью $\mathfrak{G}$ эквивалентным образом, то мы вводим в них соответствующие базисные векторы такого рода, чтобы преобразования этих пространств представлялись одинаковыми матрицами. Пусть T — линейное преобразование, гомоморфно отображающее $\mathfrak{R}$ в самого себя. Чтобы полностью знать преобразование T, нужно знать только его действие на векторы $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_r$. T отображает $\mathfrak{r}_1$ в изоморфное с $\mathfrak{r}_1$ пространство $T\mathfrak{r}_1$. Векторы $w = Tv$ пространства $T\mathfrak{r}_1$ можно разложить на компоненты по (13.1)

$$Tv = w = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_r. \tag{13.2}$$

Соответствие $w \to w_1$ или $w \to w_2$ является тоже операторным гомоморфизмом, поэтому $v \to w \to w_1$ или $v \to w \to w_2$ и т. д. является также операторным гомоморфизмом. По лемме Шура в разложение (13.2) могут входить только такие компоненты, которые относятся к подпространствам $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_k$, эквивалентным $\mathfrak{r}_1$. Все остальные компоненты должны равняться нулю. Далее, по лемме Шура (вторая часть) соотношения $v \to w_1$ и т. д. должны представляться кратными единичной матрице. Мы обозначим эти кратные, поскольку речь идет об отображении $\mathfrak{r}_1$ в $\mathfrak{r}_\lambda$, через $\tau_{\lambda 1} E$. Все, что имеет место для $\mathfrak{r}_1$, естественно, имеет место и для всех остальных $\mathfrak{r}_\mu$: мы имеем отображения $\tau_{\lambda\mu}E$ пространства $\mathfrak{r}_\mu$ в эквивалентном ему $\mathfrak{r}_\lambda$.

Построим теперь матрицу T, отнесенную к базису, составленному из базисов $\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_k, \mathfrak{r}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{r}_r$. Мы получаем при этом

$$\left|\begin{array}{cccc|cc|c} \tau_{11}E & \tau_{12}E & \cdots & \tau_{1k}E & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \multicolumn{2}{c}{0} & \\ \tau_{k1}E & \tau_{k2}E & \cdots & \tau_{kk}E & & & \\ \hline & & & & \tau_{k+1,k+1}E & \cdots & \\ \multicolumn{4}{c|}{0} & \vdots & \ddots & \\ & & & & \cdots & \cdots & \\ \hline & & & & & & \ddots \end{array}\right|. \tag{13.3}$$

Полученный результат можно формулировать следующим образом. Напишем последовательно базисные векторы эквивалентных пространств от $\mathfrak{r}_1$ до $\mathfrak{r}_k$

$$\begin{array}{ll} v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1n} & (\text{базис } \mathfrak{r}_1), \\ v_{21}, v_{22}, \ldots, v_{2n} & (\text{базис } \mathfrak{r}_2), \\ & \quad\ldots \\ v_{k1}, v_{k2}, \ldots, v_{kn} & (\text{базис } \mathfrak{r}_k), \end{array}$$

при операциях $\mathfrak{G}$ *строки* этого прямоугольника линейно преобразуются в самих себя, причем все строки одинаковым образом, тогда как коммутирующие с ними операторы T преобразуют *столбцы* прямоугольников в самих себя, причем тоже одинаковым образом, в остальном совершенно произвольным. Для пространств от $\mathfrak{r}_{k+1}$ до $\mathfrak{r}_r$ получаются аналогичные прямоугольники базисных векторов.

Таким образом находятся все матрицы, коммутирующие с полностью приводимой системой. Эти матрицы образуют *кольцо* $\mathfrak{I}$, т. е. систему величин, содержащую для каждой пары также и их сумму, разность и произведение. Кольцо $\mathfrak{I}$ является «*прямой суммой*» колец $\mathfrak{I}_1, \ldots, \mathfrak{I}_q$, составленных из матриц одной из «касс» в (13.3) (с нулями в других кассах), т. е. каждая матрица кольца $\mathfrak{I}$ может быть однозначно представлена суммой матриц колец $\mathfrak{I}_1, \ldots, \mathfrak{I}_q$, тогда как произведение двух матриц различных колец $\mathfrak{I}_\nu, \mathfrak{I}_\mu$ всегда равно нулю. Поэтому пишут

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 + \cdots + \mathfrak{I}_q.$$

Матрицы кольца $\mathfrak{J}_1$ складываются и умножаются точно так же, как k-рядные матрицы

$$\begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{k1} & \tau_{k2} & \cdots & \tau_{kk} \end{vmatrix} \qquad (13.4)$$

с совершенно произвольными числами $\tau_{\lambda\mu}$ в качестве элементов. Кольцо всех этих матриц мы называем *полным матричным кольцом степени* k. Следовательно, кольцо $\mathfrak{J}$ является прямой суммой полных матричных колец.

Базисные величины полного матричного кольца мы получим, если положим, что все $\tau_{\lambda\mu}$ (13.4) равны нулю, кроме одного $\tau_{\lambda\mu} = 1$. Полученные таким образом матрицы (13.4) мы обозначим через $C_{\lambda\mu}$. При этом каждая матрица может быть однозначно представлена суммой $\sum C_{\lambda\mu}\tau_{\lambda\mu}$. Правила вычисления сводятся к равенствам

$$\begin{aligned} C_{\varkappa\lambda}C_{\lambda\mu} &= C_{\varkappa\mu}, \\ C_{\varkappa\lambda}C_{\lambda'\mu} &= 0 \qquad\qquad (\lambda \neq \lambda'). \end{aligned}$$

Полученная теорема позволяет ответить на следующий вопрос. Предположим, что на векторное пространство $\mathfrak{R}$ действуют две *коммутирующие между* собой группы или вообще две коммутирующие целиком приводимые системы линейных преобразований $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$. Можно ли разложить системы на неприводимые части так, чтобы в приведенной форме коммутируемость была непосредственно видна?

Сначала разложим систему $\mathfrak{G}$, что приведет к рассмотренным выше прямоугольным системам базисных векторов

$$\begin{matrix} v_{11}\, v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ & \cdots & \\ v_{k1}\, v_{k2} & \cdots & v_{kn}. \end{matrix}$$

Согласно вышеизложенным результатам, коммутирующая система $\mathfrak{H}$ должна линейно преобразовывать столбцы каждого прямоугольника в самих себя и притом одинаковым образом. Следовательно, каждый столбец определяет подпространство в $\mathfrak{R}$, инвариантное относительно $\mathfrak{H}$, которое должно быть полностью приводимо. Поэтому можно заменить базисные векторы какого-либо столбца их линейными комбинациями так, чтобы после этого столбец распадался на отдельные участки, неприводимо преобразующиеся под действием $\mathfrak{H}$. Это видоизменение базисных векторов мы проводим для всех столбцов прямоугольника одинаковым образом. Потом таким же образом преобразуем неприводимо строки прямоугольника системы $\mathfrak{G}$ так, что весь прямоугольник разделится горизонтальными линиями на частичные прямоугольники, столбцы которых неприводимо преобразуются системой $\mathfrak{H}$.

Таким образом, *если даны две целиком приводимые и коммутирующие системы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ линейных преобразований векторного пространства $\mathfrak{R}$, то можно расположить базисные векторы в прямоугольники*

$$\begin{matrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{s1} & \cdots & v_{sn} \end{matrix}$$

так, чтобы в каждом прямоугольнике все строки неприводимо преобразовывались одинаковым образом системой $\mathfrak{G}$ и точно так же все столбцы неприводимо преобразовывались одинаковым образом системой $\mathfrak{H}$.

§ 14. Представления конечной группы[1]

Пусть $\mathfrak{G}$ — конечная группа с h элементами. Выберем положительно определенную эрмитову форму в пространстве какого-либо произвольного представления, применим к ней все преобразования группы и сложим результаты. При этом получается положительно определенная форма, инвариантная относительно рассматриваемой группы. Следовательно, матрицы представления являются унитарными и *поэтому представление либо вовсе неприводимо, либо приводимо целиком.*

Особое представление получается, если в качестве базисных векторов воспользоваться элементами группы и, следовательно, в качестве векторов все линейные комбинации

$$c = \sum_s \gamma_s s \tag{14.1}$$

с комплексными коэффициентами γ_s. Эти «групповые числа» (14.1) образуют кольцо $\mathfrak{R}_g$, т. е. их можно не только складывать друг с другом и умножать на обыкновенные числа, но и умножать друг на друга, т. е. можно положить

$$\sum_s \gamma_s s \cdot \sum_t \delta_t t = \sum_s \sum_t \gamma_s \delta_t st. \tag{14.2}$$

[1]Содержание этого и следующего параграфов не является безусловно необходимым для рассматриваемых в этой книге приложений к квантовой механике, но эти параграфы обязательны для того, кто хочет углубиться в теорию представлений. Эта теория дана Г. Фробениусом, применившим здесь метод доказательства Е. Нетера. Другое простое доказательство см.: I. Schur. Sitzungsber. Berlin. 1905. S. 406.

Кольцо $\mathfrak{R}_g$ называется ***кольцом группы, алгеброй группы*** или ***областью группы.*** Единичный элемент e группы является одновременно единичным элементом кольца. Если помножить элементы кольца на базисный вектор s, то во всех случаях получается линейное преобразование кольца в самого себя, т. е. представление группы $\mathfrak{G}$. Это представление называется ***регулярным представлением группы*** $\mathfrak{G}$; оно имеет порядок h.

Инвариантным подпространством регулярного представления является такое подпространство, которое вместе с каждым данным групповым числом a содержит и все sa, где s — произвольный элемент группы. При этом подпространство содержит и все $\sum_s \gamma_s s \cdot a$, т. е. все ca, где c — групповые числа. Такое подпространство называется ***левым идеалом.*** На основании вышеизложенного кольцо группы целиком приводимо, а следовательно, оно является ***прямой суммой неприводимых левых идеалов.***

Мы можем доказать теперь следующие теоремы.

Теорема 1. ***Каждое неприводимое представление группы $\mathfrak{G}$ содержится в регулярном представлении (следовательно, оно эквивалентно представлению, выраженному с помощью неприводимых левых идеалов).***

Доказательство.

Заметим, во-первых, что мы можем каждое представление группы $\mathfrak{G}$ заменить «представлением» кольца $\mathfrak{R}_g$, приведя в соответствие элементам кольца $\sum_s \gamma_s s$ матрицы $\sum_s \lambda_s S$, где S — матрица, соответствующая элементу группы s. Произведению двух элементов кольца соответствует произведение матриц и сумме — сумма матриц. Если теперь v обозначает произвольный вектор пространства представлений $\mathfrak{r}$, то $c \to cv$ дает линейное изображение кольца группы в пространстве представлений. Это изображение является операторным гомоморфизмом (по отношению к $\mathfrak{G}$ как области операторов). Поэтому из (14.1) следует

$$s \cdot c \to sc \cdot v = s \cdot cv.$$

Согласно четвертой теореме § 11, пространство $\mathfrak{r}$ оказывается, таким образом, изоморфным с суммой неприводимых подпространств регулярного представления, следовательно, если $\mathfrak{r}$ само неприводимо, то изоморфно с одним подобным подпространством, что и требовалось доказать. ∎

Теорема 2. ***Кольцо $\mathfrak{R}_g$ является прямой суммой полных матричных колец.***

Доказательство.

Мы попытаемся определить операторные гомоморфизмы кольца $\mathfrak{R}_g$ (или преобразования, коммутирующие с регулярным представлением). Обозначим одно из них через T и предположим, что T переводит единичный элемент группы $\mathfrak{G}$ в элемент t. Вследствие коммутирования T со всеми элементами s группы должно иметь место соотношение

$$T\sum_s c_s se = \sum_s c_s sTe = \sum_s c_s st.$$

Следовательно, операция T заключается в том, что все элементы кольца умножаются справа на t. Каждому T отвечает определенное t, и обратно. Произведению двух гомоморфизмов TU соответствует обратное произведение ut, так как (для произвольного c в $\mathfrak{R}_g$) мы имеем

$$TU \cdot c = T \cdot cu = cut,$$

а сумме $T + U$ соответствует сумма $t + u$.

Следовательно, кольцо $\mathfrak{R}_g$ «обратно изоморфно» кольцу $\mathfrak{J}$ операторного гомоморфизма, т. е. изоморфно с перестановкой множителей в произведениях. По § 13, если $\mathfrak{J}$ — прямая сумма полных матричных колец, то, чтобы получить обратно изоморфное к ней кольцо, достаточно заменить все матрицы транспонированными. При этом опять получаем прямую сумму полных матричных колец. ■

Каковы левые идеалы кольца

$$\mathfrak{R}_g = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2 + \dots + \mathfrak{J}_q, \tag{14.3}$$

где $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_q$ — матричные кольца?

Введем в $\mathfrak{J}_1$ в качестве базисных величин n матрицы $C_{\lambda\mu}$ (ср. § 13). Элементы $(C_{11}, C_{21}, \ldots, C_{n1})$ определяют левый идеал в $\mathfrak{J}_1$, а поэтому также и в $\mathfrak{R}_g$, то же самое относится к элементам $(C_{12}, C_{22}, \ldots, C_{n2})$ и т. д. Это дает n левых идеалов в $\mathfrak{J}_1$. Если мы вычислим также представление $\mathfrak{R}_g$, к которому приводят эти идеалы, то оказывается, что все величины $\mathfrak{J}_2, \ldots, \mathfrak{J}_q$ представляются нулями, а величины $t = \sum\sum \alpha_{\lambda\mu}C_{\lambda\mu}$ из $\mathfrak{J}_1$ во всех n вышеупомянутых представлениях представляются одной и той же матрицей $(\alpha_{\lambda\mu})$, т. е. для каждого t_2 в $\mathfrak{J}_2$

$$t_2 C_{\nu\varkappa} = 0$$

или для каждого $t_1 = \sum\limits_\lambda \sum\limits_\mu \alpha_{\lambda\mu}C_{\lambda\mu}$ в $\mathfrak{J}_1$,

$$t_1 C_{\nu\varkappa} = \sum_\lambda \sum_\mu \alpha_{\lambda\mu}C_{\lambda\mu}C_{\nu\varkappa} = \sum_\lambda \alpha_{\lambda\nu}C_{\lambda\nu}C_{\nu\varkappa} = \sum_\lambda C_{\lambda\varkappa}\alpha_{\lambda\nu}.$$

Отсюда следует, что вышеупомянутые левые идеалы эквивалентны и соответствуют одному и тому же неприводимому представлению. То же самое имеет место для левых идеалов $\mathfrak{I}_2$. Но они не эквивалентны предыдущим левым идеалам, так как в связанном с ними представлении элементы $\mathfrak{I}_1$ представлены нулями, что не имело места в ранее рассмотренном представлении. Следовательно, *мы получаем ровно столько неэквивалентных представлений, сколько матричных колец, содержится в* (14.3).

Если n_ν — порядок матриц в $\mathfrak{I}_\nu$, то представление Δ_ν, образуемое этими матрицами, равным образом имеет порядок n_ν, причем представление Δ_ν входит n_ν раз в регулярное представление, так как $\mathfrak{I}_\nu$ распадается на n_ν эквивалентных левых идеалов. Следовательно, *каждое неприводимое представление входит в регулярное представление столько раз, сколько единиц содержит его порядок*. Число измерении $\mathfrak{I}_\nu$, т. е. число линейно независимых базисных векторов $C_{\lambda'\mu}$ равно n_ν^2, следовательно, число измерений $\mathfrak{R}_g$ равно h

$$h = \sum_{\nu=1}^{q} n_\nu^2. \tag{14.4}$$

Из этого равенства вытекает

Теорема Бернсайда. *Каждое неприводимое представление степени n_ν содержат n_ν^2 нелинейно независимых матриц.*

Действительно, среди линейных комбинаций матриц представления Δ_ν встречаются матрицы, представляющие все элементы кольца $\mathfrak{R}$ и, в частности, кольца $\mathfrak{I}_\nu$, т. е. всевозможные матрицы $(\mathfrak{a}_{\lambda\mu})$ с произвольными $\mathfrak{a}_{\lambda\mu}$.

Мы можем, наконец, выяснить, сколько существует неприводимых представлений рассматриваемой группы. С этой целью определим «центр» кольца $\mathfrak{R}_g$, т. е. совокупность таких величин $\sum \gamma_s s$, которые коммутируют со всеми остальными групповыми числами. Для этого достаточно, чтобы они коммутировали со всеми элементами группы, т. е. чтобы

$$\sum \gamma_s tst^{-1} = \sum \gamma_s s.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы в сумме $\sum \gamma_s s$ каждое s было связано с таким же коэффициентом, как и каждый «сопряженный с s элемент группы» tst^{-1}. Обозначим через k сумму всех *различных* сопряженных с s элементов группы tst^{-1}, включая и сам элемент s. Таким образом, каждый элемент центра должен иметь форму

$$z = \sum \gamma_k k. \tag{14.5}$$

Центром $\mathfrak{R}_g$ является, следовательно, векторное пространство, число измерений которого q' равно числу различных классов сопряженных элементов группы.

С другой стороны, центр можно определить также из представления $\mathfrak{R}_g$ в виде суммы (14.3). Величины $t = t_1 + \cdots + t_q$ в $\mathfrak{R}_g$ коммутируют со всеми величинами $\mathfrak{R}_g$, когда t_1 коммутирует со всеми матрицами $\mathfrak{I}_1$, т. е. является кратным $\lambda_1 e_1$ единичной матрицы e_1 в $\mathfrak{I}_1$ и когда также $t_2 = \lambda_2 e_2, \ldots, t_q = \lambda_q e_q$. Поэтому центр $\mathfrak{R}_g$ определяется совокупностью линейно-независимых величин $(e_1, \ldots, e_q)$, так что число его измерений равно q. Таким образом, имеем

$$q' = q,$$

или *число неприводимых представлений равно числу классов сопряженных элементов группы.*

1. Примеры

Пример 1. (Симметричная группа $\mathfrak{S}_3$). Число элементов $3! = 6$. Классы сопряженных элементов группы: класс (1), класс (1 2), класс (1 2 3); мы имеем, следовательно, три представления. Они уже известны нам из примера 5 § 10. Их степени 1, 1, 2. Действительно,

$$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2.$$

Представления первой степени являются симметричным и антисимметричным. Представление второй степени легче всего получить, присоединяя сначала к двум линейно-независимым векторам e_1, e_2 третий вектор e_3 с помощью $e_3 = -e_1 - e_2$ или $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ и подвергая затем эти три вектора перестановкам $\mathfrak{S}_3$. Это представление второй степени является, очевидно, точным.

Пример 2. (Симметричная группа $\mathfrak{S}_4$). Число элементов $4! = 24$. Классы (1), (1 2), (1 2 3), (1 2), (3 4), (1 2 3 4); мы имеем, следовательно, пять представлений. Дополнительная группа $\mathfrak{S}_4/\mathfrak{B}_4 \cong \mathfrak{S}_3$ и поэтому, согласно примеру 1, имеем два представления первой степени и одно второй степени. Это дает три неточных представления $\mathfrak{S}_4$ (степени 1, 1, 2). Из

$$24 = 1^2 + 1^2 + 2^2 + n_4^2 + n_5^2$$

следует: $n_4^2 + n_5^2 = 18$, т. е. $n_4 = n_5 = 3$.

Мы получаем одно из представлений третьей степени, подвергая перестановкам $\mathfrak{S}_4$ четыре вектора e_1, e_2, e_3, e_4, из которых три первых линейно-независимы, тогда как $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 0$. Другое представление получаем, меняя знак в относящихся к нечетным перестановкам матрицах полученного ранее представления.

Пример 3. (Знакопеременная группа $\mathfrak{A}_4$). Число элементов 12. Классы (1), (2 3), (1 3 2) и (1 2), (3 4). Существуют, следовательно, четыре представления. Дополнительная группа $\mathfrak{A}_4/\mathfrak{B}_4$ является циклической группой третьего порядка и поэтому имеет три представления первой степени (с корнем третьей степени из 1). Из

$$12 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + n_4^2$$

следует: $n_4 = 3$. Недостающие представления третьей степени являются ничем иным, как обоими вышеприведенными представлениями третьей степени $\mathfrak{S}_4$, примененными к перестановкам $\mathfrak{A}_4$. Вышеприведенное представление второй степени $\mathfrak{S}_4$, примененное к $\mathfrak{A}_4$, распадается на два комплексно-сопряженных представления первой степени.

2. Обобщение

Теорема Бернсайда имеет место не только для представлений конечных групп, но и для любой неприводимой системы матриц, содержащей наряду с каждыми двумя матрицами также и их произведение. Кроме того, имеем следующее обобщение, данное Фробениусом и Шуром: полностью приводимая система матриц, содержащая вместе с каждыми двумя матрицами и их произведение и состоящая из неприводимых частей степени $n_1, n_2, \ldots, n_s$ (причем эквивалентные части считаются за одну), содержит $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_s^2$ линейно независимых матриц.

Кольцо группы $\mathfrak{R}_g$ является примером «*гиперкомплексной системы чисел*», т. е. векторного пространства с конечным числом измерений, которое образует кольцо таким образом, что в нем определено умножение, считаемое некоммутативным, но имеющее все обычные свойства умножения (включая ассоциативный закон). Здесь мы рассматриваем только такие гиперкомплексные системы чисел, в которых областью умножения является область комплексных чисел.

Ясно, что теоремы этого параграфа, которые относятся к представлениям кольца $\mathfrak{R}_g$, справедливы не только для колец групп, но и для любой системы гиперкомплексных чисел, являющейся полностью приводимой, т. е. представляется суммами неприводимых левых идеалов и содержит единичный элемент. Поэтому каждая такая система является прямой суммой полных матричных колец и содержит столько же неприводимых представлений, сколько имеется в разложении матричных колец. Далее можно доказать, что каждое приводимое представление такого кольца целиком распадается на неприводимые. В частности, одно полное матричное кольцо имеет только одно единственное неприводимое представление, образуемое матрицами самого кольца.

Эта теорема может применяться к квантово-механическим вопросам. Например, следуя Дираку, часто ставят задачу определения системы четырех матриц Γ_1, Γ_2, Γ_3, Γ_4, удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$\Gamma_\lambda^2 = 1, \quad \Gamma_\lambda\Gamma_\mu = -\Gamma_\mu\Gamma_\lambda \quad (\lambda \neq \mu). \tag{14.6}$$

Если к Γ_λ присоединить произведения их по две, по три и т. д., то, согласно уравнениям (14.6), все они могут быть выражены через следующие 16 величин

$$1,\ \Gamma_\lambda,\ \Gamma_\lambda\Gamma_\mu,\ \Gamma_\lambda\Gamma_\mu\Gamma_\nu,\ \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4 \quad (\lambda,\ \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ \lambda < \mu < \nu). \tag{14.7}$$

Если же матрицы неизвестны, а еще только ищутся, то мы сначала строим систему гиперкомплексных чисел с 16 базисными элементами

$$1,\ \gamma_\lambda,\ \gamma_{\lambda\mu},\ \gamma_{\lambda\mu\nu},\ \gamma_{1234}, \quad (\lambda,\ \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ \lambda < \mu < \nu) \tag{14.8}$$

и предполагаем, что эти базисные элементы должны перемножаться между собой точно так же, как и матрицы (14.7), т. е. в соответствии с уравнением (14.6). Этим условием система чисел однозначно определяется. Каждая система матриц (14.7) со свойствами (14.6) дает только одно представление гиперкомплексной системы, и обратно. Таким образом, мы свели поставленный вопрос к вопросу об определении гиперкомплексной системы чисел с помощью матриц.

Согласно Дираку[1], мы знаем, что представление состоит из четырехрядных матриц, причем базисные элементы (14.8) представляются 16 линейно-независимыми матрицами. Поэтому искомая гиперкомплексная система изоморфна с полным матричным кольцом всех четырехрядных матриц. Согласно предыдущим теоремам, следует, что с точностью до эквивалентности существует только одно неприводимое представление (четвертой степени) и что каждое приводимое представление целиком распадается на неприводимые, которые все эквивалентны упомянутому представлению. Это значит, что дираковское представление с точностью до совершенно тривиальных измерений и эквивалентности является единственным.

---

[1] Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc. London A., Bd. 1928. 117. S. 610.

§ 15. Характеры

Как мы знаем, следы $\sum\limits_{\lambda} a_{\lambda\lambda}$ матриц $(\alpha_{\lambda\mu})$ какого-либо представления инварианты. Мы будем обозначать через $S(b)$ или $S_{\mathfrak{D}}(b)$ след матрицы, соответствующей элементу b группы в представлении $\mathfrak{D}$. Следы матриц неприводимых представлений называются *характерами.*

Сопряженные элементы группы: a и $b^{-1}ab$ имеют тот же самый след, так как

$$S(B^{-1}AB) = S(A).$$

Следы и характеры являются функциями сопряженных систем или «классов». Для каждой системы сопряженных элементов группы они имеют одно и то же значение.

Следы и характеры являются часто употребляемым вспомогательным средством для разложения заданного представления на неприводимые представления. Это разложение производится с помощью «соотношений ортогональности», которые мы сейчас выведем.

Пусть

$$s \to A(s), \quad s \to B(s)$$

— два неприводимых представления конечной группы $\mathfrak{G}$. Если C любая матрица, отображающая пространство второго представления в пространство первого, то сумма

$$P = \sum_t A(t)CB(t^{-1})$$

(суммирование производится по всем элементам группы) является также изображением второго пространства в первом, коммутирующим со всеми элементами s группы

$$A(s)P = A(s)\sum_t A(t)CB(t^{-1}) = \sum_t A(st)CB(t^{-1}s^{-1})B(s) = PB(s).$$

По лемме Шура (§ 13) отсюда следует:

$P = 0$, когда представления $A(t)$ и $B(t)$ неэквивалентны,

$P = \beta E$, когда представления одинаковы.

Выписывая это подробно, получаем

$$\sum_{\lambda,\mu}\sum_t a_{\varkappa\lambda}(t)c_{\lambda\mu}b_{\mu\nu}(t^{-1}) = \begin{cases} 0, & \text{когда } A(s) \text{ и } B(s) \text{ неэквивалентны,} \\ \beta\delta_{\varkappa\nu}, & \text{когда } A(s) = B(s), \end{cases}$$

или, так как $c_{\lambda\mu}$ совершенно произвольны,

$$\sum_t a_{\varkappa\lambda}(t) b_{\mu\nu}(t^{-1}) = \begin{cases} 0, & \text{когда } A(s) \text{ и } B(s) \text{ неэквивалентны,} \\ \beta_{\lambda\mu}\delta_{\varkappa\nu}, & \text{при } A(s) = B(s), \end{cases} \tag{15.1}$$

Чтобы определить $\beta_{\lambda\mu}$ в случае $A = B$, положим $\varkappa = \nu$ и просуммируем по ν. Вследствие того, что $B(s^{-1})A(s) = A(s^{-1})A(s) = 1$, слева каждый раз входят $\delta_{\lambda\mu}$ и мы получаем

$$\sum_t \delta_{\lambda\mu} = \beta_{\lambda\mu} \sum_\nu \delta_{\nu\nu}.$$

Если h число элементов группы и n степень представления, то мы имеем

$$h\delta_{\lambda\mu} = n\beta_{\lambda\mu}.$$

Следовательно, (15.1) имеет вид

$$\sum_t a_{\varkappa\lambda}(t) b_{\mu\nu}(t^{-1}) = \begin{cases} 0, & \text{когда } A,\ B \text{ неэквивалентны,} \\ \dfrac{h}{n}\delta_{\lambda\mu}\delta_{\varkappa\mu}, & \text{при } A = B. \end{cases}$$

Если представление $B(s)$ унитарно, то $B(t^{-1}) = \widetilde{\overline{B}}(t)$, следовательно, $b_{\mu\nu}(t^{-1}) = \overline{b}_{\nu\mu}(t)$ и поэтому

$$\sum_t a_{\varkappa\lambda}(t) \overline{b}_{\nu\mu}(t) = \begin{cases} 0, & \text{когда } A,\ B \text{ неэквивалентны,} \\ \dfrac{h}{n}\delta_{\varkappa\nu}\delta_{\lambda\mu}, & \text{при } A = B. \end{cases} \tag{15.2}$$

Это и есть соотношение ортогональности для матричных элементов. Положим $\varkappa = \lambda$; $\nu = \mu$ и просуммируем по λ и μ, тогда мы получаем *соотношение ортогональности для характеров*

$$\sum_t \chi^{(1)}(t)\overline{\chi^{(2)}(t)} = \begin{cases} 0 \\ h. \end{cases} \tag{15.3}$$

Нуль имеет место для характеров неэквивалентных представлений, h для характеров эквивалентных представлений.

Пусть $\chi^{(1)}, \ldots, \chi^{(r)}$ характеры различных неэквивалентных представлений и

$$S(t) = \sum_t c_\lambda \chi^{(\lambda)}(t)$$

— след произвольного представления, содержащего c_λ раз представление с номером λ, тогда из (15.3) следует

$$\sum_t S(t)\overline{\chi}^{(\lambda)}(t) = c_\lambda h. \tag{15.4}$$

Это уравнение позволяет вычислить числа c_λ из следа заданного представления и характеров неприводимых представлений. Одновременно мы видим, *что след $S(t)$ определяет представление однозначно с точностью до эквивалентности.*

В особенности удобно уравнение (15.4), когда речь идет о том, чтобы разложить на неприводимые произведение представлений $\mathfrak{D}_\lambda \times \mathfrak{D}_\mu$. След матрицы произведения $A \times B$

$$\sum_\lambda \sum_\mu a_{\lambda\lambda} b_{\mu\mu} = \Big(\sum_\lambda a_{\lambda\lambda}\Big)\Big(\sum_\mu b_{\mu\mu}\Big) = S(A)S(B),$$

следовательно, след представления произведения $\mathfrak{D}_\lambda \times \mathfrak{D}_\mu$ является произведением следов умножаемых представлений.

Обозначим, например, три представления $\mathfrak{S}_3$ через $\mathfrak{J}$ (идентичное), $\mathfrak{A}$ (антисимметричное) и $\mathfrak{U}$ (представление второй степени), тогда по этому методу получаем

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{J} \times \mathfrak{J} = \mathfrak{J} & \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{J} & \mathfrak{U} \times \mathfrak{U} = \mathfrak{J} + \mathfrak{A} + \mathfrak{U} \\ \mathfrak{J} \times \mathfrak{A} = \mathfrak{A} & \mathfrak{A} \times \mathfrak{U} = \mathfrak{U} & \\ \mathfrak{J} \times \mathfrak{U} = \mathfrak{U}. & & \end{array}$$