3.3. Механико-математические работы Г. В. Лейбница

Как выдающийся математик конца XVII в., Лейбниц не мог оставить без внимания традиционные задачи механики, занимавшие умы большинства геометров этого периода. Конкретным задачам статики, кинематики и динамики движения планет и падающих тел посвящено значительное количество работ, продолжающих исследования Галилея, Кеплера, Гюйгенса, Ньютона, Я. и И. Бернулли.

В работе «Доказательство правила, полученного в статике, но часто подвергаемого сомнению, касающегося давления тяжелого тела на наклонную плоскость, и решение элегантной проблемы, предложенной в «Acta» в ноябре 1684 г. относительно сферы, расположенной между двумя наклонными, перпендикулярными плоскостями, с определением давления, оказываемого на каждую из двух плоскостей», опубликованной в 1684 г. в «Acta eruditorum», автор рассматривает равновесие сферы, изображенной на рис. 3.3.1.

Обозначив Q — вес сферы, i — угол наклона одной из плоскостей к горизонту, P — искомое давление на одну, P' — на другую плоскость, исходя из условия $P + P' = Q$, после очень сложных рассуждений и преобразований, Лейбниц получает результат:

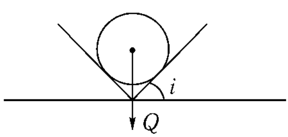

Рис. 3.3.1

$$P' = \frac{Q}{2}(1 - \cos i + \sin i),$$

$$P = \frac{Q}{2}(1 - \sin i + \cos i).$$

Но что понимается под давлением тела на наклонную плоскость? Если воспользоваться современным подходом, то в соответствии с правилами освобождения от связей силы P' и P должны быть перпендикулярными соответствующим плоскостям, и из равенства

$$\overline{P} + \overline{P}' = \overline{Q}$$

следует, что $P = Q\cos i$, $P' = Q\sin i$. Анализ результата Лейбница позволяет предположить, что он под давлением тела на наклонную плоскость понимал *вертикальную составляющую давления*, то есть силу, противоположную *вертикальной составляющей реакции связи* (при $i = 0$, $P' = 0$, $P = Q$; при $i = \frac{\pi}{2}$, $P' = Q$, $P = 0$). Однако и в этом случае современный результат ($P = Q\cos^2 i$, $P' = \sin^2 i$) не совпадает с формулами Лейбница, так как равенства $1 - \cos i + \sin i = 2\sin^2 i$, $1 - \sin i + \cos i = 2\cos^2 i$ и не являются тождествами, и выполняются только при $i = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. Несмотря на неудачное решение Лейбница, эта задача (или ее модификации) ныне входит в большинство задачников по теоретической механике[1].

Правилу параллелограмма посвящена статья[2] «Общее правило сложения движений» [227], опубликованная Лейбницем в сентябрьском номере «Journal des Sçavans» за 1693 г. Она является своеобразным итогом длившейся с 1687 г. переписки-дискуссии по этой проблеме с Гюйгенсом, Чирнхаузом, Лопиталем и Фатио Дюилье, ставшим позднее одним из основных противников Лейбница в его приоритетном споре с Ньютоном. Как и Гюйгенс, Лейбниц исходит из проблемы нахождения центра тяжести системы тел. «В современной терминологии, общее правило сложения движений, полученное Лейбницем состоит в следующем. Если $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AE}$ являются составляющими скоростями движения, в котором участвует тело A, то $\overline{AM} = 4\overline{AG}$ — скорость сложного движения» [179, с. 79]. Здесь G — центр тяжести тела, и доказательство сводится к тому, что $\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{AD} + \overline{AE} = 4\overline{AG}^2$.

Лейбниц одним из первых обратил внимание на необходимость учета сил трения при изучении движения машин. Этому были посвящены экспериментальные и теоретические работы Витрувия, Галилея, инженеров С. Морланда[3], Олафа Рёмера[4] и Гийома Амонтона. В «Исследовании природы сопротивлений, порождаемых в машинах взаимодействием тел, и о способах их уменьшения», опубликованном в Miscellanea Berolinensia (1706), Лейбниц подробно говорит о главной причине возникновения сил трения — шероховатости взаимодействующих поверхностей тел. Он дает высокую оценку сформулированным Амонтоном в 1699 г. *законам трения*, в частности, пропорциональности сил трения взаимному давлению, вводит определение *движений скольжения, ка-*

[1] Например, № 2.19 в «Сборнике задач ...» И. В. Мещерского.

[2] Полный перевод статьи приводится в Приложении 1.

[3] Книга о водяных насосах, изданная в Париже в 1685 г.

[4] Работа об эпициклоидальной передаче выполнена в Парижской обсерватории в период пребывания там Лейбница, но опубликована только в 1710 г. в первом томе трудов Берлинской академии наук.

чения и *смешанного*, приводит примеры вычисления сил трения. В качестве средств, уменьшающих вредное действие трения скольжения, он предлагает использовать смазку или заменять скольжение качением.

Задача о движении планет породила в XVII в. вопросы о причинах этого движения, о природе притяжения тел, о зависимости притяжения от характеристик движения, о центробежных и центростремительных силах, о геометрической форме планет и целый ряд других. Некоторым из этих вопросов Лейбниц посвятил «Исследование движения планет», опубликованное в «Acta eruditorum» (1689). Своими предшественниками по обсуждаемым вопросам он считает Пифагора, Аристотеля, Птолемея, Коперника, Тихо Браге, Кеплера, Декарта и Ж. Д. Кассини. Имя Ньютона не упоминается, хотя, по-видимому[1], автор был знаком с «Началами» Ньютона и сделал попытку приложения своей динамики и нового анализа к изучению движения планет.

Взгляды Лейбница на природу движения планет несут отпечаток воззрений его предшественников: все тела, включая планеты, движутся в некой жидкости (эфире), которая и приводит их в движение. Движение планеты считается сложным, состоящим из вращательного или кругового и «парацентрического», то есть вдоль радиуса. Круговое движение гармонично, утверждает автор. А гармоничным называется движение, скорость которого обратно пропорциональна радиусу.

В начале XIX в. французский математик, механик и астроном Жак Филипп Мари Бинэ, переиздавший в 1816 г. «Аналитическую механику» Лагранжа, при выводе своих формул воспользовался именно этим способом описания движения планеты. Введя полярные координаты r, φ и переменную $u = \frac{1}{r}$, он получил известную формулу[2]

$$v^2 = c^2\left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right],$$

позволяющую записать дифференциальное уравнение движения планет:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{c^2},$$

[1]В октябре 1690 г. Лейбниц писал Гюйгенсу, что книгу Ньютона впервые увидел в Риме во время путешествия по Италии. До этого он имел о ней представление только в объеме аннотации в «Acta eruditorum».

[2]«Формула Бинэ».

где v — скорость планеты, $\mu = \gamma M$ — постоянная Гаусса, M — масса Солнца, γ — гравитационная постоянная, c — константа [91, с. 46–47]. Для вращательного движения $v_\varphi = r\dot{\varphi}$, а если движение гармонично (по Лейбницу), то $v_\varphi = \frac{c}{r}$. Из этих формул следует, что $r\dot{\varphi} = \frac{c}{r}$ или $r^2\dot{\varphi} = c$, то есть для любого парацентрического движения выполняется *закон площадей* (Кеплера). Именно это (площадь, описываемая радиусом r, пропорциональна времени) и предполагал Лейбниц, говоря как о движении планет вокруг Солнца, так и о движении спутников вокруг планет.

Далее Лейбниц подробно рассматривает оба вида движения, подробно обсуждая побуждающие их причины. Эфир совершает «гармоническое» (по Декарту) движение, и круговое движение планет связано с участием в «орбитальных течениях» (orbes fluides), в которых тело совершает пассивное «плавание». «Орбитальное движение» создает центробежную силу, определяемую скоростью и расстоянием до центра. Скорость убывает при удалении планеты от центра. Парацентрическое движение происходит благодаря центробежной силе и притяжению планет Солнцем, обладающим магнитными свойствами. Все тела, совершающие криволинейное движение, стремятся двигаться по касательной к траектории. Для того чтобы принудить тело двигаться по его траектории (а не по касательной!), необходимо некоторое усилие, направленное перпендикулярно касательной.

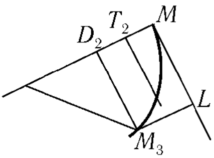

Рис. 3.3.2

Рассматривается бесконечно малое перемещение планеты по траектории (дуге) MM_3. В пятом пункте этой работы автор поясняет, что порядок бесконечно малых может быть различным. Так, если MM_3 — бесконечно малая, то разность между этой дугой и секущей будет малой второго порядка. Если ML — касательная к траектории, то $LM_3 = MD_2$ — бесконечно малое отклонение от касательной за время dt, произошедшее под влиянием притяжения и центробежных сил. Геометрические построения и пропорции между бесконечно малыми величинами позволяют автору получить дифференциальное уравнение, приводящее к выводу о том, что центробежная сила пропорциональна[1] $\frac{1}{r^3}$. Выражение центробежной силы совпадает с результатами Гюйгенса и Ньютона, но получено с при-

[1]Формально этот вывод подтверждается законом площадей. Из $r^2\dot{\varphi} = c$ следу-

влечением элементов анализа бесконечно малых. В этом и состоит главная ценность рассматриваемой работы, не лишенной значительного количества ошибок и заблуждений.

Из прочих результатов работы можно назвать следующие: вращательная скорость планеты больше парацентрической; скорость планеты максимальна в перигелии и минимальна в афелии; в перигелии и афелии парацентрическая скорость равна нулю; центробежная сила всегда меньше притяжения планеты Солнцем; движение планеты периодическое, то есть все действия и положения повторяются; планеты двигаются по эллипсам, но если центральная сила будет равна притяжению Солнца или будет больше притяжения, то движение будет параболическим или гиперболическим.

В связи с малым распространением на континенте гораздо более фундаментальной работы Ньютона («Начала») эта публикация Лейбница получила целый ряд откликов, в том числе и критического свойства. Ответом Лейбница на высказанные замечания стала статья «Выдержки из письма, написанного автором одному другу по поводу его физической гипотезы, касающейся движения планет» (Acta eruditorum, 1706). Лейбниц пытается показать физический смысл полученных им математических выражений. Приведем пример его рассуждений.

Если считать, что движение планеты происходит по дуге окружности ABC (рис. 3.3.3), то по закону инерции из положения B планета должна переместиться за dt по касательной BD. За то же время, под действием притяжения, она проходит путь DC. По галилееву закону

ет $r\dot{\varphi}^2 = \dfrac{c^2}{r^3}$. Однако Лейбниц сделал этот вывод иным путем. Он считал, что для объяснения притяжения тел нужно принять одну из двух гипотез: либо считать, что гравитационное притяжение действует аналогично распространению света, и тогда для него пригодны известные законы оптики, либо принять, что «на всякой орбите или на концентрическом круговом месте точек вращающейся материи сохраняется одно и то же количество мощности (quantité de puissance)». Согласно Лейбницу, последнее означает $mv^2 = m'v'^2$, а так как масса m вращающейся по кругу жидкости пропорциональна его радиусу, то $\dfrac{v^2}{v'^2} = \dfrac{r'}{r}$. Время в периодическом движении пропорционально $\dfrac{r}{v}$, в таком случае $\dfrac{r^2}{v^2} \sim r^3$. И если центробежное усилие пропорционально $\dfrac{v^2}{r}$, то оно, как и сила притяжения, будет пропорционально $\dfrac{1}{r^2}$.

падения тел, $DC = \frac{1}{2} j\,dt^2$ или $j = \frac{2DC}{dt^2}$, где j — ускорение, которое Лейбниц считает силой инерции. Но в полученном выражении его смущает то, что ускорение определяется двойным расстоянием DC. И в качестве объяснения он предлагает считать, что в точке B у планеты была скорость $2v$ как результат сложения собственной скорости и скорости, приобретенной в предыдущем движении (по дуге AB), дающей добавку $ED = DC$.

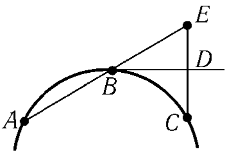

Рис. 3.3.3

Подобные рассуждения, естественно, не могли удовлетворить современников и ставили под сомнения прочие результаты. Однако мысль о том, что гравитация в каждый момент притягивает, а центробежная сила отдаляет планету от Солнца, хоть и не была новой, но не вызывала возражений. В том числе и у Гюйгенса, который после выхода в свет работы 1689 г. вел с Лейбницем оживленную переписку. Они оба дали высокую оценку достижениям Ньютона в решении задач небесной механики, но оба были абсолютно не удовлетворены его объяснениями физической природы гравитации, его идеей дальнодействия, взаимодействия тел без прямого контакта и без участия некоторого посредника («эфира»). Эта идея противоречила сложившимся после Декарта физическим представлениям, разделяемым большинством ученых. Сам Ньютон не раз признавал, что у него нет оснований настаивать на ее справедливости. Но и гипотеза посредника-эфира его также не устраивала и он, следуя Галилею, акцентировал внимание не на физической природе притяжения, ограничившись констатацией его наличия, а на принципах математического анализа движения тел. В том числе и тел Солнечной системы.

Со времен Галилея задачи о движении падающих или брошенных тел привлекали внимание всех известных ученых XVII в. «Третий день» «Бесед» [19] Галилей посвятил количественной теории свободно падающих и скользящих вдоль наклонной плоскости тел. При обсуждении задачи о падении тел он приводит, в своей терминологии, формулировку аналога будущего второго закона Ньютона: «Совершенно ясно, что импульс тела[1] к падению столь же велик, как то наименьшее сопротивление или та наименьшая сила, которые достаточны для

[1] По тексту ясно, что «импульс тела к падению» пропорционален современному ускорению.

того, чтобы воспрепятствовать падению и удержать тело» [19, с. 326]. В завершение «Третьего дня» излагается теория движения (падения) тела по наклонной плоскости и по ломаной, расположенной в вертикальной плоскости и состоящей из отрезков прямых разного наклона. Эта теория позволила автору рассмотреть (предельным переходом) колебания точки по дуге окружности, то есть заложить основы теории колебаний математического маятника. В «Четвертом дне» Галилей обсуждает движение бросаемых тел. Начиная с закона инерции[1], автор использует закон сложения равномерного горизонтального и естественного ускоренного движений и получает траекторию падения тела в виде полупараболы с вертикальной осью (теорема I). В теореме II этого же «дня» доказывается, со ссылкой на опыт, правило сложения скоростей при сложном движении точки. «Четвертый день» закладывает основы баллистики[2], а приведенные здесь таблицы дальности полета снарядов имеют важное значение в артиллерии.

Аналогичным проблемам посвящен главный трактат профессора Пражского университета И. М. Марци «О соотношении движений» (1639). Результаты Марци и Галилея совпадают. В 1644 г. ученик Галилея Торричелли опубликовал трактат «О движении естественно падающих и брошенных тел», в котором продолжается использование идеи Галилея, ставшей одной из основных в формировании методологии теоретической механики идеи непрерывного приращения скорости тела, находящегося под действием окружающих тел.

Откликом на результаты Ньютона («Начала») в задаче о движении тела с учетом сопротивления среды стала публикация Лейбница «О сопротивлении среды и движении тяжелых точек в сопротивляющейся среде» (Acta eruditorum, 1689). Автор отмечает ограниченность результатов Галилея, Торричелли и Блонделя в связи с неучетом ими сил сопротивления среды. В своей баллистической теории он различает «абсолютное» и «соответствующее» сопротивления. Его «абсолютное» сопротивление напоминает трение. Оно не зависит от скорости тела и его величина пропорциональна площади контакта тела и среды. «Соответствующее» сопротивление определяется плотностью сре-

---

[1] «Когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления движению, то ... движение его является равномерным и продолжалось бы бесконечно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца» [19, с. 417–418].

[2] Галилей не упоминает о более ранних работах Тартальи.

ды и пропорционально одновременно скорости и объему тела. Через него передается действие частиц среды на тело и благодаря ему ускоренно двигающееся тело (например, падающее тело) стремится достичь предельной скорости.

Траектория снаряда, движущегося в сопротивляющейся среде, зависит от сложения равномерно замедленного движения (по причине «абсолютного» сопротивления) и ускоренного движения, тормозящегося «соответствующим» сопротивлением. Он считает, что «если движение равномерное, то оно будет замедленным пропорционально пройденному пути». Это означает, что при силе сопротивления, пропорциональной пути ($F = ks$), движение будет равномерным. Но и Галилей, и Декарт, и Гюйгенс, и Ньютон утверждали, что для равномерного движения тела необходимо отсутствие сил в направлении движения.

Далее автор решает задачу о движении тела в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости движения тела. Из закона сохранения живых сил получается дифференциальное уравнение и его интеграл

$$t = \int \frac{a^2\,dv}{a^2 - v^2},$$

или[1] $t = v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + \ldots$ Здесь не ставится ныне традиционный вопрос об определении закона движения тела. И ценность работы состоит в первых шагах адаптации идей математического анализа применительно к чисто механической задаче. Гюйгенс, откликнувшись на эту статью[2], выразил свое несогласие с предлагаемой теорией и приверженность взглядам Ньютона. В ответном письме (октябрь, 1690) Лейбниц уверял: «Что касается сопротивления среды, я бы хотел заметить, что теоремы г. Ньютона, по крайней мере те, которые мне известны, соответствуют моим. То, что он называет сопротивлением пропорциональным квадрату скоростей (в случае равных времен), есть не что иное, как то, что я называю *соответствующим сопротивлением*, которое у меня определяется скоростями и проходимыми путями, независимо от того, равны интервалы времени или нет, таким же образом, как мне

---

[1]Это разложение справедливо только для $\left|\frac{v}{a}\right| < 1$, и в нем v следует заменить на $\frac{v}{a}$.

[2]Письмо Гюйгенса Лейбницу от 6.02.1690 г.

кажется, как и у Вас; но мне необходимо время, чтобы еще поразмышлять об этом» [187, с. 544].

В переписке 1690–91 гг. Гюйгенс и Лейбниц неоднократно возвращаются к проблеме движения тел в среде с сопротивлением[1]. Итогом размышлений Лейбница стала статья «Добавление к сопротивлению среды» (Acta eruditorum, апрель 1691), в которой Лейбниц полностью соглашается со взглядами Гюйгенса и Ньютона о том, что сила сопротивления среды пропорциональна квадрату скорости на каждом интервале времени.

В 1687 г. Лейбниц сформулировал в «Acta» задачу о «парацентрической изохроне» — найти кривую, по которой тяжелая точка опускается в равные промежутки времени на равные высоты. Через два года в том же журнале Лейбниц приводит решение своей задачи без подробного описания метода его получения [226]. Исходя из своего принципа сохранения живых сил $v^2 - v_0^2 = 2g(y - y_0)$ и постоянства ускорения $\dfrac{dv}{st} = k$, после исключения времени и интегрирования, он получает квадратно-кубическую параболу $9g^2k^2(x + c)^2 = (3gy - k^2)^3$, где $c = \mathrm{const}$[2]. Автор сохраняет в тайне метод интегрирования и усложняет задачу новым условием: найти кривую, которую должно пройти весомое тело, чтобы его расстояние до фиксированной точки изменялось на равную величину за равное время.

Первым на задачу Лейбница откликнулся Гюйгенс. Это было геометрическое решение. А в мае 1690 г. Я. Бернулли опубликовал в «Acta eruditorum» решение, в котором вывел дифференциальное уравнение искомой кривой и проинтегрировал его. При этом он впервые употребил в печати термин «интеграл» и указал, что из равенства дифференциалов следует равенство интегралов. Это была его первая публикация по применению нового анализа бесконечно малых. Лейбниц опубликовал свое решение в 1694 г. [228], попутно указав Я. Бернулли на некоторые ошибки. Решение Лейбница сводилось к интегрированию

[1] В частности, в письме от 23.02.1691 г., Гюйгенс писал, что Лейбниц понимает сопротивление иначе, чем Ньютон и сам Гюйгенс: «...вы понимаете под сопротивлением потерянную скорость или потерю скорости по причине среды... Откуда очевидно, что вы принимаете эффект сопротивления за само сопротивление. Но для г. Ньютона и для меня сопротивление — это давление среды на поверхность тела... Это, безусловно, правдоподобное и наиболее естественное определение сопротивления» [187, с. 545].

[2] Решение в современных обозначениях.

уравнения

$$dc = \frac{\sqrt{a^2 + ax}}{a}\,dt,$$

где $\frac{dc}{dt} = v$ — скорость движения. Здесь впервые вместо $d\,dy$ он вводит обозначение d^2y.

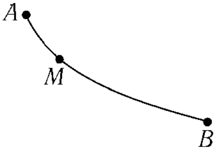

Рис. 3.3.4

В июньском номере «Acta eruditorum» за 1696 г. И. Бернулли сформулировал свою знаменитую задачу о брахистохроне, положившую начало развитию вариационного исчисления: «В вертикальной плоскости даны две точки A и B (рис. 3.3.4). Определить путь AMB, спускаясь по которому под влиянием собственной тяжести, тело M, начав движение из точки A, дойдет до другой точки B в кратчайшее время» [6, с. 19]. Лейбниц не мог не откликнуться на эту задачу и первым прислал ее решение (траектория — циклоида). Кроме самого И. Бернулли решения позднее прислали Я. Бернулли, Лопиталь и Ньютон. В работе 1697 г. (Acta eruditorum), где Лейбниц опубликовал свое решение задачи о брахистохроне, отмечаются особые заслуги Я. Бернулли и Лопиталя в развитии нового анализа и И. Бернулли в продолжении исследований движения тел, начатых Галилеем.

Задача о брахистохроне стала принципиально новым шагом в истории механики. Условие минимальности времени движения из A в B можно считать произвольным предположением, сделанным И. Бернулли ради усложнения математической проблемы Галилея. Но серьезность отношения к этой задаче ведущих механиков конца XVII в. свидетельствует о напряженном поиске некоторого универсального принципа, по сути философско-метафизического, по форме математического, который бы своим простым и ясным содержанием охватывал все свойства движения тел. И по сути такой принцип уже был известен со времен древнегреческой философии — *природа действует наиболее легкими и доступными путями.* Проблема состояла в математической формулировке этого положения. Обобщая известный принцип Герона об отражении света, Пьер Ферма[1] предполагал, что действительный путь распространения света между точками A и B отлича-

[1] Автор знаменитой теоремы о том, что уравнение $x^n + y^n = z^n$, где n — целое число, большее двух, не имеет решения в целых положительных числах.

ется от всех других путей тем, что для его прохождения требуется минимальное (из всех возможных) время. И это условие минимальности времени непрерывного движения стало возможным сформулировать средствами нового математического анализа. Физические воззрения оптико-механической аналогии и последовательное появление математических понятий интеграла, вариации интеграла, скорости-производной, действия позволили получить различные математические выражения принципов, давших новый импульс в формировании в XVIII–XIX вв. математического аппарата теоретической механики.

В работе 1690 г. Я. Бернулли не только дал решение задачи Лейбница, но и предложил свою задачу о форме кривой, по которой расположится подвешенная за концы однородная гибкая нить под действием собственного веса. Впервые об этой задаче упоминали Жирар (1634), указавший, что кривая будет параболой, и Галилей («Беседы», 1638), считавший, что кривая близка к параболе. Правильное решение задачи дали Гюйгенс, Лейбниц и И. Бернулли. Искомую кривую, полученную традиционными геометрическими построениями и отношениями, Гюйгенс назвал «цепной линией». Лейбниц и И. Бернулли нашли уравнение цепной линии с помощью исчисления бесконечно малых. Как и задача о брахистохроне, задача о цепной линии стала впоследствии одной из основных в истории вариационного исчисления. В ее решении условие равновесия тяжелой нити представлялось как требование минимальности высоты точек нити и представлялось соответствующими интегралами по дуге кривой. Решению задачи о цепной линии Лейбниц посвятил несколько публикаций в «Acta eruditorum» за 1691–93 гг.

Две публикации 1706 года посвящены кинематическим задачам движения тел. В статье «Построение касательной к линии центров тяжестей изменяющейся фигуры» (Miscellanea Berolinensia) рассматривается задача о построении касательной к линии, описываемой центром тяжести G криволинейного прямоугольного треугольника («трилинии») ABC (рис. 3.3.5), когда его основание BC перемещается параллельно самому себе.

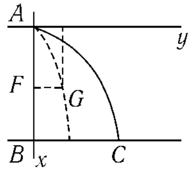

Рис. 3.3.5

Иными словами, решается задача об определении траектории центра тяжести плоской фигуры переменной формы (площади). В современных обозначениях ($AB = x$, $BC = y$, $AF = z$, $CCF = u$, S — площадь ABC, J_x и J_y — моменты относительной осей x и y) решение сводится к следующему:

$$S = \int y\,dx, \quad J_x = \frac{1}{2}\int y^2 dx, \quad J_y = \int xy\,dx,$$

$$z = \frac{J_y}{S}, \quad u = \frac{J_x}{S}, \quad dz = \ldots, \quad du = \ldots,$$

$$\frac{dz}{du} = d\frac{x\int y\,dx - \int xy\,dx}{y\int y\,dx - \int y^2\,dx}.$$

В качестве проверки полученного результата автор предлагает геометрический способ решения той же проблемы.

Вторая публикация «О движении одной линии по другой и о трех его разновидностях — скольжении, качении и сложном движении» (Acta eruditorum) предвосхищает работы Л. Пуансо, сводящие плоское движение твердого тела к движению подвижной центроиды по неподвижной. Лейбниц показывает, что при качении одной кривой (тела) по другой без проскальзывания подвижная кривая поворачивается около точки контакта (через 100 лет названной Пуансо *мгновенным центром скоростей*). Кроме этого, при некоторых условиях, у подвижной фигуры существует точка, траектория которой совпадает с неподвижной кривой.

Лейбниц прожил семьдесят лет, сорок из которых он занимал должность библиотекаря, советника юстиции и историографа ганноверских герцогов Иогана Фридриха (с 1665 по 1679), его младшего брата Эрнста Августа (с 1679 по 1698) и старшего сына последнего — Георга Людвига (с 1698 по 1714), ставшего королем Англии (Георг I). Герцоги ждали от Лейбница историю своего рода, рода Вельфов или Брауншвейгского дома. И он описал ее со вступления на престол императора Карла Великого (768 г.) до 1005 г. Это был огромный добросовестный труд, ради которого он совершил трехлетнее путешествие в Италию (1687–1690) и который превратился в историю не только германских герцогств, но и всей Священной Римской Империи, которая во времена Лейбница, по замечанию Вольтера, уже «не была Священной, не была Римской и не была Империей».

Но Лейбниц не мог подолгу заниматься одним делом, такова была особенность его характера. В сентябре 1695 г. он писал Планку: «Нет слов, чтобы описать, насколько я не сосредоточен. Ищу в архивах разные вещи и собираю напечатанные рукописи, с помощью которых надеюсь пролить свет на историю Брауншвейгского дома. Я получаю и отправляю немалое число писем. У меня столько нового в математике, столько мыслей в философии, столько других литературных заметок, которым я не могу дать погибнуть, что я часто не знаю, за что раньше приняться, и я чувствую, как прав был Овидий, восклицая: изобилие делает меня нищим! Уже свыше двадцати лет назад французы и англичане видели мою счетную машину ..., с тех пор Ольденбург, Гюйгенс и Арно, сами или через своих друзей, побуждали меня издать описание этого искусного устройства, а я все откладывал это, потому что я сперва имел только маленькую модель этой машины, которая годится для демонстрации механику, но не для пользования. Теперь же с помощью собранных мною рабочих готова машина, позволяющая перемножать до 12 разрядов. Уже год, как я этого достиг, но рабочие еще при мне, чтобы можно было подготовить другие подобные машины, так как их требуют из разных мест. А прежде всего я хотел бы закончить свою «Динамику», в которой, полагаю, я наконец нашел истинные законы материальной природы, и посредством их могу решать такие задачи о действии тел, для каких недостаточны доселе известные правила. Мои друзья, которые знают о построенной мною высшей геометрии, настаивают на издании моей «Науки о бесконечном», содержащей основы моего нового анализа. К этому надо добавить «Характеристику положения», над которой я работаю, и еще более общие вещи относительно искусства открытия.

Но все эти работы, за вычетом исторических, идут украдкой. Вы ведь знаете, при дворе ищут и ожидают совсем иного! ...» [68, с. 171].

Таков далеко не полный диапазон научных интересов Лейбница. По его инициативе и с его участием на его родине в Лейпциге профессора Отто Менке и Христиан Пфаутц начали с 1682 г. издавать «Acta eruditorum»[1] (Лейпцигские ученые записки). Он был автором идеи создания в Берлине научного Общества по подобию Парижской академии наук или Лондонского Королевского общества. В 1700 г. Прусский король назначил его президентом этого Общества, но участие Лейбница в деятельности Общества было достаточно формальным. В последние годы жизни он обсуждал с Петром I и с императором Карлом V идею создания аналогичных обществ в Петербурге[2] и Вене, где жил с конца 1712 по сентябрь 1714 г. В Вене он написал свою знамени-

[1] Издавался до 1774 г.

[2] Более подробно об этом в [24, с. 169–182].

тую «Монадологию», замыкающую философскую «трилогию» — «Новые опыты о человеческом разуме...» (1704, против Локка) и «Теодицея» (1710, против Бейля). С конца 90-х гг. Лейбниц активно отстаивал свой приоритет[1] в открытии дифференциального и интегрального исчисления.

Создание математического анализа происходило в процессе решения старых и новых задач механики. Использование нового анализа в механических проблемах дало простор для постановки новых задач, для формирования новой идеологии и понятийного аппарата теоретической механики. Однако было бы ошибочным сводить историю механики только к истории ее задач и математического аппарата. Механика, как часть системы научного мировоззрения, формировалась под влиянием конкретных исторических условий, философских, метафизических и даже теологических теорий.

Трудно переоценить роль математического анализа, теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления в современной механике. Но, кроме этого, после Лейбница в механике осталось понятие *действия*. Его «живая сила» в XIX в. была переименована в кинетическую энергию, получив при этом и ясный физический смысл, и официальный статус меры движения. Его теоретические идеи обогатили механику Галилея, Декарта, Гюйгенса, его решения задач, как правило, подтверждали результаты знаменитых современников (Гюйгенса, Ньютона, Я. и И. Бернулли, Лопиталя). Идейное наследие и методы Лейбница получили развитие в трудах его последователей — Бернулли, Вариньона, Клеро, Мопертюи, Эйлера, Даламбера и Лагранжа.

3.4. Метод Я. Бернулли

Открытие Ньютоном и Лейбницем новых принципов натуральной философии и математического анализа стало поворотным пунктом в истории механики. Дальнейшее развитие идеологии и методологии теоретической механики шло по пути совершенствования, конкретизации и математизации ее понятийного аппарата, принципов построения и анализа математических моделей движения и равновесия тел. Из разряда философских наук механика окончательно переходит в разряд математических.

---

[1] Полемика Лейбница с С. Кларком описана в [187].