Глава III
Группа вращений и группа Лоренца

§ 16. Линейная группа $\mathfrak{c}_2$, унитарная группа $\mathfrak{u}_2$ и их отношение к группе вращений $\mathfrak{b}_3$

Возьмем в качестве векторного пространства совокупность бинарных линейных форм $c_1u_1 + c_2u_2$ двух переменных u_1 и u_2. Преобразования A специальной линейной группы c_2 переводят базисные векторы u_1, u_2 в

$$u_1' = u_1\alpha + u_2\gamma$$

$$u_2' = u_1\beta + u_2\delta.$$

Соответствующие матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Легко убедиться, что обратное преобразование имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Если в качестве эрмитовой формы взята единичная форма, то по § 7 *унитарное преобразование* A обладает следующими свойствами:

$$\widetilde{A} = A^{-1} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}.$$

Для этого требуется $\overline{\alpha} = \delta$, $\overline{\beta} = -\gamma$. Следовательно, специальная унитарная группа $\mathfrak{u}_2$ состоит из преобразований

$$\left.\begin{aligned} u_1' &= u_1\alpha - u_2\overline{\beta} \\ u_2' &= u_1\beta + u_2\overline{\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left.\begin{aligned} c_1' &= \alpha c_1 + \beta c_2 \\ c_2' &= -\overline{\beta} c_1 + \overline{\alpha} c_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1. \qquad (16.1)$$

Заметим, что при каждом преобразовании с детерминантом 1, при котором векторные коэффициенты (d_1, d_2) ковариантно преобразуются в (c_1, c_2), выражение $c_2d_1 - c_1d_2$ остается инвариантным. Поэтому коэффициенты $(c_2, -c_1)$ этого выражения преобразуются контравариантно в (c_1, c_2). Кроме того, в случае унитарной группы u_2 выражение $\bar{c}_1 c_1 + \bar{c}_2 c_2$ остается инвариантным и поэтому также и $(\bar{c}_1, \bar{c}_2)$ преобразуется контравариантно по отношению к (c_1, c_2). Наконец, $(\bar{c}_2, -\bar{c}_1)$ преобразуется при преобразовании u_2 контравариантно по отношению к $(c_2, -c_1)$, следовательно ковариантно к (c_1, c_2).

Можно получить представление групп $\mathfrak{c}_2$ и $\mathfrak{u}_2$, в которых базисными векторами служат «мономы» степени v

$$u_1^v, u_1^{v-1}u_2, \ldots, u_2^v, \tag{16.2}$$

образующие пространство всех форм

$$c_0 u_1^v + c_1 u_1^{v-1} u_2 + \ldots + c_v u_2^v.$$

Эти мономы, очевидно, линейно преобразуются преобразованиями A, так как A переводит $u_1^r u_2^{v-r}$ в выражение

$$u_1'^r u_2'^{v-r} = (u_1\alpha + u_2\gamma)^r (u_1\beta + u_2\delta)^{v-r},$$

представляющее собой линейную комбинацию мономов (16.2).

Обозначим найденное таким образом представление $\mathfrak{c}_2$ или $\mathfrak{u}_2$ через $\mathfrak{D}_J$, где $J = \dfrac{1}{2}v$ (это обозначение связано с применениями к спектроскопии). В частности, $\mathfrak{D}_0$ представляет собой тождественное представление первой степени (при котором единственный базисный вектор остается инвариантным при всех преобразованиях группы); $\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}$ является представлением $\mathfrak{c}_2$ в самом себе. Представление $\mathfrak{D}_J$ имеет степень $v + 1 = 2J + 1$.

Представление $\mathfrak{D}_1$ в пространстве полинома

$$c_0 u_1^2 + c_1 u_1 u_2 + c_2 u_2^2$$

обладает свойством оставлять инвариантным «дискриминант»

$$c_1^2 - 4c_0 c_2.$$

Вместо c_0, c_1, c_2 введем новые переменные

$$\left.\begin{aligned} x &= -c_0 + c_2 \\ y &= -i(c_0 + c_2) \\ z &= c_1 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x + iy &= 2c_2 \\ x - iy &= -2c_0 \\ z &= c_1 \end{aligned}\right\}, \tag{16.3}$$

тогда
$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + iy)(x - iy) + z^2 = c_1^2 - 4c_0c_2.$$

Следовательно, преобразование $\mathfrak{D}_1$ оставляет инвариантной форму $x^2 + y^2 + z^2$; оно является (комплексным) *вращением*[1].

Чтобы исследовать условия вещественности, заметим, что коэффициенты c_0, c_1, c_2 произвольной квадратичной формы преобразуются так же, как и коэффициенты a_1b_1, $a_1b_2 + a_2b_1$, a_2b_2 специальной формы $(a_1u_1 + a_2u_2)$ $(b_1u_1 + b_2u_2)$. Но при унитарном преобразовании (16.1) u_2, b_1, b_2 преобразуются точно так же, как и $-\overline{a}_2$, $\overline{a}_1$, следовательно, c преобразуются как

$$-a_1\overline{a}_2, \quad a_1\overline{a}_1 - a_2\overline{a}_2, \quad a_2\overline{a}_1.$$

Таким образом, x, y, z [уравнение (16.3)] преобразуются как

$$a_1\overline{a}_2 + a_2\overline{a}_1; \quad i(a_1\overline{a}_2 - a_2\overline{a}_1); \quad a_1\overline{a}_2 - a_2\overline{a}_2.$$

Но эти три числа вещественны и преобразуются в вещественные числа; следовательно, коэффициенты преобразования тоже должны быть вещественными, т. е. *векторы (x, y, z) претерпевают при вращении $\mathfrak{D}_1$ группы u_2 вещественные вращения.*

Вещественную группу вращений пространства мы будем обозначать через $\mathfrak{b}$.

Легко убедиться, что каждое вещественное вращение пространства обязательно встречается в представлении $\mathfrak{D}_1$. Для этого достаточно определить вращения, соответствующие специальным унитарным преобразованиям

$$B(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}, \quad C(\gamma) = \begin{pmatrix} e^{-i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{+i\gamma} \end{pmatrix} \tag{16.4}$$

в представлении $\mathfrak{D}_1$ находим

$$\left.\begin{aligned} B(\beta) &: \begin{cases} x' = x\cos 2\beta + z\sin 2\beta \\ y' = y \\ z' = -x\sin 2\beta + z\cos 2\beta \end{cases} \\ C(\gamma) &: \begin{cases} x' = x\cos 2\gamma - y\sin 2\gamma \\ y' = x\sin 2\gamma + y\cos 2\gamma \\ z' = z. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{16.5}$$

---

[1]Оно не может быть отражением, так как непрерывным образом может быть сведено к тождеству ($\alpha = 1$, $\beta = 0$).

Мы получаем, следовательно, два вращения вокруг осей y и z на углы 2β и 2γ. Но из таких вращений можно составить любое другое вращение. Поворот с углами Эйлера ϑ, φ, ψ является ничем иным, как произведением Z_φ, Y_ϑ, Z_ψ вращений вокруг осей x, y, z на углы φ, ϑ, ψ. Развернутая формула для матрицы преобразования u_2, определяющей вращение с заданными углами Эйлера, получается путем умножения матриц $C(\varphi/2)$, $B(\vartheta/2)$, $C(\psi/2)$, определяющих вращения Z_φ, Y_ϑ, Z_ψ:

$$C(\varphi/2)B(\vartheta/2)C(\psi/2) =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{+\frac{1}{2}i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta/2 & -\sin\vartheta/2 \\ \sin\vartheta/2 & \cos\vartheta/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i\psi} & 0 \\ 0 & e^{+\frac{1}{2}i\psi} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)}\cos\vartheta/2 & -e^{-\frac{1}{2}i(\varphi-\psi)}\sin\vartheta/2 \\ e^{+\frac{1}{2}i(\varphi-\psi)}\sin\vartheta/2 & e^{+\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)}\cos\vartheta/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}. \tag{16.6}$$

Чтобы исследовать точность представления, достаточно выяснить, согласно теореме гомоморфизма (см. § 8), какие преобразования u_2 при представлении $\mathfrak{D}_1$ дают тождества. Эти преобразования должны оставлять инвариантными произведения u_1^2, u_1u_2 и u_2^2, а это имеет место только для двух преобразований

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad -E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, эти два преобразования образуют упоминаемую в теореме гомоморфизма подгруппу $\mathfrak{h}$. Сопряженные системы $\mathfrak{h}$ состоят только из двух преобразований A и $-A$; следовательно, они определяют то же самое вращение. Поэтому представление неточно. Но если мы ограничимся в группе c_2 такой близкой к единичной матрице E областью, которая для каждой сопряженной системы содержит только одно преобразование, то в этом изображении представление оказывается точным и поэтому однозначно обратимым: каждому вращению D с достаточно малым углом соответствует одно единственное унитарное преобразование A, близкое к тождеству. При непрерывном изменении вращения D непрерывно меняется также и соответствующая матрица A [как можно, например, видеть из развернутого уравнения (16.6)]; но после того, как вращение D пробежало замкнутый путь, соответствующая матрица A должна перейти в $-A$, поэтому матрица A является для всей группы $\mathfrak{b}$ двузначной непрерывной функцией вращения D. На этом основании говорят, что группа u_2 образует *двузначное представление* вещественной группы вращений $\mathfrak{b}$.

Замечание. *Однозначность может быть восстановлена, если в векторном пространстве* (u_1, u_2) *различие между двумя векторами* $c_1u_1 + c_2u_2$ *и* $\lambda c_1u_1 + \lambda c_2u_2$, *отличающимися множителем* $\lambda \neq 0$, *считается несущественным. Соответственно мы считаем несущественным различие между линейными преобразованиями с матрицами* A *и* λA. *Тогда, в частности, матрицы* A *и* $-A$, *представляющие одно и то же вращение, не считаются существенно различными. Векторы* λu, *получающиеся из* $u \neq 0$ *умножением на произвольное* λ, *образуют одномерное подпространство, называемое лучом. При вышеописанном понимании представления, когда принимается во внимание не преобразование векторов, а только лучей и поэтому* A *и* λA *не различаются, говорят о лучевом представлении (вместо векторного представления). Если в лучевом представлении элемент* a *группы соответствует матрице* A *и* $b - B$, *то произведению* AB *соответствует не только* AB, *но и* λAB *(с любым* λ*). Но от лучевого представления можно всегда перейти к конечно-многозначному векторному представлению путем умножения матрицы* A *на такой множитель* λ, *чтобы ее детерминант равнялся единице. Множитель* λ *определяется с точностью до корня из единицы и выбирается так, чтобы единичному элементу соответствовала единичная матрица. Тогда при непрерывном представлении непрерывной группы можно однозначно определить множитель* λ *в окрестности единицы с помощью непрерывного продолжения; тогда в этой окрестности произведению* ab *точно соответствует произведение матриц* AB.

Представления $\mathfrak{D}_J$, $(J = 0, \frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, \cdots)$ являются представлениями $\mathfrak{u}_2$, но $\mathfrak{u}_2$ является двузначным представлением $\mathfrak{b}$; следовательно, $\mathfrak{D}_J$ можно рассматривать как максимум двузначное представление $\mathfrak{b}$; $\mathfrak{D}_0$ – тождественное представление; $\mathfrak{D}_{1/2}$ – двузначное представление $\mathfrak{b}$ в u_2; $\mathfrak{D}_1$ – однозначное представление $\mathfrak{b}$ в самом себе.

Ниже будет показано, что представления $\mathfrak{D}_J$ с целочисленным J однозначны относительно $\mathfrak{b}$, представления же с «полуцелым» J двузначны и что шаровые функции l-того порядка (l — целое) при вращении преобразуются согласно $\mathfrak{D}_l$. Неприводимость $\mathfrak{D}_J$ представления $\mathfrak{u}_2$ или $\mathfrak{b}$ мы также докажем позже.

$\mathfrak{D}_J$*-представлению* u_2 *соответствует инвариантная эрмитова форма*

$$\sum_0^v r!(v-r)!\bar{c}_r c_r. \tag{16.7}$$

Доказательство.

Коэффициенты c_r преобразуются точно так же, как и коэффициенты $\binom{v}{r} a_1^{v-r} a_2^r$ специальной формы $(a_1 u_1 + a_2 u_2)^v$, а коэффициент $\overline{c}_r$ преобразуется как $\binom{v}{r} \overline{a}_1^{v-r} \overline{a}_2^r$. Так как $\overline{a}_1 a_1 + \overline{a}_2 a_2$ остается инвариантным, то также остается инвариантным

$$v!(\overline{a}_1 a_1 + \overline{a}_2 a_2)^v = v! \sum_{r=0}^{v} \binom{v}{r} \overline{a}_1^{v-r} a_1^{v-r} \overline{a}_2^r a^r =$$
$$= \sum_{r=0}^{v} r!(v-r)! \binom{v}{r}^2 \overline{a}_1^{v-r} \overline{a}_2^r a_1^{v-r} a_2^r$$

и это выражение преобразуется как (16.7). ■

Этим доказано, что все $\mathfrak{D}_J$-представления $\mathfrak{u}_2$ или $\mathfrak{b}$ унитарны. Векторы

$$\frac{u_1^{v-r} u_2^r}{\sqrt{r!(v-r)!}} \tag{16.8}$$

образуют нормированную ортогональную систему для формы (16.7). Отметим еще, что при вращений $\mathfrak{D}_\gamma$ с углом вращения γ вокруг оси z, при котором по (16.4) u_1 умножается на $e^{-\frac{i\gamma}{2}}$, а u_2 на $e^{-\frac{i\gamma}{2}}$, вектор (16.8) умножается на $e^{\frac{1}{2}i(v-2r)\gamma}$. Кроме того, при повороте $\mathfrak{D}_y$ вокруг оси y на угол π, при котором u_1 и u_2, переходят по (16.4) в $-u_2$ и u_1, произведение $u_1^{v-r} u_2^r$ переходит в $(-1)^{v-r} u_1^r u_2^{v-r}$.

§ 17. Бесконечно малые преобразования и представления группы вращения

В области, близкой к единице, оказывается особенно удобным следующее параметрическое представление вращений. Вращение вокруг (направленной) оси a на угол φ (измеряемый в определенном направлении) представляется вектором длины φ в направлении $\mathfrak{a}$, а ортогональные компоненты этого вектора α_1, α_2, α_3 служат в качестве параметров вращения. Тогда пространством параметров является шар радиуса π, в котором диаметрально противоположные точки поверхности отождествляются. Произведение двух вращений $d_\alpha(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

и $d_\beta(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ является вращением $d_\beta d_\alpha = d_\gamma$, где $\gamma_\nu = \varphi_\nu(\alpha, \beta)$ аналитическая функция α и β, однозначная вблизи нулевой точки и однозначно разрешимая относительно β. При $\beta = 0$, $\gamma = 0$, причем обе функциональные матрицы

$$S_\lambda^\nu(\alpha) = \left(\frac{\partial\gamma_\nu}{\partial\beta_\lambda}\right)_{\beta=0} \quad \text{и} \quad T_\lambda^\nu(\alpha) = \left(\frac{\partial\beta_\nu}{\partial\gamma_\lambda}\right)_{\gamma=\alpha}$$

обратны одна другой

$$ST = E.$$

Требуется определить все (одно- или многозначные) представления группы вращений $\mathfrak{d}$, *при которых каждое вращение* d_α *представляется в области, близкой к единице, линейным преобразованием* D_α, *матрица которого непрерывно-дифференцируемо зависит*[1] *от параметров* α_1, α_2, α_3, *причем для представлений имеет место соотношение*

$$D_\beta D_\alpha = D_\gamma = D_{\varphi(\alpha,\beta)}.$$

Мы применяем здесь метод бесконечно малых преобразований Ли–Картана[2].

Применив к вектору u пространства представлений преобразование D_β, получим вектор $v = D_\beta u$. При $\beta_\nu = 0$ имеем $v = u$. Для бесконечно малого β_ν можно разложить $D_\beta u$, пренебрегая членами выше первого порядка

$$v = D_\beta u = u + \left(\frac{\partial v}{\partial\beta_1}\right)_0 \beta_1 + \left(\frac{\partial v}{\partial\beta_2}\right)_0 \beta_2 + \left(\frac{\partial v}{\partial\beta_3}\right)_0 \beta_3 + \cdots .$$

Величины $\left(\dfrac{\partial v}{\partial\beta_\nu}\right)_0$ линейно зависят от u. Поэтому мы полагаем

$$\left(\frac{\partial v}{\partial\beta_\nu}\right)_0 = I_\nu u \qquad (\nu = 1, 2, 3)$$

и будем называть линейные преобразования I_ν $(\nu = l, 2, 3)$ *бесконечно малыми преобразованиями*, с помощью которых представляются *бесконечно малые вращения* вокруг осей X, Y и Z. Вместо I_1, I_2, I_3 пишут также I_x, I_y, I_z.

---

[1] Требования непрерывности (без дифференцируемости) было бы достаточно, и его можно было бы даже заменить еще более слабым. Этот вопрос не имеет, однако, для нас существенного значения.

[2] Подробное изложение метода и остальные литературные ссылки можно найти в работах H. Weyl, Math. Z., Bd. 23 (1925); Bd. 24 (1924). В них установлены представления весьма общего класса групп, частным случаем которого являются группы вращения и Лоренца.

Будем исходить из фиксированного вектора u_0 в пространстве представлений и примем

$$u = D_\alpha u_0$$

и

$$v = D_\beta u = D_\beta D_\alpha u_0 = D_\gamma u_0.$$

Здесь $\gamma_\nu = \varphi_\nu(\alpha, \beta)$. Дифференцирование последней формулы по β_ν (если после дифференцирования принять $\beta_\nu = 0$) дает

$$I_\lambda u = \left(\frac{\partial v}{\partial \beta_\lambda}\right)_{\beta=0} = \sum_\nu \left(\frac{\partial v}{\partial \gamma_\nu}\right)_{\gamma=\alpha} \left(\frac{\partial \gamma_\nu}{\partial \beta_\lambda}\right)_{\beta=0} = \sum_\nu \frac{\partial u}{\partial \alpha_\nu} S^\nu_\lambda(\alpha).$$

Решая эти линейные уравнения с помощью обратной матрицы T, получим

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha_\nu} = \sum_\sigma I_\sigma u T^\sigma_\nu(\alpha). \tag{17.1}$$

По Ли это выражение является «характеристическим дифференциальным уравнением» представления.

Заметим, что T^σ_ν, зависит только от строения группы вращения, но не от рассматриваемого представления. Так как дифференциальное уравнение (17.1) совместно с начальным условием $u = u_0$ для $\alpha = 0$ целиком определяет величины $u = D_\alpha u_0$, то мы получаем следующее правило:

Представление группы вращений целиком определяется своими бесконечно малыми преобразованиями I_x, I_y, I_z.

Но операции I_x, I_y, I_z не вполне произвольны, а должны удовлетворять «условиям интегрируемости», получающимся из (17.1), если дифференцировать по α_μ и приравнять произведение $\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_\mu \partial \alpha_\nu}$ и $\dfrac{\partial^2}{\partial \alpha_\mu \partial \alpha_\nu}$. После вычислений получаем

$$\sum_\sigma I_\sigma u \left(\frac{\partial T^\sigma_\nu}{\partial \alpha_\mu} - \frac{\partial T^\sigma_\mu}{\partial \alpha_\nu}\right) + \sum_\rho \sum_\sigma I_\rho I_\sigma u (T^\rho_\mu T^\sigma_\nu - T^\rho_\nu T^\sigma_\mu) = 0.$$

Мы применим это соотношение только для $\alpha = 0$.[1] В этом случае T^ρ_μ — единичная матрица и мы получаем

$$-\sum_\sigma I_\sigma u_0 c^\sigma_{\mu\nu} + I_\mu I_\nu u_0 - I_\nu I_\mu u_0 = 0,$$

[1]Впрочем, и для произвольного α после громоздких вычислений мы получим тот же результат.

где для сокращения положено

$$-c^{\sigma}_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial T^{\sigma}_{\nu}}{\partial \alpha_{\mu}} - \frac{\partial T^{\sigma}_{\mu}}{\partial \alpha_{\nu}}\right)_{\alpha=0}. \tag{17.2}$$

Ввиду того, что вектор u_0 совершенно произволен, мы получаем

$$I_{\mu} I_{\nu} - I_{\nu} I_{\mu} = \sum_{\sigma} I_{\sigma} c^{\sigma}_{\mu\nu}. \tag{17.3}$$

Вещественные постоянные $c^{\sigma}_{\mu\nu}$ согласно (17.2) зависят только от рассматриваемой группы; их можно определить, если в качестве пространства представлений выбрать, в частности, пространство линейных функций $\psi(x, y, z) = a_1 x + a_2 y + a_3 z$, в котором оператор I_{ν} задается непосредственно (см. § 6). Следовательно, найденное для этого случая перестановочное соотношение (6.3) должно иметь место для любого представления. Оно имеет вид

$$\left.\begin{aligned} I_x I_y - I_y I_x &= I_z \\ I_y I_z - I_z I_y &= I_x \\ I_z I_x - I_x I_z &= I_y \end{aligned}\right\}. \tag{17.4}$$

Это фундаментальное перестановочное соотношение дает основу для определения всех возможных представлений. Для того чтобы получить их в удобной форме, введем, как в § 6, операторы

$$L_x = iI_x; \quad L_y = iI_y; \quad I_z = iI_z.$$

Далее примем

$$\begin{aligned} L_x + iL_y &= L_p, \\ L_x - iL_y &= L_q. \end{aligned}$$

Перестановочное соотношение (17.4) после вычисления имеет вид[1]

$$\begin{aligned} L_z L_p - L_p L_z &= L_p, \\ L_z L_q - L_q L_z &= -L_q, \\ L_p L_q - L_q L_p &= 2L_z. \end{aligned} \tag{17.5}$$

---

[1]Эта форма перестановочного соотношения удобнее потому, что в два первых уравнения входят только два бесконечно малых первичных преобразования (вместо трех, как раньше). Выражения L_p и L_q получаются, естественным образом, при рассмотрении выражения $TL = L_z L - L L_z$ как линейного преобразования T в пространстве линейных комбинаций $L = \lambda L_x + \mu L_y + \nu L_z$ и отнесении его к главным осям. Собственными векторами являются L_p, L_q и L_z, соответствующие собственные значения 1, -1, 0.

Пусть задано представление группы вращений в векторном пространстве $\mathfrak{R}$ (с конечным числом измерений). В нем, естественно, содержится также и представление той абелевой подгруппы, которая слагается из вращений $(0, 0, \gamma)$ вокруг оси z. Это представление, согласно второму примеру § 10, можно разложить на неприводимые и получить ряд базисных векторов v_M, у которых при вращений появляется множитель $e^{iM\gamma}$ (при однозначном представлении M должно быть целочисленным, но этого может и не быть, если представление однозначно только вблизи единицы). Мы имеем соотношение

$$L_z v_M i I_z v_M = i\Big(\frac{\partial}{\partial\gamma} D(0, 0, \gamma) v_M\Big)_{\gamma=0} = i\Big(\frac{\partial}{\partial\gamma} e^{-iM\gamma} v_M\Big)_{\gamma=0} = M v_M.$$

Поэтому векторы v_M являются собственными векторами оператора L_z для собственного значения M. Следовательно, мы можем их также получить путем преобразования оператора L к главным осям.

Лемма. *Если вектор v относится к собственному значению M оператора L_z, то $L_p v$ относится к собственному значению $(M+1)$, а $L_q v$ — к собственному значению $(M-1)$ оператора L_z.*

Доказательство.

Из $L_z v = M v$ следует

$$L_z L_p v = (L_p L_z + L_p) v = L_p M v + L_p v = (M+1) L_p v$$

и соответственно

$$L_z L_q v = (M-1) L_q v.$$

Этим и доказывается лемма. ■

Отыщем теперь в пространстве $\mathfrak{R}$ вектор v_J, соответствующий наибольшему возможному значению оператора L_z; (или в случае мнимых собственных значений относящийся к собственному значению с наибольшей вещественной частью). Тогда $L_p v_J$ относится к собственному значению $J+1$. Но так как J является максимальным возможным значением, то $L_p v_J = 0$ должно быть равно нулю. Далее имеем

$$\begin{array}{ll} v_{J-1} = L_q v_J & \text{относится к собственному значению } J-1, \\ v_{J-2} = L_q v_{J-1} & \text{относится к собственному значению } J-2. \end{array}$$

Ряд можно продолжить до нулевого вектора, который, в конце концов, должен появиться, так как в пространстве $\mathfrak{R}$ может существовать только конечное число собственных значений.

Легко показать, что при М $= J, J-1, J-2, \dots$

$$L_p v_M = \rho_M v_{M+1}, \tag{17.6}$$

где ρ_M — целое число. Эта формула, конечно, правильна для значений больших, чем $M = J$, причем $\rho_J = 0$, так как $L_p v_J = 0$. Мы покажем, что она справедлива при $M = \mu - 1$, если она выполняется при $M = \mu$. Действительно,

$$L_\rho v_{\mu-1} = L_p L_q v_\mu = (I_q I_p + 2I_z) v_\mu = L_q \rho_\mu v_{\mu+1} + 2\mu v_\mu = (\rho_\mu + 2\mu) v_\mu.$$

Этим и доказано (17.6).

Для ρ_M мы получаем рекурсионное равенство

$$\rho_{\mu-1} = \rho_\mu + 2\mu; \quad \rho_J = 0.$$

Решение этого равенства имеет вид

$$\rho_M = J(J+1) - M(M+1). \tag{17.7}$$

Должен существовать один нулевой $v_M = 0$, тогда как следующий член $v_{M+1} \neq 0$, при этом должно иметь место $\rho M = 0$. Но отсюда следует $M = -(J+1)$, так как уравнение

$$J(J+1) - x(x+1) = 0$$

имеет только корни $x = J$ и $x = -(J+1)$, а значение $M = J$ не может иметь места при $v_J \neq 0$. Таким образом, первым нулевым вектором в ряду $v_J, v_{J-1}, v_{J-2}, \ldots$, будет $v_{-(J+1)}$. Число членов ряда $v_J, v_{J-1}, \ldots, v_{-J}$ равно $2J+1$, следовательно, $2J+1$ является *целым числом,* а J *половиной целого числа.*

Возможные значения J

$$J = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ 1\frac{1}{2},\ \ldots$$

Чтобы достичь наибольшей симметричности формул, можно снабдить v_M численным множителем и принять

$$L_q v_M = \sqrt{J(J+1) - M(M-1)} \cdot v_{M-1},$$

тогда имеем

$$\left.\begin{aligned} L_p v_M &= \sqrt{J(J+1) - M(M+1)} \cdot v_{M+1} = \\ &= \sqrt{(J-M)(J+M+1)} \cdot v_{M+1}, \\ L_q v_M &= \sqrt{J(J+1) - M(M-1)} \cdot v_{M-1} = \\ &= \sqrt{(J+M)(J-M+1)} \cdot v_{M-1}, \\ L_z v_M &= M v_M. \end{aligned}\right\} \tag{17.8}$$

Подпространство $(v_J, v_{J-1}, \ldots, v_{-J})$ нашего векторного пространства $\mathfrak{R}$ преобразуется в самого себя операциями L_p, L_q, L_z, а следовательно, и бесконечно малыми вращениями I_x, I_y, I_z. Отсюда следует, что это подпространство преобразуется в самого себя также всеми преобразованиями представления группы вращений, т. е. ***векторы** $v_J, v_{J-1}, \ldots, v_{-J}$ **определяют инвариантное подпространство** $\mathfrak{R}_{2J+1}$*.

Преобразования этого подпространства образуют представление группы вращений, полностью определяемое уравнением (17.8). В пространстве $\mathfrak{R}_{2J+1}$ оператор L_z имеет простые собственные значения $M = J, J-1, \ldots, -J$ с собственными векторами v_M. Отметим еще, что все векторы пространства $\mathfrak{R}_{2J+1}$ являются собственными векторами оператора

$$\mathfrak{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \frac{1}{2}(L_pL_q + L_qL_p) + L_z^2.$$

Из (17.8) после простых вычислений получаем

$$\mathfrak{L}^2 v_M = J(J+1)v_M. \tag{17.9}$$

Пространство $\mathfrak{R}_{2J+1}$ неприводимо. Действительно, если $\mathfrak{R}'$ инвариантное подпространство $\mathfrak{R}_{2J+1}$ и v' собственный вектор L_z в пространстве $\mathfrak{R}'$, то v' должно совпадать с одним из векторов $v_J, \ldots, v_{-J}$ с точностью до множителя (так как в $\mathfrak{R}_{2J+1}$ не содержится других собственных векторов L_z). Преобразования L_q и L_p по (17.8) образуют из $v' = v_M$ все остальные v_M $(M = J, J-1, \ldots, -J)$. Поэтому все эти v_M принадлежат к $\mathfrak{R}'$, и $\mathfrak{R}'$ является всем пространством $\mathfrak{R}_{2J+1}$, что и требовалось доказать.

***Определяемое формулами (17.8) представление степени** $2J+1$ **эквивалентно найденному в предыдущем параграфе представлению, обозначенному через** $\mathfrak{D}_J$.*

Действительно, в пространстве $(\ldots, u_1^{v-r}u_2^r, \ldots)$ представления $\mathfrak{D}_J$ базисные векторы $u_1^{v-r}u_2^r$ при вращений $(0, 0, \gamma)$ умножаются на $e^{iM\gamma} = e^{\frac{1}{2}i(v-2r)}$, а следовательно, значения $M = r - \frac{1}{2}v$

[redacted]

Величины v_M пространства $\mathfrak{R}_{2J+1}$ должны совпадать с произведениями $u_1^{J+M}\,u_2^{J-M}$ представления $\mathfrak{D}_J$ с точностью до численного множителя. Вычисляя численный множитель, получим

$$v_M = \frac{u_1^{J+M}\,u_2^{J-M}}{\sqrt{(J+M)!(J-M)!}}. \tag{17.10}$$

Эти v образуют одновременно, согласно § 16, нормированную ортогональную систему.

Совершенно таким же образом доказываем, что, когда J равно целому числу l, представление $\mathfrak{D}_l$, определенное формулой (17.8), совпадает с представлением, выраженным с помощью шаровых функций l-го порядка $Y_l^{(m)}$. В самом деле, число последних равно $2l+1$ и поэтому наибольшее собственное значение оператора L_z, $m = l$. Итак, *шаровые функции* $Y_l^{(m)}$ *преобразуются согласно неприводимому представлению* $\mathfrak{D}_l$, т. е. мы можем выбрать нормирующий множитель шаровых функций $Y_l^{(m)}$ таким образом, чтобы для них точно выполнялись уравнения (17.8). Отсюда также следует, что $\mathfrak{D}_l$ является однозначным представлением[1]. Например, функции $rY_1^{(1)} = -(x+iy)$, $rY_1^{(0)} = \sqrt{2}z$, $rY_1^{(-1)} = x - iy$ преобразуются по представлению $\mathfrak{D}_1$.

Наконец, докажем следующее:

Каждое неприводимое представление эквивалентно одному из представлений $\mathfrak{D}_J$, *определяемых в формуле (17.8)*. Действительно, пространство $\mathfrak{R}_{2J+1}$, построенное в пространстве представлений, в случае неприводимости должно совпадать со всем пространством.

Вышеприведенное исследование дает возможность в каждом случае найти разложение любого представления $\mathfrak{D}$ на неприводимые $\mathfrak{D}_J$. Для этой цели надо только установить в рассматриваемом пространстве собственные векторы оператора L_z и распределить соответствующие собственные значения по их величине. Если J наибольшее входящее сюда целое или половинное собственное значение, то в $\mathfrak{D}$ содержится представление $\mathfrak{D}_J$, в пространстве которого по одному разу содержатся собственные значения $J, J-1, \ldots, -J$. Среди оставшихся собственных значений мы ищем наибольшее значение J', выделяем представление $\mathfrak{D}_{J'}$ и т. д., пока не будут размещены все собственные значения.

[1] Для нецелых значений J представление $\mathfrak{D}_J$ неоднозначно, так как при повороте $(0, 0, \gamma)$ вектор v_J умножается на $e^{-iJ\gamma}$, что при $\gamma = 2\pi$ и $J =$ целое $+ \frac{1}{2}$ дает -1.

§ 18. Примеры и применения

1. Приведение произведения представлений группы вращений $\mathfrak{D}_j \times \mathfrak{D}_{j'}$

Пространство представления $\mathfrak{D}_j$ обозначим через $(u_j, \ldots, u_{-j})$, а пространство представления $\mathfrak{D}_{j'}$ — через $(v_{j'}, \ldots, v_{-j'})$. Базисными векторами представления $\mathfrak{D}_j \times \mathfrak{D}_{j'}$ являются при этом все произведения $u_m v_{m'}$. Произведение $u_m v_{m'}$ при вращении $0, 0, \gamma$ вокруг оси z умножается на $e^{-i(m+m')\gamma}$ и поэтому оно относится к собственному значению $M = m + m'$ оператора L_z. Возможные значения M выписаны в следующей таблице

$$\begin{array}{ll}
(m = j) & M = j + j', j + j' - 1, \ldots, j - j'; \\
(m = j - 1) & M = j + j' - 1, j + j' - 2, \ldots, j - j' - 1, \\
(m = j - 2) & M = j + j' - 2, \ldots, j - j' - 2, \\
\ldots & \ldots \\
(m = -j) & M = -j + j', \ldots, -j - j'.
\end{array}$$

Мы можем принять $j \geqslant j'$. При этом мы видим, что наибольшее значение $\mathrm{M} = j + j'$ появляется *один* раз, соседнее меньшее $M = j + j' - 1$ *два* раза и т. д. все время с приращением на единицу до значения $M = j - j'$, соответственно появляющегося $(2j' + 1)$ раз. Все меньшие значения M до $M = -j + j'$ появляются точно таким же образом, т. е. $(2j' + 1)$ раз. На отрицательное значение M в дальнейшем мы не будем обращать внимания.

По правилу § 17 следует: представление $\mathfrak{D}_{j+j'}$, отвечающее наибольшему собственному значению, содержится в рассматриваемом представлении $\mathfrak{D}_j \times \mathfrak{D}_{j'}$ *один* раз, его пространство представлений заключает по одному разу все собственные значения $M = j + j', \ldots, -(j + j')$. После их вычеркивания остается наибольшее значение $M = j + j' - 1$, которое теперь входит один раз. Следовательно, представление $\mathfrak{D}_{j+j'-1}$ тоже появляется один раз [собственные значения $j + j' - 1, \; j + j' - 2, \ldots, -(j + j' - 1)$]. Продолжая, получим, в конце концов, представление $\mathfrak{D}_{j-j'}$, охватывающее все оставшиеся элементы. Поэтому мы имеем

$$\mathfrak{D}_j \times \mathfrak{D}_{j'} = \mathfrak{D}_{j+j'} + \mathfrak{D}_{j+j'-1} + \cdots + \mathfrak{D}_{|j-j'|}. \tag{18.1}$$

Введение «абсолютных значений» $j - j'$ показывает, что формула симметрична относительно j и j' и поэтому имеет место также и для $j' > j$. Например, имеем

$$\begin{aligned} &\mathfrak{D}_0 \times \mathfrak{D}_j = \mathfrak{D}_j, \\ &\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_0, \\ &\mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_{\frac{1}{2}} = \mathfrak{D}_{1\frac{1}{2}} + \mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Для того чтобы осуществить приведение представления $\mathfrak{D}_j \times \mathfrak{D}_{j'}$ в явном виде, мы должны действительно указать в пространстве произведений $u_m v_{m'}$ такие векторы w_M, которые преобразуются по $\mathfrak{D}_J$ ($J = j + j'$, $j + j' - 1, \ldots$). В этом случае мы пишем U_m, $V_{m'}$, W_M^J вместо u_m, $v_{m'}$, w_M и по (17.10) полагаем

$$U_m = \frac{u_1^{j+m} u_2^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}; \quad V_{m'} = \frac{v_1^{j'+m'} v_2^{j'-m'}}{\sqrt{(j'+m')!(j'-m')!}}.$$

Теперь построим для $J = j + j' - \lambda$ ($\lambda = 0, 1, 2, \ldots$) выражение

$$A = (u_1 v_2 - u_2 v_1)^\lambda (u_1 x_1 + u_2 x_2)^{2j-\lambda} (v_1 x_1 + v_2 x_2)^{2j'-\lambda}$$

и докажем, что коэффициенты

$$X_M^J = \frac{x_1^{J+M} x_2^{J-M}}{\sqrt{(J+M)!(J-M)!}}$$

в A для $M = J$, $J - 1, \ldots, -J$ представляют собою искомые величины W_J^M.

Доказательство.

Если x_1, x_2 преобразуются контрагредиентно к u_1, u_2 и v_1, v_2, то выражение A инвариантно и поэтому коэффициенты W_J^M преобразуются контрагредиентно к X_M^J. Но точно так же при преобразовании U_M^J, как $u_1^{J+M} u_2^{J-M} : \sqrt{(J+M)!(J-M)!}$ выражение $(u_1 x_1 + u_2 x_2)^{2J} = (2J)! \sum U_M^J X_M^J$ остается инвариантным, следовательно, U_M^J также преобразуется контрагредиентно к X_M^J. Отсюда следует, что W_M^J, как и U_M^J, преобразуются по $\mathfrak{D}_J$, что и требовалось доказать. ■

Вычисления A проводятся таким образом:

$$(u_1 v_2 - u_2 v_1)^\lambda = \sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^\nu \binom{\lambda}{\nu} (u_1 v_2)^{\lambda-\nu} (u_2 v_1)^\nu,$$

$$A = \sum_m \sum_{m'} \sqrt{(j+m)!(j-m)!(j'+m')!(j'-m')!(J+M)!(J-M)!}$$

$$\sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^\nu \binom{\lambda}{\nu} \binom{2j-\lambda}{j-m-\nu} \binom{2j'-\lambda}{j'+m'-\nu} U_m V_{m'} X^J_{m+m'} =$$

$$= \lambda!(2j-\lambda)!(2j'-\lambda)! \sum_m \sum_{m'} c^J_{mm'} U_m V_{m'} X^J_{m+m'},$$

$$c^J_{mm'} = \sum_\nu (-1)^\nu \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j'+m')!(j'-m')!(J+M)!(J-M)!}}{(j-m-\nu)!(j+m-\lambda+\nu)!(j'+m'-\nu)!(j'-m'-\lambda+\nu)!\nu!(\lambda-\nu)!}$$

$$[M = m + m'].[1] \tag{18.2}$$

Поэтому

$$W^J_M = \rho_J \sum_{m+m'=M} c^J_{mm'} U_m V_{m'}, \tag{18.3}$$

где ρ_J — численный множитель, который, впрочем, может быть выбран произвольно, например, так, чтобы величины W^J_M образовывали нормированную ортогональную систему в унитарном векторном пространстве $U_M V_{m'}$.[2] Если мы теперь положим $b^J_{mm'} = \rho_J c^J_{mm'}$, то $b^J_{mm'}$ с $m + m' = M$ для каждого фиксированного значения M образует унитарную матрицу B_M, причем J играют роль номеров столбцов, а m или m' — номеров строк. Транспонированная матрица B_M^{-1} по формуле (7.5) одновременно является адъюнгированной матрицей $\widetilde{B}_M$, т. е.

[1] Дробь справа обращается в нуль, если одно из чисел $(j + m - \nu)$ и т. д. в знаменателе отрицательно. Кроме того, $0! = 1$.

[2] Так как два вектора W_M, относящиеся к различным значениям J, ортогональны друг к другу, то отсюда следует, что каждые два неэквивалентных неприводимых подпространства пространства унитарных представлений $\mathfrak{D}_j \times \mathfrak{D}_{j'}$ строго ортогональны друг к другу, и перпендикулярная проекция одного пространства в другое образует операторный гомоморфизм, имеющий только нулевое изображение. Ортогональность двух W_M с равным J, но различными M, получается таким же образом с помощью представлений подгруппы вращений вокруг оси Z.

уравнения (18.2) могут быть решены относительно $U_m V_{m'}$ следующим образом:

$$U_m V_{m'} = \sum_J \rho_J c^J_{mm'} W^J_{m+m'}. \tag{18.4}$$

Значение чисел ρ_J нас не интересует. Уравнение (18.4) известно под названием ряда *Клебша–Гордона*. Числа $c^J_{mm'}$ определяются целиком из (18.2). В частном случае $J = j + j'$ $(\lambda = 0)$ уравнение (18.2) упрощается, сводясь к

$$c^J_{mm'} = \sqrt{\frac{(J+M)!(J-M)!}{(j+m)!(j-m)!(j'+m')!(j'-m')!}}$$

и точно так же в частном случае

$$J = j - j' \ (\lambda = 2j';\ j \geqslant j')$$

$$c^J_{mm'} = (-1)^{j'+m'} \sqrt{\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j'+m')!(j'-m')!(J+M)!(J-M)!}}.$$

В нижеприведенной таблице собраны значения $c^J_{mm'}$ для простейших случаев.

2. Применение соотношения (18.1)

Состояние f-электронной системы в силовом поле с центральной симметрией описывается некоторой функцией $\psi(q_1, q_2, \ldots, q_f)$. Линейная совокупность собственных функций каждого уровня энергии при вращений линейно преобразуется в самое себя; следовательно, она распадается на отдельные части, преобразующиеся по представлению $\mathfrak{D}_J$. В этом случае обычно пишут L вместо J и вследствие однозначности представления рассматривают только целые значения L.

В нашем случае оператором бесконечно малого вращения всех электронов вокруг оси z является

$$I_z = -\sum_1^f \Big(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\Big).$$

Поэтому $i\hbar I_z = \hbar L_z$ является оператором для z-компоненты момента импульса $\hbar\mathfrak{L}$. Для неприводимой системы собственных функций, преобразующейся по $\mathfrak{D}_J$, оператор $\mathfrak{L}^2$ по § 17 имеет собственное значение $L(L+1)$ и L_z собственные значения $M = L, L-1, \ldots, -L$. В векторной схеме для момента импульса атома вводят вектор длиной $\hbar L$,

$j''=\frac{1}{2}$			$j'=1$			
J	$m'=1/2$	$m'=-1/2$	J	$m'=1$	$m'=0$	$m'=-1$
$j+1/2$	$\sqrt{j+m+1}$	$\sqrt{j-m+1}$	$j+1$	$\sqrt{\frac{(j+m+2)(j+m+1)}{2}}$	$\sqrt{(j+m+1)(j-m+1)}$	$\sqrt{\frac{(j-m+2)(j-m+1)}{2}}$
$j-1/2$	$-\sqrt{j-m}$	$\sqrt{j+m}$	j	$-\sqrt{2(j+m+1)(j-m)}$	$+2m$	$\sqrt{2(j+m)(j-m+1)}$
			$j-1$	$\sqrt{\frac{(j-m)(j-m-1)}{2}}$	$-\sqrt{(j+m)(j-m)}$	$\sqrt{\frac{(j+m)(j+m-1)}{2}}$

Таблица 2

z-компонента которого принимает значения $\hbar M$ ($M = L, \ldots, -L$), совершенно аналогично одноэлектронной задаче (см. § 6). Мы говорим о S-, P-, D-, F- и т. д. термах атома (по аналогии с s-, p-, d- f-, … и т. д. термами электрона) для $L = 0, 1, 2, 3$ и т. д. и называем L *азимутальным или угловым квантовым числом.*

При непрерывном изменении потенциала сил (например, при уменьшении взаимного отталкивания электронов) квантовое число L не может меняться, так как представление меняется непрерывно, и поэтому собственные значения $\mathfrak{L}^2$ не могут изменяться скачкообразно. Можно сначала установить возможные значения L, пренебрегая силами взаимодействия между электронами или, еще лучше, заменяя взаимодействие соответственно выбранным экранированием ядра (см. § 4), и потом уже постепенно ввести это взаимодействие.

Возьмем, например, два электрона. Состояние каждого из них описывается волновой функцией $\psi_{nl}^{(m)}$, которой по § 4 соответствует определенный символ терма ns или np, nd и т. д., в зависимости от значения l. Если бы электроны не отталкивали друг друга, то волновой функцией всей системы являлось бы произведение $\psi_{nl}^{(m)}(q_1)\psi_{n'l'}^{(m')}(q_2)$, преобразующееся при вращении по $\mathfrak{D}_l \times \mathfrak{D}_{l'}$. Разложение представления по (18.1) на неприводимые дает ряд частичных систем, преобразующихся по $\mathfrak{D}_L$ $(L = l + l', l + l' - 1 \ldots, |l - l'|)$. Если мы теперь введем взаимодействие, то по § 8 атомные термы, относящиеся к различным значениям L, должны разделиться; но $(2L + 1)$-кратное вырождение отдельных термов не исчезает и представление $\mathfrak{D}_L$ остается в силе.

В векторной схеме два вектора длины $\hbar l$ и $\hbar l'$, изображающие моменты импульса обоих электронов, складываются таким образом, что длина $\hbar L$ равнодействующей или равна $\hbar(l+l')$ или меньше на целое число $\hbar$; наименьшее значение равнодействующей равно $\hbar(l-l')$, как и должно быть по (18.1).

Например, если $l = l' = 1$ (два p-электрона) и уровни энергии электронов без учета взаимного отталкивания равны E_1 и E_2, то соединение их дает $E_1 + E_2$. Вследствие отталкивания этот терм должен распасться на термы с $l = 0, 1, 2$, следовательно, на один S-, один P- и один D-терм. Совершенно так же поступают во всех остальных случаях.

Если мы имеем более двух электронов, то формула (18.1) просто применяется несколько раз. Например, для одного s-, одного p- и одного d-электрона вычисление проводится так;

$$\mathfrak{D}_0 \times \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 = (\mathfrak{D}_0 \times \mathfrak{D}_1) \times \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_1 \times \mathfrak{D}_2 = \mathfrak{D}_3 + \mathfrak{D}_2 + \mathfrak{D}_1;$$

поэтому должны возникнуть один F-, один D- и один P-терм. Полный символ терма состоит из символов отдельных электронов и символа всего терма; например, для системы из трех электронов, два из которых находятся в состоянии $1s$ и один в состоянии $2p$, возникающий терм обязательно является Р-термом $1s^2 2pP$.

По определению, состояние S всегда обладает шаровой симметрией, волновая функция остается инвариантной при любом вращении. Прибавление s-электрона не меняет возможных значений L, так как $\mathfrak{D}_l \times \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}_l$.

Подобного рода исследование ведет к строгому обоснованию правил, выведенных в § 4 приближенным путем для термов таких атомов, как Li, Na, K, состоящих из внешнего электрона и обладающих шаровой симметрией остатка. Ранее мы заменили взаимодействие между внешними электронами и электронами остатка простым экранированием поля ядра и для возможных значений момента импульса внешнего электрона нашли $l = 0, 1, 2, \ldots$. Если мы теперь примем, что в отсутствии внешнего электрона атомный остаток обладает шаровой симметрией ($L' = 0$), то для всей системы (с экранированием вместо взаимодействия) получаем значения $L = l$. При введении возмущения (взаимодействие минус экранирование), согласно вышеизложенному, расщепления не появляется, но каждый терм остается $(2l+1)$ раз вырожденным и преобразуется, как и ранее, по $\mathfrak{D}_l$. В следующем параграфе мы увидим, что правило отбора $l \to l \pm 1$, объясняющее распределение термов в серии, также является точным.

Сериальный характер линейных спектров не ограничивается водородоподобными спектрами (как-то: спектры Li, Na, K и т. д.). Если в любом атоме квантовые числа n, l всех электронов, кроме одного, неизменны, а главное квантовое число последнего электрона пробегает ряд возможных значений $n = l+1,\ l+2,\ l+3,\ \ldots$, то для каждого возможного значения общего азимутального квантового числа L возникает серия термов с возрастающими значениями энергии, верхней границей которых является энергия того ионного состояния, которое получается при полном удалении последнего электрона. Примером такой серии для атома He является «главная серия» $1s\,np\,P\,(n = 2,\ 3,\ 4,$ и т. д.$)$, границей которой является энергия иона He^+ в основном состоянии (см. рис. 6). Точно так же для углерода C, между прочим, возможны и серии

$$1s^2\,2s^2\,2p\,ns\,P, \quad 1s^2\,2s^2\,2p\,np\,S, \quad 1s^2\,2s^2\,2p\,np\,P, \quad 1s^2\,2s^2\,2p\,np\,D,$$

общей границей которых является ионный терм $1s^2\,2s^2\,2p\,P$. Такие серии могут быть большей частью представлены с помощью эмпирической формулы вида

$$E_n = E_\infty - \frac{1}{(n-\varkappa)^2},$$

где E_∞ — энергия иона и где $\varkappa$ при увеличении n быстро достигает постоянного граничного значения. Вопрос о том, какие серии могут комбинировать между собой (и давать серии спектральных линий), решают правила отбора, которые мы выведем в следующем параграфе.

3. Характер отражения

Поле отдельного ядра остается инвариантным не только при пространственных вращениях, но и при отражениях. Все отражения можно получить из вращений и «отражения от начальной точки»

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z,$$

коммутирующего со всеми вращениями. Тождественное преобразование совместно с этим отражением образует абелеву группу второго порядка. Вследствие вышеотмеченной коммутируемости эта абелева группа может быть разложена на неприводимые одновременно с группой вращений, т. е. базисные векторы представления (в частности, собственные функции какого-либо уровня энергии) всегда могут быть выбраны таким образом, что при вращений они преобразуются по $\mathfrak{D}_l$ и одновременно при отражении S умножаются на $w = \pm 1$. Этот множитель w называется *характером отражения.*

В частности, при одноэлектронной задаче шаровые функции l-того порядка имеют характер отражения, равный $(-1)^l$.

Если внести f электронов с азимутальными квантовыми числами $l_1, l_2, \ldots, l_f$ в поле с центральной симметрией и пренебречь их взаимодействием, то собственные функции сведутся к произведению

$$\psi = \psi_1(q_1)\psi_2(q_2)\cdots\psi_f(q_f),$$

с характером отражения

$$w = (-1)^{l_1+l_2+\cdots+l_f}. \tag{18.5}$$

Этот характер сохраняется и при учете взаимодействия, хотя собственные функции не являются более произведениями $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_f$. Соответствующий терм называется *четным* или *нечетным* в зависимости от того, является ли $w = +1$ или $w = -1$. Например, из четырех вышеприведенных серий углерода две первых относятся к нечетным, две вторых — к четным термам. Мы скоро увидим, какое следствие получается отсюда для спектров.

§ 19. Правила отбора и интенсивности

Докажем сначала две вспомогательные теоремы из теории групп.

Первая вспомогательная теорема. *Пусть два представления $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$ группы $\mathfrak{G}$ в пространствах $\mathfrak{R} = (u_1, \ldots, u_n)$ и $\mathfrak{R}' = (v_1, \ldots, v_n)$ определяются совершенно одинаковыми формулами*

$$au_\mu = \sum_\lambda u_\lambda \alpha_{\lambda\mu},$$

$$av_\mu = \sum_\lambda \alpha_{\lambda\mu},$$

с той разницей, что векторы u_μ образуют линейно-независимый базис для $\mathfrak{R}$, тогда как v_μ линейно-зависимы. Представление $\mathfrak{D}$ целиком приводимо

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 + \cdots + \mathfrak{D}_k. \tag{19.1}$$

Тогда $\mathfrak{D}'$ также целиком приводимо и разложение $\mathfrak{D}'$ получается вычеркиванием некоторых представлений в правой части формулы (19.1).

Доказательство.

Если сопоставить каждому вектору $u = \sum\limits_\lambda c_\lambda u_\lambda$ вектор $v = \sum\limits_\lambda c_\lambda v_\lambda$, то сумме двух векторов также будет соответствовать сумма, а произведению au — произведение av; таким образом, это соответствие является операторным гомоморфизмом. Следовательно, по теореме 4 § 11, имеем

$$\mathfrak{R}' \cong \mathfrak{r}_1' + \dots + \mathfrak{r}_h',$$

где $\mathfrak{r}'$ — некоторое неприводимое подпространство, входящее в разложение $\mathfrak{R}$. ■

В первую очередь мы применим эту теорему к произведению представлений. Пусть имеются некоторые величины $U_j^{(m)}$ и $V_{j'}^{(m')}$ (собственные функции или что-либо другое), которые преобразуются по $\mathfrak{D}_j$ и $\mathfrak{D}_{j'}$, и мы хотим знать, как будет преобразовываться произведение $U_j^{(m)} V_{j'}^{(m')}$. Если мы заменим U, V таким же количеством независимых переменных u, v, то произведения $u_j^{(m)} v_{j'}^{(m')}$ будут преобразовываться по $\mathfrak{D}_j \times \mathfrak{D}_{j'} = \sum\limits_J \mathfrak{D}_J$; $J = j + j', \dots, |j - j'|$. Если мы опять заменим в этом преобразовании u, v через U, V, то оно сохраняет свою форму, но произведения могут оказаться линейно-зависимыми. Поэтому, согласно нашей вспомогательной теореме, они преобразуются по представлению $\sum \mathfrak{D}_J$, в которое входят *некоторые* из возможных значений $J = j + j', \dots, |j - j'|$ (но возможно и все).

Вторая вспомогательная теорема. *Если замкнутая ортогональная система*

$$\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_1^{(h_1)}; \quad \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_2^{(h_2)}; \dots \tag{19.2}$$

определена так, что при каждом λ совокупность функций $\varphi_\lambda^{(1)}, \dots, \varphi_\lambda^{(h_\lambda)}$ при заданной группе преобразований $\mathfrak{G}$ (например, при пространственных вращениях) претерпевает неприводимое представление $\mathfrak{D}_\lambda$ и, если совокупность функций $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(h)}$, претерпевающая при той же группе соответствующее целиком приводимое представление $\mathfrak{D}$, разлагается по ортогональной системе (19.2), то в разложение входят только такие $\varphi_\lambda^{(\nu)}$ представления, $\mathfrak{D}_\lambda$ которых содержатся в качестве составных частей в представлении $\mathfrak{D}$.

Доказательство.

Если ψ — линейная комбинация функций $\psi^{(1)}$ – $\psi^{(h)}$, то

$$\psi \sim \sum_1^{h_1} a_{1\nu}\varphi_1^{(\nu)} + \sum_1^{h_2} a_{2\nu}\varphi_2^{(\nu)} + \dots = \omega_1 + \omega_2 + \dots . \tag{19.3}$$

Так как ψ однозначно определяет все компоненты $a_{\lambda\nu}$, то, следовательно, ω_1, ω_2 и т. д. также однозначно определяются. Соответствие $\psi \to \omega_\lambda$

является линейным отображением совокупности $(\psi) = (\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(h)})$ в совокупности $(\psi_\lambda^{(1)}, \ldots, \psi_\lambda^{(h_\lambda)})$, так как сумма соответствует сумме, и произведение $\alpha\psi$ соответствует произведению $\alpha\omega_\lambda$. Но к (19.3) можно далее применить преобразование t группы $\mathfrak{G}$ и получить

$$t\psi = t\omega_1 + t\omega_2 + \cdots,$$

где $t\omega_\lambda$ является опять линейной комбинацией той же формы, что и ω_λ. Следовательно, в нашем отображении $t\psi$ соответствует $t\omega_\lambda$, т. е. отображение является операторным гомоморфизмом совокупности (ψ) в совокупности (ω_λ). Эта совокупность (ω_λ) либо состоит из нуля, либо тождественна со всей неприводимой совокупностью $(\varphi_\lambda^{(1)}, \ldots, \varphi_\lambda^{(h_\lambda)})$ и преобразуется по $\mathfrak{D}_\lambda$. Согласно теоремам § 11 в последнем случае $\mathfrak{D}_\lambda$ должно являться составной частью разложения представления $\mathfrak{D}$, что и требовалось доказать. ■

Дополнение ко второй вспомогательной теореме. *Будем заменять функцию ψ последовательно функциями $\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(h)}$ и соответственно этому снабдим коэффициенты $a_{1\nu}, a_{2\nu}, \ldots$ верхним индексом $\mu = (1, 2, 3, \ldots, h)$. Тогда коэффициент $a_{1\nu}^{(\mu)}$ (и точно так же $a_{2\nu}^{(\mu)}$ и т. д.) однозначно определяется теорией групп с точностью до общего множителя ρ_1, если представления $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}_1$ известны, в предположении, что в разложение представления $\mathfrak{D}$ не входит двух эквивалентных неприводимых составных частей.*

Доказательство.

Согласно ранее приведенному доказательству, $a_{1\nu}^{(\mu)}$ образует матрицу операторно-гомоморфного отображения совокупности $(\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(h)})$ в совокупности $(\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(h_1)})$. Выберем функции $(\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(h)})$ таким образом, чтобы неэквивалентные неприводимые подсовокупности сводились к $\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(a)}, \psi^{(a+1)}, \ldots, \psi^{(a+b)}, \ldots$. Если теперь не все $a_{1\nu}^{(\mu)}$ равны нулю, то $(\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(h_1)})$ должно быть эквивалентно одной из подсовокупностей ψ, скажем $(\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(a)})$. При соответствующем выборе $(\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(a)})$ обе эквивалентные совокупности не только эквивалентны, но и одинаково преобразуются. Операторный гомоморфизм совокупности $(\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(h)})$ также гомоморфно отображает подсовокупности $(\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(a)})$ и т. д. Тогда по лемме Шура подпространство $(\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(a)})$ отображается с помощью матрицы λE, тогда как все остальные неэквивалентные подсовокупности отображаются нулем. Поэтому матрица отображения однозначно определена с точностью до множителя λ. Это имеет место и тогда, если мы перейдем к другому базису совокупности $(\psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(h)})$. ■

Из второй вспомогательной теоремы вытекают правила отбора. В § 4 и § 6 мы получили правила отбора для одного электрона $l \to l \pm 1$ в случае поля с центральной симметрией, $m \to m$ или $m \pm 1$ для поля с осевой симметрией.

Правила для m сохраняются также и в случае многих электронов. Как обстоит дело с правилом для l, когда l заменено на L?

Согласно § 3, интенсивности возникающих линий зависят от коэффициентов a, b, c в разложениях

$$\left.\begin{aligned} X\psi_L^{(m)} &= \sum \psi_{L'}^{(m')} a_{L'L}^{(m'm)}, \\ Y\psi_L^{(m)} &= \sum \psi_{L'}^{(m')} b_{L'L}^{(m'm)}, \\ Z\psi_L^{(m)} &= \sum \psi_{L'}^{(m')} c_{L'L}^{(m'm)}. \end{aligned}\right\} \tag{19.4}$$

Величины слева или, точнее, их линейные комбинации

$$-(X+iY)\psi_L^{(m)}, \quad (X-iY)\psi_L^{(m)}, \quad \sqrt{2}Z\psi_L^{(m)} \tag{19.5}$$

согласно обозначениям на стр. 100 являются произведениями $V_1^{(-1)}U_L^{(m)}$, $V_1^{(1)}U_L^{(m)}$, $V_1^{(0)}U_L^{(m)}$, преобразующимися по $\sum \mathfrak{D}_{L'}$, где L' может принимать одно из значений $L \pm 1$ и L. Поэтому и в правую часть (19.4) также должны входить только эти $\mathfrak{D}_{L'}$. Это дает правило отбора

$$L \to \begin{cases} L-1 \\ L \\ L+1 \end{cases} \qquad (0 \to 0 \text{ запрещено}). \tag{19.6}$$

Совершенно таким же образом, но только значительно проще, получаем правило отбора для характера отражения $w = (-1)^{\sum l_\nu}$

$$w \to -w \tag{19.7}$$

или *правило Лапорта: $\sum l_\nu$ меняется только на нечетное число.* Действительно, если в (19.4) при отражении s, $\psi_L^{(m)}$ умножается на w, то в левой части появляется множитель $-w$, поэтому в правую часть также входят только члены с характером отражения $-w$. Из этого правила вытекает еще, что в случае внешнего электрона и атомного остатка с центральной симметрией, если переходы совершает только внешний электрон, а остаток в первом приближении остается неизменным, то переход $L \to L$, допускаемый (19.6), оказывается запрещенным. Для этого случая имеет место старое правило отбора $L \to L \pm 1$ или, что то же самое, $l \to l \pm 1$.

Из дополнения ко второй теореме получаем, что коэффициенты (19.4) $a_{L'L}^{(m'm)}$ и т. д. для каждой фиксированной пары значений L, L однозначно определяются с точностью до множителя $\rho_{L'L}$ (независимого от m и m') с помощью теории групп. Вычисление этих коэффициентов позволяет судить об относительной интенсивности линий, возникающих при нарушении вырождения термов возмущением, не обладающим центральной симметрией (эффект Зеемана или Штарка), в предположении, что возмущение настолько мало, что функции ψ невозмущенной системы могут быть применены для вычисления интенсивностей. Вычисление производится очень легко на основании того соображения, что (18.4), представляет собой разложение произведений $U_m V_{m'}$, которые при $j = L$ и $j' = 1$ имеют совершенно такой же вид, как и наши функции $U_L^{(m)} = \psi_L^{(m)}$ и $V_1^{(1)} = -(X+iY)$, $V_1^{(-1)} = X - iY$, $V_1^{(0)} = Z\sqrt{2}$. Поэтому, согласно второй вспомогательной теореме (дополнение), коэффициенты разложения в произведении $U_L^{(m)} V_1^{(m')}$ для каждого L' должны совпадать с коэффициентами (18.4) с точностью до численного множителя.

Для полного совпадения обозначений заменим в (19.4) символы L, L', m' на j, J, M, т. е. положим

$$\left.\begin{aligned} -(X+iY)\psi_j^{(m)} &= -\sum \psi_J^M (a+ib)_{Jj}^{(Mm)} \\ (X-iY)\psi_j^{(m)} &= \sum \psi_J^M (a-ib)_{Jj}^{(Mm)} \\ \sqrt{2}Z\psi_j^{(m)} &= \sum \psi_J^M \sqrt{2} c_{Jj}^{(Mm)} \end{aligned}\right\}. \tag{19.8}$$

Теперь коэффициенты правой части для каждого J должны быть пропорциональны коэффициентам разложения $c_{m,M-m}^J$ в (18.4).

Поэтому получаем (ср. вторую таблицу на стр. 96)

$$\left.\begin{aligned}
\text{для}\quad J=j+1\colon\ (a+ib)^{(m+1,m)}_{J,j} &= -\rho\sqrt{(j+m+2)(j+m+1)},\\
(a-ib)^{(m-1,m)}_{J,j} &= \rho\sqrt{(j-m+2)(j-m+1)},\\
c^{(m,m)}_{J,j} &= \rho\sqrt{(j+m+1)(j-m+1)};\\
\text{для}\quad J=j\colon\ (a+ib)^{(m+1,m)}_{J,j} &= \sigma\sqrt{(j+m+1)(j-m)},\\
(a-ib)^{(m-1,m)}_{J,j} &= \sigma\sqrt{(j+m)(j-m+1)},\\
c^{(m,m)}_{J,j} &= \sigma m;\\
\text{для}\quad J=j-1\colon\ (a+ib)^{(m+1,m)}_{J,j} &= \tau\sqrt{(j-m)(j-m-1)},\\
(a-ib)^{(m-1,m)}_{J,j} &= -\tau\sqrt{(j+m)(j+m-1)},\\
c^{(m,m)}_{J,j} &= \tau\sqrt{(j+m)(j-m)}.
\end{aligned}\right\}\qquad(19.9)$$

В этих формулах можно опять заменить j, J на L, L'. В случае надобности можно легко из $(a+ib)^{Mm}_{Jj}$ и $(a-ib)^{Mm}_{Jj}$ вычислить a^{Mm}_{Jj} и b^{Mm}_{Jj}. Согласно § 3, квадраты этих величин дают вероятности переходов, которым пропорциональны интенсивности соответствующих спектральных линий. Вопрос о направлении поляризации излученного света уже был разобран в § 6.

§ 20. Представления группы Лоренца

Совершенно таким же образом, как мы установили в § 16 и § 17 представления группы вращения $\mathfrak{d}$, мы найдем теперь представления группы преобразований Лоренца (группа Лоренца).

1. Группа $\mathfrak{c}_2$ и основное преобразование Лоренца

Будем исходить из группы $\mathfrak{c}_2$ одномодулярных линейных преобразований в двухмерном пространстве. Так как в дальнейшем нам придется иметь дело с ко- и контравариантными векторами, то мы воспользуемся обозначениями исчисления Ричи[1]. Мы обозначим базисные векторы через $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$, а их линейные комбинации через $a_1\overset{1}{u}+a_2\overset{2}{u}$. Формула

[1]Тензорного исчисления.

преобразования имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \overset{1}{u}{}' &= \overset{1}{u}\,\alpha + \overset{2}{u}\,\gamma, \\ \overset{2}{u}{}' &= \overset{1}{u}\,\beta + \overset{2}{u}\,\delta, \end{aligned} \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \right\}. \tag{20.1}$$

Мы введем еще второе векторное пространство $(a_1 \overset{\dot 1}{u} + a_2 \overset{\dot 2}{u})$, которое преобразуется одновременно с первым, но всегда с комплексно-сопряженной матрицей

$$\left.\begin{aligned} \overset{\dot 1}{u}{}' &= \overset{\dot 1}{u}\,\overline{\alpha} + \overset{\dot 2}{u}\,\overline{\gamma} \\ \overset{\dot 2}{u}{}' &= \overset{\dot 1}{u}\,\overline{\beta} + \overset{\dot 2}{u}\,\overline{\delta} \end{aligned} \right\}. \tag{20.2}$$

Мы условливаемся отмечать все величины, преобразующиеся по (20.2), пунктирными индексами ($\dot 1$, $\dot 2$ или $1^{\cdot}$, $2^{\cdot}$).

Если нужно, можно считать $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ численными переменными, а $\overset{\dot 1}{u}$, $\overset{\dot 2}{u}$ комплексно-сопряженными переменными $\overset{\dot 1}{u} = \overset{\overline{1}}{u}$, $\overset{\dot 2}{u} = \overset{\overline{2}}{u}$. Иногда мы будем пользоваться этой интерпретацией, иногда будем понимать под $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$, $\overset{\dot 1}{u}$, $\overset{\dot 2}{u}$ четыре совершенно произвольных основных вектора.

Если (a_1, a_2) и (b_1, b_2) два вектора, преобразующиеся по (20.1), то выражение $a_1b_2 - a_2b_1$ инвариантно; поэтому вектор $(b_2, -b_1)$ контрагредиентен к (a_1, a_2). Следовательно, мы можем для каждого бинарного вектора (b_1, b_2) построить контрагредиентный вектор (b^1, b^2) с компонентами

$$b^1 = b_2, \quad b^2 = -b_1. \tag{20.3}$$

Точно так же для каждого вектора $(b_{\dot 1}, b_{\dot 2})$ мы определяем контрагредиентный вектор $(b^{\dot 1}, b^{\dot 2}) = (b_{\dot 2}, -b_{\dot 1})$.

Линейное пространство всех билинейных форм

$$c_{1\dot 1}\overset{1\,\dot 1}{uu} + c_{1\dot 2}\overset{1\,\dot 2}{uu} + c_{2\dot 1}\overset{2\,\dot 1}{uu} + c_{2\dot 2}\overset{2\,\dot 2}{uu} \tag{20.4}$$

линейно преобразуется в самого себя при преобразованиях (20.1) и (20.2) (т. е. при замене $\overset{\lambda}{u}$ на $\overset{\lambda}{u}{}'$), причем детерминант

$$|C| = c_{1\dot 1}c_{2\dot 2} - c_{1\dot 2}c_{2\dot 1}$$

остается инвариантным. Для того чтобы форма (20.4) при интерпретации $\overset{\lambda}{u}$, $\overset{\dot\lambda}{u}$, как комплексно-сопряженных пар переменных, принимала только вещественные значения, $c_{1\dot 2}$ и $c_{2\dot 1}$ должны быть вещественными, а $c_{1\dot 2}$, $c_{2\dot 1}$ — комплексно-сопряженными. В дальнейшем мы будем пользоваться этими условиями вещественности; они, очевидно, инвариантны относительно преобразований (20.1).

Введем теперь вещественные переменные x, y, z, t с помощью соотношений

$$\left.\begin{aligned} c_{2\dot 1} &= x + iy, \\ c_{1\dot 2} &= x - iy, \\ c_{1\dot 1} &= z + ct, \\ c_{2\dot 2} &= -z + ct. \end{aligned}\right\} \tag{20.5}$$

Эти новые переменные, как и $c_{\lambda\dot\mu}$, претерпевают при группе (20.2) линейное преобразование. Так как они вещественны и это свойство сохраняется при нашем преобразовании, то коэффициенты преобразования также вещественны.

Далее, квадратичная форма

$$c_{1\dot 1}c_{2\dot 2} - c_{1\dot 2}c_{2\dot 1} = c^2t^2 - z^2 - x^2 - y^2$$

инвариантна и поэтому речь идет о *вещественном преобразовании Лоренца* для переменных x, y, z, t. Среди получаемых таким образом преобразований Лоренца находятся и все пространственные вращения, так как если в (20.1) и (20.2) специально выбрать $\delta = \overline{\alpha}, \gamma = -\overline{\beta}$, то $2ct = c_{1\dot 1} + c_{2\dot 2}$ остается инвариантным. Преобразование (20.1) является унитарным и поэтому $\overset{\dot 1}{u}$ и $\overset{\dot 2}{u}$ (или $\overset{\overline{1}}{u}$ и $\overset{\overline{2}}{u}$ преобразуется как u_2, $-u_1$, а форма (20.4) преобразуется как

$$-\,c_{1\dot 2}\overset{1\,1}{uu} + (c_{1\dot 1} - c_{2\dot 2})\overset{1\,2}{uu} + c_{2\dot 1}\overset{2\,2}{uu} = 2(c_0\overset{1\,1}{uu} + c_1\overset{1\,2}{uu} + c_2\overset{2\,2}{uu}),$$

т. е. переменные x, y, z претерпевают те преобразования, которые были рассмотрены в § 16. Но среди наших преобразований Лоренца встречаются также и следующие:

$$\left.\begin{aligned}\overset{1}{u}{}' &= \alpha\overset{1}{u},\\ \overset{2}{u}{}' &= \alpha^{-1}\overset{2}{u},\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}c'_{1\dot{1}} &= \alpha^2 c_{1\dot{1}},\\ c'_{2\dot{2}} &= \alpha^{-2} c_{2\dot{2}},\\ c'_{1\dot{2}} &= c_{1\dot{2}},\\ c'_{2\dot{1}} &= c_{2\dot{1}},\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}x' &= x,\\ y' &= y,\\ z' &= \frac{1}{2}(\alpha^2+\alpha^{-2})z + \frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha^{-2})ct,\\ ct' &= \frac{1}{2}(\alpha^2-\alpha^{-2})z + \frac{1}{2}(\alpha^2+\alpha^{-2})ct,\end{aligned}\right\} \tag{20.6}$$

при которых новая система (x', y', z', t') движется в направлении z с любой скоростью $v = c\dfrac{\alpha^4-1}{\alpha^4+1}$. Из этого преобразования и вращений можно составить все «*собственные преобразования Лоренца*», т. е. все те преобразования, которые не меняют вращательного соотношения между пространственными осями[1]. Поэтому наши преобразования дают все собственные преобразования Лоренца: *основная группа Лоренца является представлением группы* $\mathfrak{C}_2$.

Единственные преобразования (20.1), дающие тождественные преобразования группы Лоренца, определяются матрицами

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad -E = \begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Поэтому обратно группа $\mathfrak{C}_2$ является двузначным представлением собственной группы Лоренца.

2. Отражение s и полная группа Лоренца

Согласно вышеизложенному, собственная группа Лоренца как линейная группа с двумя переменными может быть представлена двузначно. Но эти представления не могут быть дополнены без увеличения числа переменных до представления полной *группы Лоренца,* которая получается из основной группы прибавлением отражения s

$$x' = -x,\quad y' = -y,\quad z' = -z,\quad t' = t.$$

[1] Т. е. при которых «правая» система координат xyz не переходит в «левую» $x'y'z'$. (Прим. ред.).

Так как отражение s коммутирует со всеми чисто пространственными вращениями, то и представляющая матрица S должна была бы коммутировать со всей унитарной группой $\mathfrak{U}_2$; так как, однако, $\mathfrak{U}_2$ является неприводимой системой преобразований, S должна быть кратна единичной матрице. Поэтому S должна коммутировать со всей группой $\mathfrak{C}_2$. Но отражение s переводит преобразование Лоренца (20.6) в другое, с противоположной скоростью движения системы отсчета; следовательно, матрица S не должна коммутировать с матрицами, относящимися к (20.6). Мы приходим, таким образом, к противоречию.

Можно, однако, получить представление полной группы Лоренца при помощи четырех переменных, если к переменным $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$ добавить еще пунктированные переменные $\overset{\dot 1}{u}$, $\overset{\dot 2}{u}$, рассматривая их, как новые переменные, а не как комплексно-сопряженные с $\overset{1}{u}$, $\overset{2}{u}$. Как было указано выше, при чисто пространственном вращении $\overset{\dot 1}{u}$, $\overset{\dot 2}{u}$ преобразуются как $\overset{2}{u}$ и $-\overset{1}{u}$. Положим $\overset{\dot 1}{u} = \underset{\dot 2}{v}$, $\overset{\dot 2}{u} = -\underset{\dot 1}{v}$; тогда новые базисные векторы $\underset{\dot 1}{v}$ и $\underset{\dot 2}{v}$ при пространственном вращении преобразуются точно так же, как и $\overset{1}{u}$ и $\overset{2}{u}$. Преобразования s, коммутирующего со всеми вращениями, мы попробуем представить в следующем виде:

$$s\overset{\lambda}{u} = i\underset{\dot\lambda}{v}, \quad s\underset{\dot\lambda}{v} = i\overset{\lambda}{u} \quad (\lambda = 1,\, 2). \tag{20.7}$$

Билинейная форма (20.4) или

$$c_{1\dot1}\overset{1}{u}\underset{\dot2}{v} - c_{1\dot2}\overset{1}{u}\underset{\dot1}{v} + c_{2\dot1}\overset{2}{u}\underset{\dot2}{v} - c_{2\dot2}\overset{2}{u}\underset{\dot1}{v}$$

при преобразовании s (20.7) переходит в

$$c_{2\dot2}\overset{1}{u}\underset{\dot2}{v} + c_{1\dot2}\overset{1}{u}\underset{\dot1}{v} - c_{2\dot1}\overset{2}{u}\underset{\dot2}{v} - c_{1\dot1}\overset{1}{u}\underset{\dot2}{v}$$

Поэтому

$$c'_{1\dot1} = c_{2\dot2}; \quad c'_{2\dot2} = c_{1\dot1}; \quad c'_{2\dot1} = -c_{1\dot2}; \quad c'_{1\dot2} = -c_{2\dot1},$$

а это и есть, согласно (20.5), требуемое отражение

$$x' = -x, \quad y' = -y, \quad z' = -z, \quad t' = +t.$$

Каждое несобственное преобразование Лоренца может быть представлено в виде произведения собственного преобразования Лоренца a

и отражения s. Если теперь с каждым таким произведением as мы свяжем произведение соответствующих матриц, то получим (двузначное) представление полной группы Лоренца для четырех переменных. Представление (20.7) отражения s имеет еще тот недостаток, что его квадрат равен не E, а $-E$, что связано с двузначностью представления. Этот недостаток устраняется без потери свойств представлений, если умножить представляющие матрицы всех несобственных преобразований Лоренца на $-i$, т. е., например, вместо (20.7) принять

$$s\overset{\lambda}{u} = \underset{\dot\lambda}{v}, \quad s\underset{\dot\lambda}{u} = \overset{\lambda}{u},$$

что мы и будем делать в дальнейшем.

Вектор пунктирного пространства $a_{\dot 1}\overset{\dot 1}{u} + a_{\dot 2}\overset{\dot 2}{u}$, выраженный через новые базисные векторы $\underset{\dot 1}{v} = -\overset{\dot 2}{u}$, $\underset{\dot 2}{v} = +\overset{\dot 1}{u}$, обладает компонентами $a^{\dot 1} = -a_{\dot 2}$, $a^{\dot 2} = a_{\dot 1}$. Обозначение соответствует условию (20.3). Компоненты a_1, a_2, $a^{\dot 1}$, $a^{\dot 2}$ произвольного вектора $a_1\overset{1}{u} + a_2\overset{2}{u} + a^{\dot 1}\underset{\dot 1}{v} + a^{\dot 2}\underset{\dot 2}{v}$ часто обозначают a_1, a_2, a_3, a_4, но это обозначение не так ясно показывает характер их преобразования.

Полезно отметить, что компоненты a_1, a_2, a_3, a_4 преобразуются совершенно иначе (более того, неэквивалентно), чем компоненты мирового тензора (x, y, z, t). Помимо двузначности преобразования a_ν, при заданном преобразовании Лоренца, существенное различие заключается в том, что лоренцовы преобразования мирового тензора образуют неприводимую систему, тогда как соответствующие преобразования величин a_ν распадаются на две подсистемы, соответствующие инвариантным подпространствам $(\overset{1}{u}, \overset{2}{u})$ и $(\underset{\dot 1}{v}, \underset{\dot 2}{v})$.

3. Спинорный анализ

Способ записи ко- и контраградиентных векторов с помощью верхних и нижних значков имеет, как известно, то преимущество, что инвариантность тех или иных соотношений бросается в глаза. Например, система уравнений

$$a_\lambda = \sum c_{\lambda\dot\mu} b^{\dot\mu}$$

инвариантна относительно группы $\mathfrak{C}_2$, так как $c_{\lambda\dot\mu}$, т. е. коэффициенты (20.4) преобразуются так же, как коэффициенты $c_\lambda c_{\dot\mu}$ развернутой билинейной формы $(c_1\overset{1}{u} + c_2\overset{2}{u})(c_{\dot 1}\overset{\dot 1}{u} + c_{\dot 2}\overset{\dot 2}{u})$.

Это значит, что матрица $C = (c_{\lambda\dot{\mu}})$ преобразует бинарный вектор вида $(b^{\dot{1}}, b^{\dot{2}})$ в вектор вида (a_1, a_2). Обратная матрица, умноженная на инвариант $|C| = c_{1\dot{1}}c_{2\dot{2}} - c_{1\dot{2}}c_{2\dot{1}}$, т. е.

$$C' = |C|C^{-1} = \begin{pmatrix} c_{2\dot{2}} & -c_{1\dot{2}} \\ -c_{2\dot{1}} & c_{1\dot{1}} \end{pmatrix},$$

естественно, преобразует обратно бинарный вектор вида (a_1, a_2) в вектор вида $(b^{\dot{1}}, b^{\dot{2}})$.

Согласно (20.5), имеем

$$C = \begin{pmatrix} c_{1\dot{1}} & c_{1\dot{2}} \\ c_{2\dot{1}} & c_{2\dot{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z + ct & x - iy \\ x + iy & -z + ct \end{pmatrix}$$

и поэтому

$$C' = \begin{pmatrix} -z + ct & -(x - iy) \\ -(x + iy) & z + ct \end{pmatrix}.$$

Введем «спиновые матрицы» Паули

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_x; \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \sigma_y; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_z \tag{20.8}$$

и обозначим единичную матрицу через σ_0, тогда

$$\begin{aligned} C &= x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z + ct\sigma_0, \\ C' &= -x\sigma_x - y\sigma_y - z\sigma_z + ct\sigma_0. \end{aligned} \tag{20.9}$$

Обозначим переменные x, y, z, ct через x^1, x^2, x^3, x^0, матрицы $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_0$ через $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_0$ и элемент матрицы σ_k через $\sigma_{k\lambda\dot{\mu}}$ $(k = 1, 2, 3, 4;\ \lambda = 1, 2;\ \dot{\mu} = 1, 2)$, тогда

$$c_{\lambda\dot{\mu}} = \sum x^{\sigma}_{k\lambda\dot{\mu}}. \tag{20.10}$$

Полученный результат означает, что *каждое уравнение вида*

$$a_\lambda = \sum_k \sum_{\dot{\mu}} x^k \sigma_{k\lambda\dot{\mu}} b^{\dot{\mu}}$$

остается инвариантным при всех преобразованиях Лоренца, если a_λ *и* $b^{\dot{\mu}}$ *преобразуются согласно вышеописанному двузначному представлению группы Лоренца, а* x^k *преобразуется по группе Лоренца, тогда как чисто числовые величины,* $\sigma_{k\lambda\dot{\mu}}$ *при преобразовании не меняются.*

Если мы примем $\sigma_1' = -\sigma_x$, $\sigma_z' = -\sigma_y$, $\sigma_3' = -\sigma_z$, $\sigma_0' = \sigma_0$, то всякое уравнение вида

$$a^{\dot{\mu}} = \sum_k \sum_\lambda x^k \sigma_k'^{\dot{\mu}\lambda} b_\lambda \tag{20.11}$$

также оказывается инвариантным относительно всех собственных преобразований Лоренца.

Кроме того, пара уравнений (20.10), (20.11) остается инвариантной при отражении s, преобразующем a_λ в $a^{\dot{\lambda}}$, b_μ в $+b^{\dot{\mu}}$, x^k в $-x^k$ ($k = 1, 2, 3$), так как при таком отражении (20.10) переходит в (20.11), и обратно.

Только что описанные свойства инвариантности, естественно, сохраняются при замене x^k любым другим выражением, преобразующимся как компоненты мирового вектора, как, например

$$\frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y}, \ \frac{\partial}{\partial z}, \ -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}.$$

4. Бесконечно малые преобразования

Мы определим теперь все дифференцируемые представления группы Лоренца с помощью метода бесконечно малых преобразований. Каждое собственное представление собственной группы Лоренца является одновременно собственным представлением группы $\mathfrak{C}_2$, и обратно; поэтому мы сначала будем искать представления $\mathfrak{C}_2$. В качестве матрицы преобразования $\mathfrak{C}_2$ мы возьмем

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 + i\alpha_2 & \alpha_3 + i\alpha_4 \\ \alpha_5 + i\alpha_6 & \delta \end{pmatrix}, \tag{20.12}$$

где

$$\delta = \frac{1 + \beta\gamma}{\alpha} = \frac{1 + (\alpha_3 + i\alpha_4)(\alpha_5 + i\alpha_6)}{1 + \alpha_1 + i\alpha_2},$$

и в качестве параметров вблизи единичной матрицы — вещественные переменные $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$. Мы определим, как и в § 17, бесконечно малые преобразования $I_1, \ldots, I_6$ произвольного представления так, чтобы они удовлетворяли перестановочному соотношению вида

$$I_\mu I_\nu - I_\nu I_\mu = \sum_\sigma I_\sigma c^\sigma_{\mu\nu}.$$

$c^{\sigma}_{\mu\nu}$ являются вещественными числами, зависящими только от построения группы, и поэтому могут быть определены из какого-нибудь представления, например, из матриц самого $\mathfrak{C}_2$. Для этого представления по (20.12) имеем

$$I_1 = \frac{\partial A}{\partial \alpha_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$I_2 = \frac{\partial A}{\partial \alpha_2} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad I_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем следующие перестановочные соотношения с вещественными коэффициентами[1]

$$\begin{array}{lll} I_1I_3 - I_3I_1 = 2I_3 & I_1I_4 - I_4I_1 = 2I_4 & I_2I_3 - I_3I_2 = 2I_4 \\ I_1I_5 - I_5I_1 = -2I_5 & I_1I_6 - I_6I_1 = -2I_6 & I_2I_5 - I_5I_2 = -2I_6 \\ I_3I_5 - I_5I_3 = I_1 & I_3I_6 - I_6I_3 = I_2 & I_4I_5 - I_5I_4 = I_2 \end{array}$$
$$\begin{array}{ll} I_2I_4 - I_4I_2 = -2I_3 & I_1I_2 - I_2I_1 = 0 \\ I_2I_6 - I_6I_2 = 2I_5 & I_3I_4 - I_4I_3 = 0 \\ I_4I_6 - I_6I_4 = -I_1 & I_5I_6 - I_6I_5 = 0. \end{array}$$

Эти соотношения должны также иметь место для любого представления. Их можно упростить введением новых операторов

$$I_1 + iI_2 = 4A_z; \quad I_3 + iI_4 = 2A_p; \quad I_5 + iI_6 = 2A_q;$$
$$I_1 - iI_2 = 4B_z; \quad I_3 - iI_4 = 2B_p; \quad I_5 - iI_6 = 2B_q.$$

Вычисление показывает, что все A и B коммутируют между собой

$$A_hB_k - B_kA_h = 0 \quad \text{для} \quad h,\, k = z,\, p,\, q$$

и далее

$$\left.\begin{array}{l} A_zA_p - A_pA_z = A_p \\ A_zA_q - A_qA_z = -A_q \\ A_pA_q - A_qA_p = 2A_z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} B_zB_p - B_pB_z = B_p \\ B_zB_q - B_qB_z = -B_q \\ B_pB_q - B_qB_p = 2B_z \end{array}\right\}.$$

Как для A, так и для B мы имеем такие же перестановочные соотношения, как (17.5). Поэтому остаются в силе все выводы, сделанные

[1] Что коэффициенты должны быть вещественны, следует из общих соображений § 17. Только при условии вещественности коэффициенты определяются однозначно.

нами из (17.5). Если v_J вектор, относящийся к наивысшему собственному значению J величины A_z, то имеется целый ряд собственных векторов v_M $(-J \leqslant M \leqslant J)$, преобразующихся с помощью операторов A_h по (17.8) (с A_k вместо L_k). Совокупность всех v_J, относящихся к собственному значению J, является линейным пространством, инвариантным относительно B_k, так как последнее коммутирует с A_z. В этом пространстве можно по тому же принципу найти ряд векторов $v_{JM'}$ $(-J' \leqslant M' \leqslant J')$, преобразующихся с помощью B_k по (17.8); каждый такой вектор $v_{JM'}$ при повторном применении оператора A_q дает целый ряд векторов $v_{MM'}$ $(-J \leqslant M \leqslant J)$. *Таким образом мы находим* $(2J+1)(2J'+1)$ *векторов* $v_{MM'}$, *для которых имеют место соотношения*

$$\left.\begin{aligned}
A_p v_{MM'} &= \sqrt{(J-M)(J+M+1)}\,v_{M+1,M'}\\
A_q v_{MM'} &= \sqrt{(J+M)(J-M+1)}\,v_{M-1,M'}\\
A_z v_{MM'} &= M v_{MM'}\\
B_p v_{MM'} &= \sqrt{(J'-M')(J'+M'+1)}\,v_{M,M'+1}\\
B_q v_{MM'} &= \sqrt{(J'+M')(J'-M'+1)}\,v_{M,M'-1}\\
B_z v_{MM'} &= M' v_{MM'}
\end{aligned}\right\} \tag{20.13}$$

и которые определяют неприводимое представление группы $\mathfrak{c}_2$. Неприводимость легко получается из тех же соображений, которыми мы пользовались для этой цели в § 17. Если первоначальное представление неприводимо, то $v_{MM'}$ должны обязательно заполнять все пространство; *поэтому каждое неприводимое представление эквивалентно заданному (20.13) представлению* $\mathfrak{D}_{JJ'}$.

Далее, легко построить систему величин, преобразующихся так же, как и $\mathfrak{D}_{JJ'}$. Для этого мы должны только принять

$$v_{MM'} = \frac{\overset{1}{u}{}^{J+M}\,\overset{2}{u}{}^{J+M}}{\sqrt{(J+M)!(J-M)!}} \cdot \frac{\overset{\dot 1}{u}{}^{J'+M'}\,\overset{\dot 2}{u}{}^{J'+M'}}{\sqrt{(J'+M')!(J'-M')!}}.$$

Произвольная линейная комбинация этих $v_{MM'}$ дается выражением

$$c_{\lambda\mu\ldots\nu\dot\rho\dot\sigma\ldots\dot\tau}\overset{\lambda}{u}\overset{\mu}{u}\ldots\overset{\nu}{u}\overset{\dot\rho}{u}\overset{\dot\sigma}{u}\ldots\overset{\dot\tau}{u},$$

где тензор c симметричен относительно $2J$ индексов $\lambda, \ldots, \nu$ и $2J'$ индексов $\dot\rho, \ldots, \dot\tau$.

Следовательно, эти тензоры c образуют ряд величин, которые при применении группы $\mathfrak{c}_2$ *претерпевают неприводимую группу преобразований, и эти величины являются единственными (с точностью до эквивалентности), обладающими этими свойствами.*

Я не буду здесь останавливаться на доказательстве (впрочем, не очень трудном), что каждое представление полностью приводимо, и поэтому все возможные величины могут быть написаны в виде сумм величин вышеописанного вида.

В вышеизложенном исследовании определены все виды «величин», линейно преобразующихся при применении (собственной) группы Лоренца. Простейшие величины являются инвариантами или скалярами; далее следуют бинарные векторы (a_1, a_2) и $(a_{\dot{1}}, a_{\dot{2}})$ [контраградиентные векторы по (20.3) преобразуются одинаково с коградиентными], далее — тензоры $c_{\lambda\dot{\mu}}$, которые по (20.4) эквивалентны мировому тензору (четырехмерному вектору); потом симметричные тензоры $c_{\lambda\mu}$ и $c_{\dot{\lambda}\dot{\mu}}$ с тремя компонентами и т. д.

Все эти величины обозначают собирательным именем «*спиноров*», так как они играют роль в теории «вращающегося» электрона (электрона со спином).

Между всеми видами спиноров можно установить соотношения, инвариантные относительно преобразования Лоренца, в которых, как обычно подразумевается, производится суммирование его по верхним или нижним индексам (которые либо *оба* пунктированы, либо оба непунктированы). При этом имеют значение также те определенные численные спиноры, все компоненты которых в отдельности инварианты. Такие спиноры нам уже известны, это определенные (20.7) величины $\sigma_{k\lambda\mu}$ (собственно говоря, не чистые спиноры, так как индекс k меняется не от 1 до 2, а от 0 до 3 и преобразуются они подобно мировым тензорам). Эти величины всегда входят в формулы [как в (20.10)] как связывающие члены между спинорами и векторами. С их помощью можно записать (20.4) в виде

$$c_{\lambda\dot{\mu}} = \sigma_{k\lambda\dot{\mu}} x^k.$$

Таким же образом с каждым мировым вектором или мировым тензором с помощью величины σ можно связать спинор. Например,

$$f_{\varkappa\lambda\,\dot{\mu}\dot{\nu}} = \sigma_{k\varkappa\dot{\mu}} \sigma_{l\lambda\dot{\nu}} F^{kl}. \tag{20.14}$$

Другой простой величиной является чистый спинор $\varepsilon^{\lambda\mu}$ с компонентами

$$\varepsilon^{12} = 1, \quad \varepsilon^{21} = -1, \quad \varepsilon^{11} = \varepsilon^{22} = 0.$$

Точно так же можно определить $\varepsilon_{\lambda\mu}$, $\varepsilon^{\dot{\lambda}\dot{\mu}}$ и $\varepsilon_{\dot{\lambda}\dot{\mu}}$. С помощью этих величин строят инварианты, как, например,

$$\varepsilon^{\lambda\mu} a_\lambda b_\mu = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

и пишут (20.3) в инвариантном виде

$$b^{\lambda} = \varepsilon^{\lambda\mu} b_{\mu}.$$

На доказательстве[1] того, что символов ε и σ достаточно, чтобы записать инвариантно любую инвариантную систему уравнений, связывающую спиноры и мировые тензоры, мы останавливаться не будем и ограничимся следующим примером. Скалярное произведение $x_k y^k$ двух мировых векторов может быть представлено с помощью ε-символики в виде

$$x_k y^k = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\varkappa\lambda} \varepsilon^{\mu\dot{\nu}} \xi_{\varkappa\dot{\mu}} \eta_{\lambda\dot{\nu}},$$

где $\xi_{\lambda\dot{\mu}} = \sigma_{k\lambda\dot{\mu}} x^k$ и $\eta^{\lambda\mu} = \sigma_{k\lambda\dot{\mu}} y^k$ соответствующие спиноры[2].

[1] Вкратце это доказательство сводится к следующему. Сначала мировые векторы и тензоры заменяются эквивалентными им спинорами [как в (20.14)]. После этой замены символы σ уже не нужны. Каждая инвариантная система уравнений может быть получена путем приравнивания нулю ковариантов (теорема Грама). Все коварианты бинарных тензоров строятся путем символического разложения тензора на «линейные множители» $a_{\mu} x^{\mu}$ соответственно $a_{\dot{\mu}} y^{\dot{\mu}}$ и «скобочные символы» $(ab) = a_1 b_2 - a_2 b_1 = \varepsilon^{\lambda\mu} a_{\lambda} b_{\mu}$ или, соответственно, $(\dot{a}\dot{b}) \varepsilon^{\dot{\lambda}\dot{\mu}} a_{\dot{\lambda}} b_{\dot{\mu}}$. В этом и заключается доказательство. Применяемые законы теории инвариантов см.: R. Weitzenböck. Invariantentheorie, Groningen, 1923.

[2] Подробное изложение спинорного анализа с многочисленными примерами и, между прочим, с применением к уравнениям поля Максвелла, дано в Laporte und Uhlenbeck. Phys Rev., Bd. 37, S. 1380 (1931).