

первой. Первая из сил уравнивается реакцией связи (опора A), вторая — силой инерции, равной массе точки, умноженной на касательное ускорение (по закону ускоряющих сил Ньютона). Это рассуждение относится к каждой точке маятника, то есть к маятнику в целом, и приводит к следующему принципу: **в каждый момент времени движущие силы (вес), реакции связи и силы инерции уравниваются**. Воспользовавшись этим принципом для решения своей задачи, Германн не придал ему всеобщего статуса. Это сделал позднее другой академик Петербургской академии наук, ученик И. Бернулли — Леонард Эйлер, использовавший сформулированный принцип (в своей интерпретации¹) для решения многих задач, в том числе и не связанных с колебаниями.

3.5. In magnis voluisse sat est²

Важнейшую роль в формировании идеологии и методологии механики сыграли многочисленные работы Иоганна Бернулли, принесшие ему мировую известность. Эти работы начинались как развитие идей математического анализа и динамики Лейбница и вылились в обширный цикл задач, актуальных в конце XVII — начале XVIII вв. Задач, сформулированных Галилеем, Гюйгенсом, Лейбницем, Ньютоном, им самим, как правило, решаемых методами дифференциального и интегрального исчисления³ на основе принципов и законов механики XVII в. Для истории теоретической механики наибольший интерес представляет сочинение «Рассуждение о законах передачи движения» [136], представленное в 1724 г. на конкурс Парижской академии наук. Знакомство с содержанием этой работы позволит получить представление о состоянии механики в первой трети XVIII в.

¹ Пусть тело движется по плоскости под действием силы F , приложенной к центру масс тела. Разложим F на касательную (F_τ) и нормальную (F_n) составляющие. Сила F_n уравнивается реакцией плоскости, сила F_τ вызовет ускоренное движение или силу инерции ($m\vec{a}$). Если силу инерции направить противоположно ускорению \vec{a} , то можно считать, что она «уравнивает» F_τ . Иначе говоря, в каждый момент времени \vec{F} , $m\vec{a}$ и реакции поверхности уравниваются [40, с. 141]. Такова Эйлерова трактовка идеи Бернулли — Германна.

² «Довольно и того, что хочешь быть среди великих» — девиз И. Бернулли в сочинении, представленном Парижской академии наук на конкурс 1724 года.

³ Термин «интегральное исчисление» ввел И. Бернулли.



Иоганн Бернулли

Вопрос, предложенный для конкурсного решения, состоял в следующем: «Каковы те законы, согласно которым совершенно твердое движущееся тело приводит в движение другое такое же, находящееся в покое или в движении, тело, которое оно встречает в пустоте или же в среде?» [6, с. 47]. По-видимому, подобная постановка проблемы свидетельствовала о некотором недоверии принципам механики Декарта, Ньютона, Гюйгенса, Лейбница и должна была стать стимулом для поиска новых принципов и более убедительных доказательств. В ясной постановке проблемы оказалась одна терминологическая неопределенность. Какое тело следует считать «совершенно твердым»? Разночтения в этом вопросе членов конкурсной комиссии и И. Бернулли не позволили ему получить еще одну порцию международного признания и сумму в 2500 ливров, предназначенных для победителя¹ конкурса.

Разъяснение своей позиции («Философ и геометр, обязанные соблюдать в своих доказательствах ясность и очевидность, должны заботливо избегать какой бы то ни было двусмысленности в выражениях» [6, с. 47–48]) автор начинает с определения понятия «твердость». Он пишет: «Обычно тело считают твердым, если его части, оставаясь в покое одна относительно другой, таковы, что их связи могут быть разрушены лишь какой-либо внешней силой, и считают, что эта твердость тем более совершенна, чем большую силу необходимо применить, чтобы отделить части этого тела друг от друга. В соответствии с этим понятием, тело будет совершенно твердым, в смысле абсолютного совершенства, когда его части не смогут быть разделены никаким конечным усилием, каким бы большим мы это усилие ни предположили» [6, с. 48].

Но И. Бернулли не может принять такое определение как нереальное. Он называет его химерой, противоречащей основному закону

¹И. Бернулли заслужил похвалу Королевской академии наук, а премию получил Мазьер. Однако в том же году И. Бернулли разделил с сыном Даниилом первую премию (той же академии) конкурса на тему: «О средствах сохранять равномерность водяных или песочных часов на море». Основные положения теории передачи движения (удара) Мазьера, опубликованной в 1727 г., состояли в следующем: причина упругости тела (пружины) не может быть по воле разума (Бог или первопричина); причиной не может быть твердое тело; поэтому эфир (тончайшая материя, жидкость) является основной причиной упругости пружины; эфир циркулирует в недоступных нашим чувствам каналах, пронизывающих тело (пружину); эфир состоит из бесконечного числа вихрей, вращающихся вокруг своих центров; относительное равновесие вихрей осуществляется под действием бесконечно больших центробежных сил; центробежная сила вихрей является физической причиной упругости; сила упругости тел является причиной изменения их скорости.

природы — «закону непрерывности, в силу которого все, что выполняется, выполняется через бесконечно малые изменения. Здравый смысл, кажется, диктует то, что никакое изменение не может осуществляться скачками: *Natura non operatur per saltum*¹, ничто не может перейти от одной крайности к другой, не переходя через все промежуточные ступени» [6, с. 49]. Реальные тела не могут отвечать требованиям «совершенной твердости», они разрушаемы, деформируемы. Но их разрушение не является мгновенным, скачкообразным, оно является непрерывной последовательностью стадий, протекающих некоторое (пусть малое!) время. Поэтому все твердые тела по своим физическим свойствам ассоциируются с телами деформируемыми (мяч, наполненный воздухом; пружина). В итоге автор приходит к следующему определению: «... тело будет твердым..., если его чувственные части с трудом меняют свое положение и если части этого тела, сдвинутые вследствие удара другого тела, в незаметный промежуток времени очень быстрой и упругой пружинистостью приводятся в свое первоначальное положение. Эта упругость совершенна, если все сдвинутые части восстанавливают свое первоначальное состояние; она несовершенна, если некоторые из них в него не возвращаются. Совершенную упругость можно назвать тугостью» [6, с. 55–56]. Таким образом, понятию «совершенной твердости» соответствует «бесконечная тугость», по Бернулли («... тело будет бесконечно тугое, если нужно бесконечное давление для конечного сжатия этого тела или если нужно конечное давление для бесконечно малого сжатия его» [6, с. 56]).

В основу теории передачи движения И. Бернулли полагает законы инерции и равенства действия — противодействия абсолютно упругих тел. Обсуждая физическую сущность соударения тел, он предлагает модель трубки, закрытой с одного конца, внутри которой перемещается поршень. Перемещение поршня под действием внешней силы (удара) приводит к увеличению внутреннего давления воздуха, гасящего удар по поршню и далее возвращающего поршень в начальное положение. Это — своеобразный аналог пружины, упругие свойства которой определяются ее геометрическими размерами (длиной). И сила пружины по своему действию аналогична силе веса.

Опыты показали, что упругость воздуха пропорциональна его плотности. Для трубки постоянного диаметра это означает, что сила

¹ «Природа ничего не делает скачком». Это одно из основных положений философии Лейбница.

упругости воздуха обратно пропорциональна длине $eA = x$ (рис. 3.5.1). Пользуясь законом $dv = F dt$, где $dt = \frac{dx}{v}$, Бернулли получает $dv = \frac{1}{x} \frac{dx}{v}$ или $v dv = \frac{dx}{x}$ и далее интегрирует это дифференциальное уравнение с учетом начальных условий. Обратим внимание на то, что полученное выражение устанавливает пропорциональность живой силы активной силе и является, говоря современным языком, аналогом теоремы об изменении кинетической энергии.

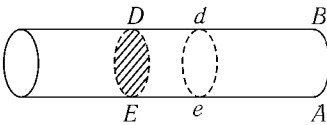


Рис. 3.5.1

Поведение поршня в трубке фактически является моделью движения снаряда в стволе пушки. Это обстоятельство позволяет Бернулли дать несколько полезных рекомендаций по поводу свойств пороха и оптимальной длины ствола для получения наибольшей скорости снаряда в момент его вылета.

В третьей главе работы вводятся основные понятия и принцип равновесия, впервые сформулированный автором в письме Вариньону (26.01.1717) и получивший позднее высокую похвалу Лагранжа.

«Определение I. *Виртуальной скоростью* я называю ту скорость, которую приобретают две или несколько сил, находящихся в равновесии, когда им сообщают небольшое движение. Или, если эти силы уже находятся в движении, то виртуальная скорость есть элемент скорости, на который увеличивается или уменьшается скорость каждого тела, за бесконечно малое время, если считать направление этого элемента совпадающим с направлением скорости» [6, с. 71–72].

Понятие виртуальной скорости является одним из основных в современной аналитической механике. Оно формировалось на протяжении всей истории механики, но впервые получило четкое определение в работах Бернулли. В уже упомянутом письме Вариньону он пишет: «Представьте себе несколько различных сил, которые действуют по различным направлениям, чтобы держать в равновесии точку, линию, поверхность или тело; представьте также, что всей системе этих сил сообщают малое движение или параллельно самой себе по какому-нибудь направлению, или же вокруг какой-нибудь неподвижной точки. Вам будет легко понять, что при этом движении каждая из сил продвинется или отступит по своему направлению, за исключением тех, которые направлены перпендикулярно к направлению малого движения. В этом

последнем случае эти — одна или несколько сил — не продвинулись вперед и не отступят назад, так как эти продвижения или отступления, называемые мною виртуальными скоростями, суть не что иное, как то, на что увеличивается или уменьшается линия направления каждой силы при этом малом движении; эти увеличения или уменьшения можно определить, если из конца линии направления какой-либо силы опустить перпендикуляр на линию направления, взятую в соседнем ее положении после малого движения, на которой он (перпендикуляр) отсечет маленькую часть, которая и будет мерой виртуальной скорости этой силы» [6, с. 262–263]. Эта конкретизация понятия виртуальной скорости ясно показывает и представление Бернулли о силе как о направленном отрезке («линия направления»), произведение которого на виртуальную скорость характеризует состояние тела. Эта характеристика названа им «энергией».

Дав определения живой силы («... та сила, которая пребывает в равномерно движущемся теле») и мертвой силы («... та, которую получает тело без движения, если оно побуждается и принуждается к движению, или же, которая побуждает двигаться быстрее или медленнее, если тело уже находится в движении»), автор формулирует основной принцип: «Два фактора находятся в равновесии, то есть имеют равные моменты, когда их абсолютные силы находятся в обратном отношении к своим виртуальным скоростям, — безразлично, находятся ли действующие одна на другую силы в движении или в покое» [6, с. 72]. По сути этот принцип — прообраз общего уравнения динамики, сформулированного Лагранжем через 60 лет.

Отметим, что требование равномерности движения в определении живой силы не является обременительным, так как речь идет о бесконечно малом движении, фактически о мгновенной скорости. Бернулли утверждает, что «это — обычный принцип статики и механики», поэтому он не нуждается в доказательствах. Однако следует иметь в виду, что этот старейший принцип ранее применялся для изучения только равновесия тел. Но, возможно, именно этот принцип навел Декарта на мысль о *законе сохранения количества движения*, подтверждающем всеобщность принципа. Для Бернулли же закон Декарта является следствием общего принципа.

Исходя из галилеевых законов падения тел, Лейбниц установил, что живая сила тела равна произведению его массы на квадрат скорости. Бернулли приходит к такому же выводу исходя из других сообра-

жений. Если рассмотреть взаимодействие двух тел A и B , соединенных пружиной (это его модель взаимодействия), то центр тяжести C тел A и B всегда будет покоиться. Это означает, что «живая сила тела $B(A)$ » является полным результатом действия части $CB(CA)$ пружины». Результат же действия пружины пропорционален ее удлинению (длине). Если обозначить $f(F)$ — живую силу тела $A(B)$, $a(b)$ — скорость тела $A(B)$, то

$$\frac{f}{F} = \frac{CA}{CB}, \quad \frac{CA}{CB} = \frac{a}{b}.$$

Из закона сохранения количества движения¹ $aA = bB$. В таком случае

$$\frac{f}{F} = \frac{a}{b} \cdot \frac{aA}{bB} = \frac{Aa^2}{Bb^2}.$$

После введения меры живой силы как произведения массы на квадрат скорости подробно обсуждаются природа и свойства живых сил, способы их измерения, приводится аналог теоремы об изменении кинетической энергии, который используется как метод решения задач, но не объявляется в качестве возможного принципа механики.

Законы соударения тел (определения скоростей после удара) Бернулли получает основываясь на идее относительности движения в стиле Гюйгенса. Для этого он добавляет достаточно очевидную аксиому («предложение П») о том, что относительные движения тел в результате удара не зависят от движения плоскости, в которой происходит удар (движение). При этом вводится понятие «количество направления», позднее вошедшее в механику как «количество движения центра масс». Полученные результаты, по мнению автора, обобщают результаты Гюйгенса в теории удара.

Современное понятие кинетической энергии тела по своей математической форме мало чем отличается от понятия живой силы. Поэтому история формирования понятия живой силы, трансформация его физического содержания не просто любопытна, а является способом освоения понятия кинетической энергии, его роли в современном понимании природы и описании движения тел. Бернулли указывает, что мертвая сила оказывает давление, она производит движение или вызывает «сопротивление препятствия», называемое ныне *реакцией связи*. Эта реак-

¹Массу тела $A(B)$ Бернулли, как это было общепринято, ассоциирует с самим телом.

ция связи всегда равна и противоположна действующей силе. Примерами мертвой силы являются силы тяжести, упругости пружины. Природа живой силы совершенно отлична. Эта сила возникает и исчезает не мгновенно, а за некоторое время; она непрерывно производится в теле и может в нем сохраняться после прекращения действия вызвавшей ее причины; «она эквивалентна той части причины, которая израсходовалась производя ее, ибо всякая действующая причина должна быть равна своему действию, полностью выполненному. Тело, получающее эту силу, если оно не задерживается никаким препятствием, не оказывает никакого противодействия этой силе за исключением того, которое зависит от инерции, всегда пропорциональной массе; . . . по мере того как тело воспринимает новые доли силы, причина, их производящая, должна их в той же степени терять . . . Именно эту силу, передаваемую телу, приведенному в движение посредством истощения давления пружины, и нужно называть собственно «живой силой». Благодаря ей тело и переносится с одного места в другое с известной скоростью, большей или меньшей в соответствии с энергией пружины» [6, с. 95–97]. Кроме этого, автор добавляет, что живая сила может быть израсходована на производство мертвой силы, например, на сжатие пружины. И степень ее сжатия будет равна той, которая была необходима для приобретения данной живой силы.

«В этом именно равенстве и состоит сохранение силы тел, находящихся в движении, так как очевидно, что ничтожная часть позитивной причины не может исчезнуть, не произведя взамен такого действия, при помощи которого эта потеря может быть восстановлена» [6, с. 98].

Остановливаясь далее на заслугах Лейбница во введении понятия живой силы, формулировке принципа сохранения живых сил, Бернулли выражает искреннее удивление и сожаление по поводу неприятия понятия живой силы сторонниками Ньютона и некоторыми французскими учеными¹. Себя он называет первым последователем Лейбница. «Надо сказать, что доказательства Лейбница мне казались² достаточно сильными, чтобы решиться принять его взгляд, ибо я признаю, что эти доказательства, будучи непрямыми и не будучи извлеченными из существа вопроса, о котором идет речь, убедить меня не могли. Однако они дали мне случай над этим задуматься. И лишь после длительного и серьезного размышления я нашел, наконец, средство убе-

¹Bignon, Catelan, Mairan, Louville.

²Это было 28 лет назад (в 1686 г.).

доть самого себя при помощи прямых доказательств, стоящих выше всех возражений. Лейбниц, которому я их сообщил, был мне благодарен, — они послужили ему для привлечения последователей и привели к его взгляду некоторых из тех, которые раньше были втянуты в длительный спор с ним, так как не были полностью разубеждены его рассуждениями» [6, с. 101–102].

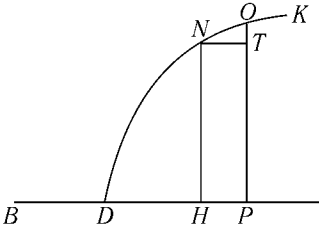


Рис. 3.5.2

Сравнение и измерение живых сил Бернулли сводит к сравнению и измерению упругих сил соответствующих пружин — сил, пропорциональных удлинению пружин. Возвращаясь к вопросу о математическом выражении живой силы, он приводит следующие рассуждения. Пусть BD — длина пружины, DH — траектория точки D (рис. 3.5.2), DNK — кривая скоростей, $BD = a$, $DH = x$, $HP = NT = dx$, $Hn = v$, $TO = dv$. «Элементарное приращение скорости в H , то есть дифференциал TO или dv , согласно известному закону ускорения, пропорционально произведению движущей силы, то есть давления p , и малого времени, в течение которого тело проходит дифференциал HP , то есть dx » [6, с. 113]. Бернулли записывает¹:

$$dv = p dt = p \frac{HP}{HN} = p \frac{dx}{v},$$

$$v dv = p dx; \quad \frac{1}{2}v^2 = \int p dx.$$

Возможно, нелюбовь к понятию *количества движения* помешала Бернулли приравнять произведение $p dt$ к dmv (а не к dv), как того требовал известный закон ускоряющих сил (Ньютона). В этом случае он смог бы получить выражения теоремы об изменении кинетической энергии в дифференциальной и интегральной (с добавлением константы) формах. А интегральная форма привела бы его и к соответствующему закону сохранения. Но едва ли можно всерьез упрекать Бернулли

¹ Аналогичные равенства были получены Вариньоном в работе 1700 г. В 1707 г. он получил правильное выражение (дифференциальное и интегральное) для теоремы об изменении кинетической энергии.

за то, что он не стремился писать свою механику на понятном нам языке¹. У автора здесь совсем иная цель. Он стремится к оценке величины живой силы и делает это, в соответствии с традицией той эпохи, в форме отношений. Так, в первом следствии из полученного результата делается вывод о том, что «живые силы относятся как произведения масс на квадраты скоростей». В третьем следствии рассматривается случай постоянного давления p , откуда следует параболичность кривой скоростей DNK (парабола с параметром $2p$). Четвертое следствие устанавливает аналогию между постоянной силой давления и весом тела в задаче Галилея о падении тяжелых тел. Это означает, что «ускорение шаров в этом случае следует тому же закону, которому следуют падающие весомые тела». И пятое следствие говорит о том, что и в задаче о падении тяжелых тел, и в задаче о движении под действием постоянной силы пружины проходимые расстояния пропорциональны живым силам. Этот вывод оправдывает измерение Лейбницем живых сил высотами, с которых падали тела или на которые поднимались.

Далее автор приводит экспериментальные доказательства. Шарики, равные по величине, но разного веса, падали с различных высот на мягкое вещество (сало, гончарная глина) с горизонтальной поверхностью. Многочисленные опыты показали, что углубления от шариков в мягком веществе «равны, когда шарики падали с высот, обратно пропорциональных их весам. Из равенства углублений следует, что в момент начала погружения шарики имеют одинаковую силу. Эта сила пропорциональна углублению, высоте падения, а по закону Галилея — v^2 . Таким образом,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2^2}{v_1^2}.$$

Во втором эксперименте рассматривается косою абсолютно упругий удар двух шаров A и C (рис. 3.5.3).

В момент удара (шар A в положении B) движение (скорость) шара B раскладывается по направлению CB (проходящему через центры шаров) и перпендикулярному — BE . В результате удара шар B теряет составляющую скорости по направлению BCD (передает эту скорость шару C), равную FB , и продолжает движение по направлению BE со скоростью AF . Третий эксперимент является обратным второму: ша-

¹Если под давлением p понимать удельное давление, приходящееся на единицу массы тела, то теорема энергии приобретает вполне законченный вид.

ры E и D движутся по перпендикулярным направлениям EB и DC , в момент удара гасится скорость DC шара $C(D)$, а шар $B(E)$ приобретает равную ей скорость BF в направлении BF . Показывается, что отношение живых сил до и после удара в первом случае будет равно $\frac{AB^2}{AF^2}$,

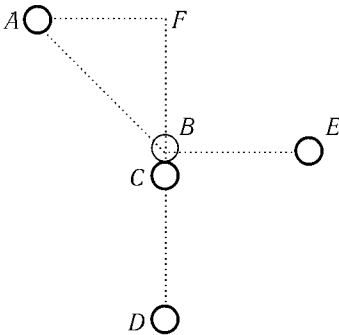


Рис. 3.5.3

во втором случае — обратному отношению. Далее аналогичные выводы делаются на примере мысленных экспериментов, связанных с ударом шара о пружины.

Возвращаясь к законам *прямого удара абсолютно упругих тел*, Бернулли демонстрирует как из закона сохранения количества движения до и после удара получить соответствующий закон сохранения живых сил, впервые установленный, но не осознанный Гюйгенсом. Он предлагает считать эти законы единым законом, имеющим разные математические

выражения. По-видимому, именно так отнесся к ним Гюйгенс, не придав своему равенству статуса нового закона сохранения — сохранения живой силы как основной меры движения. «Если не прибегать к помощи природы и к ее первым началам, то самые важные теоремы вырождаются в простые спекуляции», — поучительно восклицает Бернулли, имея в виду важность понимания физической сущности движения. Но здесь же он восторгается «полным согласием между законами природы и законами геометрии, согласием, наблюдаемым настолько постоянно и во всех обстоятельствах, что кажется, будто природа советовалась с геометрией, устанавливая законы движения» [6, с. 132]. Для Бернулли законы сохранения, как математический, теоретический аналог философского закона равенства действующих причин и их результатов, являются залогом стабильности природы, ее порядка. Эта мысль чрезвычайно важна для статуса законов сохранения (как основополагающих принципов теории и методов решения задач) в последовательном развитии физики и теоретической механики.

Рассматривая далее задачу об ударе одним телом нескольких (системы) тел, Бернулли использует ее решение для изучения движения тел в сопротивляющейся среде. Представляя среду как множество

шариков-молекул, он отождествляет силу сопротивления среды с суммарной силой последовательных ударов тела о шарики-молекулы. Исследование начинается с задачи об ударе тела C о два покоящихся шара A и B одинаковой массы (рис. 3.5.4).

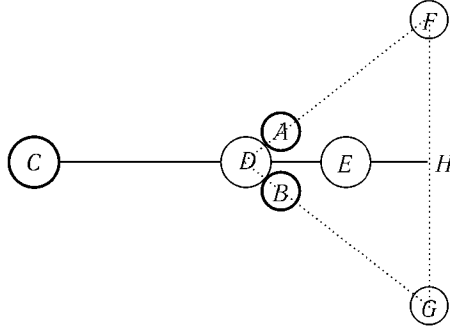


Рис. 3.5.4

Направления движения шаров после соударения соответствуют линиям CDE (для шара C), DAF и DBG (для A и B). Обозначая скорость шара C через $CD = a$, скорость C после удара (в положении D) через $DE = x$, скорости шаров A и B через AF и BG , равные y , массы A или B через n , а массу C через m , Бернулли составляет уравнение сохранения количества направления¹:

$$ma = mx + \frac{2q}{p} ny.$$

При этом предполагается, что точка H является серединой прямой, соединяющей центры шаров A и B в положениях F и G , и центром тяжести шаров F и G , а $\frac{DH}{DF} = \frac{q}{p}$. Записывая далее уравнение сохранения живых сил до (ma^2) и после удара $(mx^2 + 2ny^2)$

$$ma^2 = mx^2 + 2ny^2,$$

автор решает полученную систему двух уравнений и находит, что

$$x = \frac{p^2 ma - 2q^2 na}{p^2 m + 2q^2 n}, \quad y = \frac{2pq ma}{p^2 m + 2q^2 n}.$$

¹Количества движения системы тел в данном направлении.

Дальнейший анализ этих результатов для различных углов FDH и соотношений между массами позволяет получить конкретные величины скоростей после удара.

Полученные формулы приводят Бернулли к двум новым оптимизационным задачам: 1) при какой величине угла $FDH(GDH)$ относительная скорость шаров A и B будет наибольшей, 2) при каком угле $FDH(GDH)$ скорость шара $A(B)$ в направлении $AF(BG)$ будет наибольшей. Для решения этих задач используется метод максимумов, состоящий в нахождении дифференциала dy и приравнении его нулю. Дальнейшее обобщение полученных формул связано с произвольным увеличением количества пар шаров (A, B) и приводит автора к следующим результатам: предлагаемая теория позволяет определить «абсолютные действия сопротивления среды»; среда «оказывает движущимся в ней телам сопротивление, пропорциональное квадратам их скоростей»; «можно найти средство точно определить, сколько в действительности тело . . . потеряет в своей скорости после того, как им будет пройдено данное расстояние»; «исследование этого нового вопроса столь же любопытно, сколь и полезно на практике. Оно может привести к законам различных явлений, и тем достойнее было бы в него углубиться, что никто еще этим не занимался»; «величина потери скорости зависит и от формы движущегося тела», и от отношения плотности тела к плотности среды. Сделанные выводы используются для получения расчетных данных¹ движения в воздухе свинцовой пули (коноида), куба, прямого конуса. Выводится закон движения тела по траектории для случая *квадратичного закона сопротивления*, определяются кривые остаточных скоростей и времен. Задача обобщается для случая сопротивления среды пропорционального произвольной степени скорости. Это ответ на вызов² ньютонианца Кейля, ранее опубликованный в Acta eruditorum (май, 1719).

Последняя глава книги называется «Новый способ определения центра качания сложного маятника при помощи теории живых сил . . . ». Задача об определении центра качания физического маятни-

¹Если D — диаметр пули, то на расстоянии $3700D$ скорость уменьшится на половину; если a — сторона куба, то уменьшение скорости в два раза произойдет после прохождения пути $1770a$; аналогичное уменьшение скорости конуса с диаметром основания D произойдет через $924D$, если он движется вершиной вперед, и через $462D$ при движении основанием вперед.

²Ньютон решил задачу для случая $F_{\text{сопр}} \sim v$. Кейль предложил Бернулли решить задачу для $F_{\text{сопр}} \sim v^2$. Он решил задачу и для $F_{\text{сопр}} \sim v^2$, и для $F_{\text{сопр}} \sim v^n$.

ка, сформулированная в первой половине XVII столетия и привлекавшая внимание всех видных механиков, наряду с задачами о падении тяжелых тел и ударе стала своеобразным полигоном для формулировки новых принципов механики и проверки — эффективности новых методов решения задач. Поэтому обращение И. Бернулли к этой задаче было вполне естественным. Первые публикации решения назывались «О природе центра качания» [137] и «Новая теория центра качания» [135].

И. Бернулли, как и его брату, принцип¹, положенный Гюйгенсом в основу его решения, казался недостаточно естественным, и он пользуется принципом сохранения живых сил². Пусть физический маятник состоит из трех грузов A , B и C (рис. 3.5.5), связанных друг с другом или нанизанных на несгибаемый стержень AH и совершающих колебания вокруг оси H . Маятник опускается из горизонтального положения AH в верти-

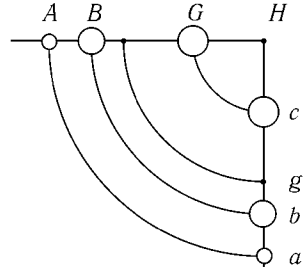
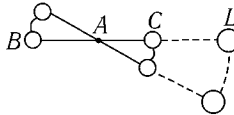


Рис. 3.5.5

¹ «...если после того, как сложный маятник опустился с данной высоты и достиг вертикального положения, вдруг разделить на составляющие его элементарные грузы так, чтобы каждый из этих грузов поднимался отдельно со скоростью, приобретенной им в момент своего отделения, то центр тяжести этих грузов сможет подняться не выше той высоты, с которой он опустился» [6, с. 167].

² В работах 1713–1714 гг. он пользуется иной идеей, очень близкой к методу его брата (работы 1691 и 1703 годов), изложенному в начале этого параграфа. Суть идеи состоит в замене физического маятника изохронным ему математическим («мнимым») маятником равной массы. Эта замена демонстрируется на примере маятника BAC , вращающегося около A и отождествляемого с маятником ACL , в котором мнимая точка L имеет отрицательное ускорение свободного падения. Вес тела B возбуждает в точке L мнимую силу (точнее, момент силы), которую Бернулли называет «возмущающей силой» или «возмущающим средством» (*force ou la vertu agitative*). Равенство моментов сил, следующее из аналогичности маятников ABC и BCL , позволяет найти искомое расстояние AL .



Эту идею автор распространяет на произвольную систему тел. Далее результат обобщается на случай колебаний системы тел в среде. Работа [135], безусловно, является важнейшей прелюдией создания механики системы тел.

кальное Ha ; приобретенные при этом скорости грузов относятся друг к другу как расстояния до H (следствие негибкости стержня AN), то есть $v_A \sim AN = a$, $v_B \sim BH = b$, $v_C \sim CH = c$.

Если представить, что грузы A , B и C свободны, то по закону Галилея в точках c , b и a скорости $v_c \sim \sqrt{Hc}$, $v_b \sim \sqrt{Hb}$, $v_a \sim \sqrt{Ha}$. Если $Hg = x$, то $v_g \sim \sqrt{x}$, $Hc = cx$, $Hb = bx$, $Ha = ax$, $v_c \sim \sqrt{cx}$, $v_b \sim \sqrt{bx}$, $v_a \sim \sqrt{ax}$. Тогда из принципа сохранения живых сил (сумма живых сил в горизонтальном и вертикальном положениях одинакова)

$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 + m_C v_C^2 = m_A v_a^2 + m_B v_b^2 + m_C v_c^2$$

следует

$$x = \frac{m_A a^2 + m_B b^2 + m_C c^2}{m_A a + m_B b + m_C c}.$$

В «Добавлении к рассуждению о законах передачи движения тел», написанном в 1726 г., И. Бернулли обсуждает свою идею внутренней структуры тел и происходящих там процессов: тело пористо, и поры заполнены некоторой жидкостью, циркулирующей внутри тела как следствие внешних взаимодействий тел, связанных с деформацией, изменением формы тел. В процессе своих рассуждений автор обсуждает основы будущей гидродинамики. Упругость тел объясняется действием центробежных сил вихрей жидкости («эфира») в порах тел. Эта попытка Бернулли проникнуть в тайны микромира не получила дальнейшего развития и заслуживает внимания только с исторической точки зрения.

Продолжением «Рассуждения о законах передачи движения» стала работа И. Бернулли «Об истинном значении живых сил и их применении в динамике» [138], где уточняется понятие живой силы: «Живая сила состоит не в действительной работе, а в способности к действию: она существует и тогда, когда не действует и когда не имеет объекта, на который она могла бы действовать. Так, например, натянутая пружина или же, скажем, тело с установившимся движением имеют в себе способность к действию, хотя бы вне их, и не было ничего такого, на чем они могли бы проявить эту способность...» [6, с. 219]. Он считает, что живую силу «лучше было бы называть «способностью к действию», вкладывая в нее энергетический, потенциальный смысл. Из живой силы «ничего не может пропасть без того, чтобы мы снова не нашли эту потерю в произведенном действии; ... живая сила всегда

сохраняется . . . , находившаяся до действия в одном или нескольких телах . . . , после действия обязательно встретится нам в другом теле или в других нескольких телах, если только она не останется неизменной в прежних телах.

Это и есть то, что мы называем *сохранением живых сил* [6, с. 221].

Дальнейшее обращение Бернулли к идее сохранения живых сил показывает, что сохранение полной механической энергии тел было осознано им не только на физическом уровне, но и получило свое математическое воплощение:

$$P dS = V dV,$$

где P — «ускорительная сила», dS — элемент пройденного пути, V — скорость. Записанное уравнение автор использует для решения задач¹ и называет очень распространенным принципом динамики, «в правильности которого никто не сомневается».

Этот принцип далее используется для доказательства уже упоминавшегося принципа Торричелли–Роберваля–Гюйгенса о высоте центра тяжести системы тел: «В настоящее время я полагаю, что истинность этой аксиомы Гюйгенса доказана и подкреплена теорией живых сил, так что на будущее время она законно должна занять место среди тех предложений динамики, которые считаются наиболее достоверными» [6, с. 243–244].

Бернулли утверждает, что закон сохранения не является угрозой исчезновения движения, он является подтверждением единства физической сущности движения тел. «Если бы Ньютон, — пишет Бернулли, — понял раньше истинную природу живых сил, то он, конечно, не установил бы два различных начала: одно — для сообщения телам движения, другое — для сохранения их движения. Ведь то же самое начало, посредством которого движение сообщается, приводит и к тому, что движение сохраняется. Это начало заключается не в количестве движения, а в живой силе. Тем самым, делается совершенно ясно, что движение по природе вещей никогда не может исчезнуть, чего, по-видимому, боялся Ньютон, напуганный ложными страхами» [6, с. 244–245]. Цитируя «Оптику» Ньютона², Бернулли ясно выражает свое отношение

¹В задаче о движении двух связанных нитью тел под действием силы тяжести Бернулли полагает $P = g$. Это обозначение ускорения свободного падения стало общепринятым в механике.

²«Для того, чтобы приводить тела в движение, вообще необходимо какое-то другое начало (кроме силы инерции). Когда же они приведены в движение, нужно

к важности теории живых сил: «Конечно, не в наших силах заставить кого-либо признать, что начинается день, хотя бы было видно, что над горизонтом поднимается солнце... Если бы эту теорию открыл великий Ньютон, то, — кто знает, — не рукоплескала ли бы ему уже давно вся Великобритания» [6, с. 244]. Сопоставление решений задач методом живых сил и другими методами¹ (в частности, решение Тейлором задачи о колебаниях струны) окончательно убеждает Бернулли: «И если бы Тейлор был теперь жив и имел бы хоть каплю благородства, то, возможно, это совпадение побудило бы его принять теорию живых сил» [6, с. 249].

Одной из самых известных задач, сформулированных и решенных И.Бернулли, была задача о брахистохроне (1696), то есть о линии, по которой тело проходит от одной точки до другой за кратчайшее время. В своем решении Бернулли исходил из принципа Ферма: «... луч света, проходящий из более редкой среды в более плотную, отклоняется к перпендикуляру таким образом, что за данный промежуток времени луч (который по предположению проходит последовательно от точки, испускающей свет, до освещаемой точки) совершает кратчайший путь» [6, с. 29–30]. Ферма показал, что синус² угла падения относится к синусу угла преломления как разреженности сред, или в обратном отношении их плотностей, или в отношении скоростей луча (точки) в средах. Этот результат был подтвержден Лейбницем (*Acta eruditorum*, 1682) и Гюйгенсом («Трактат о свете»). Считая, что среда имеет переменную плотность, Бернулли разбивает ее на бесконечно большое количество горизонтальных слоев с постоянной плотностью. При этом луч (шарик), перемещаясь от слоя к слою, будет описывать некоторую ло-

опять другое начало для сохранения движения этих тел». Далее Ньютон приводит явно ошибочный пример несохранения количества движения.

¹Решение Германа задачи о движении двух тел, связанных нитью, не совпало с решением И.Бернулли. По этому поводу последний пишет: «... не раз замечалось, что этот почтенный муж, трактуя то там, то здесь вопросы динамики, часто говорил вздор. Это я говорю не для того, чтобы сколь-нибудь умалить его достоинства, а для того, чтобы другие учились осторожнее обращаться с этим вопросом, до сих пор еще покрытым густым туманом. Они должны видеть, что даже великие люди частенько спотыкались в них. В этом Германну уподобляется и Ньютон, которому иногда также приходилось расплачиваться за свои грехи, как я показал это выше, а еще больше в других местах» [6, с. 260].

²До Эйлера под синусом угла понималась длина перпендикуляра, опущенного в единичном круге из конца подвижного радиуса на неподвижный. А «полным синусом» назывался радиус круга.

маную, каждое звено которой является траекторией быстрейшего перемещения точки внутри отдельного слоя (от точки к точке). Эта линия будет траекторией точки, проходящей через среду, с разреженностью, пропорциональной скорости вертикального падения точки (с соответствующим ускорением).

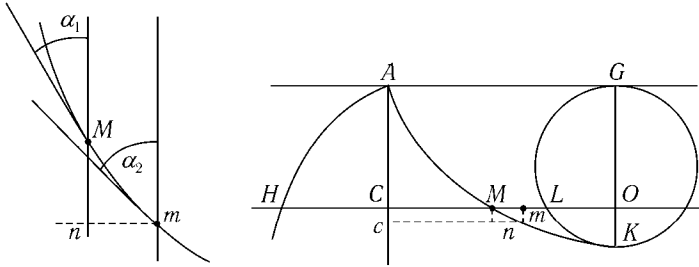


Рис. 3.5.6

Пусть точка движется из положения A (рис. 3.5.6) по искомой кривой AM , со скоростями, задаваемыми кривой AH , $AC = x$, $CM = y$, $Cc = dx$, $mn = dy$, $Mm = dz$, $CH = t$,¹ $a = \text{const}$,¹ $\sin \alpha_1 \approx dy$, $\sin \alpha_2 \approx dz$. На основании принципа Ферма

$$\frac{dy}{t} = \frac{dz}{a}.$$

Но $dz = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$, поэтому полученное равенство приводит к уравнению

$$a^2(dy)^2 = t^2(dx)^2 + t^2(dy)^2,$$

из которого следует дифференциальное уравнение для траектории AM :

$$dy = \frac{t dx}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

По закону Галилея, кривая AH является параболой

$$t^2 = ax.$$

¹Буквой t обозначена скорость (пропорциональная времени) в положении M , скорость за время перехода из M в m , т. е. по dz , считается постоянной, равной a .

В таком случае полученное дифференциальное уравнение принимает вид:

$$dy = \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx.$$

Решение этого интеграла и является искомой кривой AM — брахистохроной.

Но Бернулли обращает внимание и на то, что брахистохрона является той же самой кривой, которая была получена Гюйгенсом при исследовании колебаний маятника. Это *циклоида*. Действительно, если считать, что круг GLK диаметром a катится без проскальзывания по линии AG , то можно показать, что точка K его окружности будет описывать кривую (циклоиду)

$$y = \int \sqrt{\frac{x}{a-x}} dx + C,$$

где $x = AC$, $y = CM$.¹ Это совпадение, отмечает автор, «вытекает только из основного положения Галилея; уже из этого можно было бы заключить, что это положение находится в согласии с природой. Природа всегда действует простейшим образом, — так и в данном случае она с помощью одной и той же линии оказывает две различных услуги» [6, с. 36–37].

Отметим, что решение задачи о брахистохроне было чисто кинематическим, основанным на законах Ферма и Галилея, и использовало идеи нового математического анализа. Оно было традиционным, но сама постановка задачи — определение движения, отвечающего некоторому экстремальному критерию, — оказалась чрезвычайно перспективной. Перспективной и с точки зрения формирования нового раздела математики — вариационного исчисления, как метода постановки и решения экстремальных задач, и с точки зрения открытия новых принципов движения тел природы. Мысль о том, что «... природа всегда действует простейшим образом», стала отправной в поисках критериев движения и равновесия тел (минимум времени, пути, действия, высоты центра тяжести, потенциальной энергии, ...), играющих роль законов природы. И аппарат вариационного исчисления, а позднее и теории

¹Решение интеграла после замены $\sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} - \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$ не вызывает трудностей.

оптимального управления, стал одним из основных методов аналитической механики.

К задаче о брахистохроне И. Бернулли возвращался многократно¹. Искал новые решения, ставил вопрос о единственности решения. Но в августе 1697 г. в «*Journal des Scavans*» он опубликовал постановку еще одной экстремальной задачи, обсуждавшейся им в переписке с Лейбницем, — о геодезических линиях: найти кратчайшую траекторию между точками на выпуклой поверхности. Задача оказалась непростой. Бернулли опубликовал свое решение только в 1742 г., хотя основная идея метода была высказана в письме Лейбницу в 1715 г. Первым же решение этой задачи опубликовал Эйлер («Комментарии Петербургской академии наук», 1732). В процессе решения задачи И. Бернулли ввел понятия пространственных координат и уравнения поверхности: «Под данной кривой поверхностью я разумею такую, отдельные точки которой (подобно точкам данной кривой линии) определяются тремя координатами: x , y , z , отношение между которыми выражается данным уравнением; эти же три координаты суть не что иное, как три перпендикулярных отрезка, проведенных из какой-либо точки поверхности к трем плоскостям, данным по положению и взаимно пересекающимся под прямыми углами» [64, с. 100].

За свою долгую жизнь² И. Бернулли внес значительный вклад в развитие новой механики. Его работы вызывали живой отклик не только современников, но и ученых следующих поколений. Он сформировал начальный круг научных интересов своих сыновей Даниила и Николая, Эйлера. Даламбер считал, что знанием математики и механики он обязан И. Бернулли. Трудно дать объективную оценку заслуг И. Бернулли в механике, не обращаясь к его математическому творчеству. Специфика теоретической механики состоит в том, что математические приемы решения задач, математический аппарат механики не есть нечто внешнее для механики, а является ее составной частью. Поэтому многие работы Бернулли-математика по своей сути имеют механическую направленность. Это работы, закладывавшие основы дифференциального и интегрального исчисления, теории дифференциальных уравнений, вариационного исчисления. Обширный перечень практических задач, сформулированных и решенных И. Бернулли, стал важ-

¹ Публикации в Мемуарах Парижской академии за 1706, 1718 гг. Работа 1706 г. («Решение задачи... об изопериметрических») посвящена решению задачи (1697) Я. Бернулли и является примером классической постановки вариационной задачи.

² Родился 27 июля 1667 г., умер 1 января 1748 г.

ной составной частью многих разделов современной механики: теории удара, теории колебаний, динамики системы точек и тел, внешней и внутренней баллистики, гидродинамики, теории (динамики) корабля¹. Особо следует отметить вклад И. Бернулли в формирование современного понятия кинетической энергии — одной из основных мер движения в теоретической механике. И Лейбниц, и Бернулли, раскрывая физический смысл живой силы (mv^2), подчеркивали, что она может быть причиной возникновения движущей (по их терминологии «мертвой») силы, то есть силы реальной, физической, как меры взаимодействия тел. Понятие живой силы позволило им дать импульс для формирования нового, отличного от ньютоновского, направления развития механики на основе принципа сохранения живых сил.

3.6. Д. Бернулли и принцип сохранения живых сил

Последовательным сторонником принципа сохранения живых сил, внесшим значительный вклад в раскрытие его физической сущности, стал следующий представитель рода Бернулли, выдающийся сын выдающегося отца (И. Бернулли) — Даниил Бернулли.

Творческий путь Д. Бернулли был очень разнообразен по научной тематике (математика, классическая механика, физиология, астрономия, физика, гидродинамика, теория упругости) и плодотворен. Как и для его дяди, отца, старшего брата Николая², стимулом для его творчества было решение практических, актуальных для начала XVIII в. научных задач. Эти задачи, отличные от задач предыдущих столетий, были интересны и по своей сути, и по перспективам практических при-

¹В 1714 г. И. Бернулли издал в Базеле трактат «Новая теория управления кораблями» [139]. Книга посвящена изучению движения парусного судна под действием силы ветра с учетом силы сопротивления воды. Рассматривается движение тела (корабля) прямоугольной, ромбовидной, круглой или овальной формы в воде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости тела, под действием постоянной силы (ветра). Решаются задачи определения углов ориентации паруса и киля, дающих наибольшую движущую силу; определения траектории и скорости судна, формы паруса (решение — цепная линия). За четверть века до Бернулли, в 1689 г., книгу с похожим названием («Теория управления кораблями» [272]) издал Б. Рено. Критические замечания к этой работе Гюйгенса и Лопиталья и заставили Бернулли предложить свою теорию.

²Н. Бернулли — один из первых академиков Петербургской академии наук, профессор кафедры математики, возглавляемой Я. Германном. Профессором той же кафедры был известный академик Христиан Гольдбах — первый конференц-секретарь и советник академии.