для всех работ по статике, какие появились с тех пор» [53, с. 21]. Столь высокая оценка вполне справедлива, так как большинство практических задач и теоретических проблем механики XVIII в. было связано с движением и равновесием тел под действием простейших систем сил (центральных, плоских, параллельных), для которых подход Вариньона был универсален. Архимедов «принцип рычага» (для покоящегося рычага первого рода — равенство моментов двух перпендикулярных ему сил, приложенных слева и справа опоры) сводится к теореме Вариньона через добавление к рычагу (слева и справа) равных, направленных по рычагу, но в разные стороны сил. При этом система двух параллельных сил приводится к системе двух сходящихся, имеющих равнодействующую.

Использование Вариньоном понятий *силы, момента, момента результирующей силы*, принципа «виртуальных скоростей», идеи сведения системы сил к простейшему виду, геометрических критериев равновесия (работа 1714 г.) и методов определения неизвестных сил (метод графостатики или веревочных и силовых многоугольников), в том числе сил-реакций со стороны опор, позднее названных *реакциями связей*, фактическое владение принципом освобождаемости от связей, получило дальнейшее развитие в прикладных и теоретических трудах его знаменитых соотечественников[1] XVIII – начала XIX в. После осознания младшим современником Лагранжа — Луи Пуансо — ограниченности как «принципа рычага», так и теоремы Вариньона для исследования произвольных систем сил, в частности, скрещивающихся сил, окончательного внедрения в механику декартовой системы координат, принципа виртуальных работ, идеи приведения произвольной системы сил к главному вектору и главному моменту, понятия и свойств *пары сил*, наконец, понятий *вектора* и *его момента* — только в XIX в. статика приобрела современный вид.

4.3. Дифференциальные методы в механике П. Вариньона

В Предуведомлении первого тома «Новой механики» [319] Вариньон определяет механику как науку о движении, его причинах и результатах — обо всем, что имеет отношение к движению тел. Именно проблемам движения тел, а не статики, с которой традиционно связы-

[1] Даламбер, Боссю, Монж, Л. Карно, Лагранж, Пуансо.

вается имя Вариньона, и посвящена основная часть его научного наследия. Это убедительно подтверждается анализом публикаций Вариньона за последние 25 лет его жизни в ежегодных сборниках «История Королевской академии наук»[1].

В марте 1699 г. Вариньон представил академии мемуар «Методы определения кривых, вдоль которых падающее тело приближается к горизонту» [299], где он развивал основные положения своей работы 1695 г., продолжавшей исследования Лейбница и братьев Бернулли по определению кривых, вдоль которых движется тело, падающее по закону Галилея.

В этой работе для случая поля параллельных сил тяжести, говоря современным языком, Вариньон, используя анализ бесконечно малых, строит простейшее дифференциальное уравнение, позволяющее ему при определенных предположениях об изменении скорости найти траекторию падающей точки. При этом приводятся следующие рассуждения.

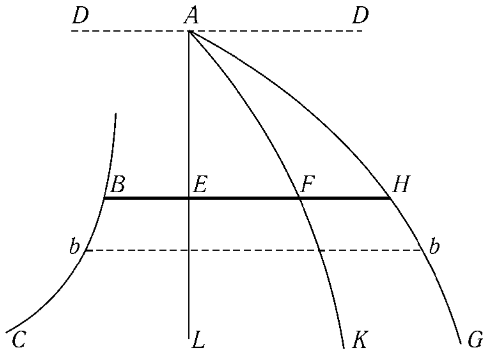

Рис. 4.3.1

Пусть DA (рис. 4.3.1) — уровень горизонта начального положения точки, AL — вертикаль, AFK и AHG — кривые изменения времени

[1]Из более 80 публикаций 14 посвящены геометрии, одна — алгебре (о нахождении решений уравнений второй и третьей степени, 1699), а все остальные — механике. Обычно при ссылках упоминается не сам ежегодник, а его составная часть — Mémoires de Mathématique et de Physique, которая далее будет называться «Мемуары».

и скорости, то есть $EF = z$, $EH = v$, ABC — искомая траектория, координаты текущей точки B которой обозначены так: $AE = x$, $BE = y$. В этом случае в момент z точка будет находиться в положении B с координатами x, y и скоростью v. Рассматривая бесконечно близкое к BH горизонтальное сечение bb, Вариньон пишет, что для прохождения пути Bb необходимо время $dz = \frac{Bb}{HE} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{v}$. Отсюда и получается дифференциальное уравнение $a\sqrt{dx^2+dy^2} = v\,dz$ $(a = 1)$, решению которого при различных предположениях относительно v и dz и посвящено дальнейшее содержание упомянутой работы. В том числе демонстрируются и решения Лейбница и Бернулли. Кроме этого, по той же схеме и столь же подробно рассматривается случай *центрального поля силы тяжести*. Отметим, что кривая скоростей AHG предполагается автором исследования произвольной, а не только «галилеевой» $(v = \sqrt{ax})$. Таким образом, здесь приводится постановка и решение наиболее общей из задач о падении тел.

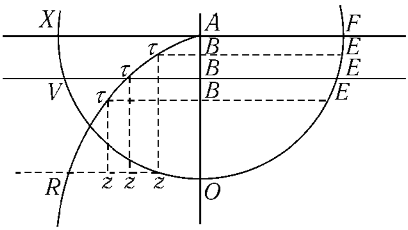

Рис. 4.3.2

В работе «Геометрический и общий способ создания клепсидров или водяных часов...» [300], представленной 29 апреля того же года, Вариньон также использует дифференциальное исчисление для нахождения кривой — образующей тело вращения, исполняющего роль емкости, из которой вытекает вода. Если FEO (рис. 4.3.2) — образующая тела вращения (вокруг AO), наполненного до уровня BE водой, вытекающей из отверстия O со скоростью v, определяемой кривой OVX $(v = BV)$, за время t, задаваемое кривой $A\tau R$ $(t = B\tau)$, то задача сводится к нахождению одной из этих кривых (FEO, XVO, $R\tau A$) по заданным двум остальным. Пусть $OB = x$, $BE = y$, поверхность воды на уровне BE равна z^2, площадь отверстия O равна c^2, тогда скорость вытекающей из O воды равна $\frac{dx}{dt}$, а из условия однородности следует, что $\frac{dx/dt}{v} = \frac{c^2}{z^2}$ или $dt = \frac{z^2dx}{vc^2}$, и, кроме этого, $\frac{dx/dt}{v} = \frac{t^2}{z^2}$; $\frac{1}{a} = \frac{c^2}{f^2}$, где $AX = a$, $AF = b$, площадь поверхности на уровне AF равна f^2, а скорость этой поверхности — 1. Предположив, что $dx = dt$, получим $\frac{dx}{dt} = 1$, $v = BV = AX = a$, $c^2 = \frac{f^2}{a}$, $\frac{dx/dt}{v} = \frac{f^2/a}{z^2}$. Исходя из подобия поверхностей AF и BE: $\frac{f^2}{z^2} = \frac{bb}{yy}$,[1] тогда $\frac{dx/dt}{v} = \frac{bb/a}{yy}$ или $dt = \frac{ayy\,dx}{bbv}$. Полученное дифференциальное уравнение далее решается для конкретных кривых скоростей и времени (в частности, рассмотрен случай $v = \sqrt{px}$), и находится выражение для кривой FEO, определяющей форму емкости клепсидров, обеспечивающей равномерное вытекание воды. Это был новый подход к задаче о клепсидрах, которым большое внимание уделяли Х. Гюйгенс, Лами, и особенно Э. Мариотт и его последователь Д. Бернулли.

Обширный цикл работ Вариньона [303–308, 313] посвящен движению тела в центральном поле сил. Эти работы идейно и методически продолжили трактаты Гюйгенса «Маятниковые часы» (1673), «О центробежной силе» (1703), «Начала» (1687) Ньютона и работы Лейбница.

Рассматривая вращение шарика, закрепленного на нити, в горизонтальной плоскости, Гюйгенс поясняет физическую природу центробежной силы и заключает, что *эта сила действует на шарик так же, как сила натяжения нити, на которой вертикально подвешен шарик, то есть центробежная сила по своему действию на шарик аналогична его тяжести*[2]. Используя чисто геометрические построения и результаты мысленных экспериментов, автор доказывает основные свойства центробежных сил, которые ныне переданы формулой $f = m\frac{v^2}{R}$, где f — центробежная сила, m — масса, v — скорость шарика, R — радиус кривизны траектории. При этом речь идет о движении шарика или маятника по окружности или конической поверхности и величина центробежной силы измеряется количеством весов шарика, или отношением диаметров окружностей, или отношением квадратов скоростей. Получены и отношения времен обращения маятников. Ньютон при рассмотрении кругового движения шарика в горизонтальной плоскости получил ту же формулу для центробежной силы, использовав сводку результатов по теории удара и геометрические построения. Примерно в одно время с Гюйгенсом и Ньютоном понятием *центробежной силы* пользовался профессор математики Пизанского университета

---

[1]Здесь и далее используются принятые во времена Вариньона обозначения квадратов величин, как bb, yy и так далее.

[2]Комментарий этих взглядов Гюйгенса был приведен ранее.

Д. А. Борелли для объяснения того, почему планеты в своем вращении вокруг Солнца не падают на него.

По-видимому, интерес к теории центральных сил возник у Вариньона под влиянием знакомства с «Математическими началами натуральной философии» Ньютона. Об этом свидетельствуют исследования 1700–1701 гг. [302–305], где автор достигает тех же результатов, что и его знаменитый современник (второй отдел первой книги «Начал» озаглавлен «О нахождении центростремительных сил»), используя дифференциальное исчисление Лейбница, ставшее с 1698 г. основным математическим аппаратом Вариньона при изучении проблем механики.

В мемуарах [302–304] 1700 г. Вариньон, рассматривая сначала прямолинейное, а затем и произвольное движение тела, впервые применяет два правила, являющиеся дифференциальной формой записи законов Ньютона:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad y = \frac{ds\,d\,ds}{dx\,dt^2} = \frac{v\,dv}{ds}, \tag{$*$}$$

где s — дуга траектории, v — скорость, y — центростремительная сила.

Анализируя задачу о центростремительной силе, направленной к фокусу эллипса, по которому движется планета, Вариньон записал дифференциальную форму уравнения эллипса в полярных координатах:

$$b \cdot dr = dz \cdot \sqrt{4ar - 4r^2 - b^2},$$

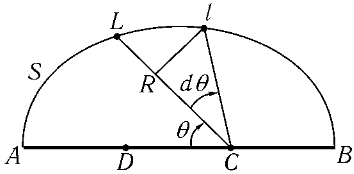

Рис. 4.3.3

где C — фокус эллипса, $CL = r$, $AL = s$, $Rl = dz = r\,d\theta$, $Ll = ds$, $Rl = dr$, $AB = a$, $CD = c$, $b^2 = a^2 - c^2$ (рис. 4.3.3). После преобразований, уравнение эллипса приняло вид:

$$\frac{4a - 4r}{r} = \frac{2b^2 ds\,d\,ds}{dt^2}.$$

Заменяя dr на dx и $\dfrac{ds\,d\,ds}{dx\,dt^2}$ на y (второе правило $(*)$), Вариньон находит выражение для центростремительной силы (точнее — ускорения):

$$y = \frac{2a}{b^2} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

В 1701 г. Вариньон опубликовал статью «Иное общее правило центральных сил» [305], где описано *получение тангенциальной и нормальной составляющих ускоряющей силы при движении тела по гиперболе и параболе.* На основе полученной Лопиталем общей формулы для радиуса кривизны он находит выражение для радиуса кривизны в рассматриваемой задаче.

Работа 1703 г. «О кривых, описываемых пересечением произвольных центральных сил, приложенных к разным точкам, лежащим как в плоскости, так и вне плоскости кривой» [306] была, как пишет сам Вариньон, инициирована Лейбницем, попросившим автора продолжить развитие его теории центральных сил, очень важной для изучения движения планет. Здесь рассматривается движение точки L по кривой Ll (рис. 4.3.4) под действием сил, исходящих из центров A, B, $C, \ldots$ и пересекающихся в точке L. Вариньон составляет дифференциальное уравнение движения точки в проекции суммы всех сил и ускорения на касательную к траектории Ll. Он пишет, что аналогичным образом поступал Германн («Acta eruditorum», ноябрь 1702). Обозначив: f — центральная сила, ds — элемент дуги траектории, n — ее радиус кривизны — Вариньон записывает уравнение

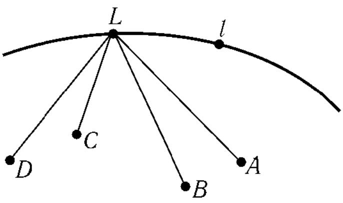

Рис. 4.3.4

$$f\,dx = \frac{ds^3}{n\,dt^2},$$

из которого получает выражения для случаев одной (кривая — окружность), двух, трех, ... центральных сил в дифференциальном виде и в виде функции от скорости в точке L. Для этого используется равенство $\dfrac{ds^3}{n\,dt^2} = \dfrac{v \cdot v\,ds}{n}$.

В представлении Вариньона центробежная сила — *это непременный атрибут криволинейного движения, каковым и является произвольное движение тела.* Большой мемуар (78 с.) «Сравнение центральных сил с абсолютной тяжестью...» [307] и его продолжение «Разные бесконечно общие способы определения касательных радиусов (лучей)...» [308], опубликованные в 1706 г., подводят итог исследований автором центральных сил, к которым он относит как центробежные, так и центростремительные силы.

Первая из названных работ начинается с пояснения физических причин возникновения центральных сил и напоминает содержание предыдущих публикаций по этой теме: приводятся общие правила для отношений центральных сил, определение их на бесконечности, случаи действия многих сил. Ее дальнейшее содержание посвящено поиску иных способов нахождения центральных сил и их определению через известную силу тяжести тела при его движении по горизонтальной плоскости.

Автор считает, что любое криволинейное движение тела, например, движение планеты вокруг Солнца по эллипсу, в каждый момент складывается из прямолинейного движения и радиального движения к Солнцу. В результате сложения этих бесконечно малых мгновенных движений по правилу параллелограмма получается эллиптическое движение. Первая из причин такого движения — естественное стремление всех тел двигаться прямолинейно (закон инерции), причина второго движения — центральная сила, притягивающая планеты к Солнцу. Движение планеты является результатом сложения (по правилу параллелограмма) этих двух причин.

Центральная сила в каждый момент времени сворачивает тело с прямолинейного пути, по которому оно стремится двигаться. И вид кривой (траектории) определяется тем, насколько сильно тело может сопротивляться изменению его прямолинейного движения. Степень сопротивления зависит от количества движения тела, то есть произведения массы (или тяжести) на скорость. Поэтому чем больше тяжесть тела, чем больше его скорость, тем труднее ему отклониться от прямолинейной траектории. Тяжесть считается известной, постоянной, проявляющейся самой собой. Скорость — это отношение пути ко времени. Таковы физические воззрения Вариньона.

С точки зрения «геометрии бесконечно малых»[1] тело в данный момент времени стремится двигаться по касательной к кривой (траектории), то есть по бесконечно малой дуге кривой, через концы которой проходят радиусы, пересекающиеся в центре, к которому, по предположению, приложена центральная сила. Это бесконечно малая дуга определяет бесконечно малую разность радиусов, выходящих из центра. Из

[1]Так автор называет *дифференциальное исчисление.*

подобия силового и геометрического треугольников — отношения касательной и центральной (радиальной) сил равны отношению путей. Центральная сила тем больше, чем больше искривлена траектория, то есть чем меньше радиус кривой. Если тело движется по прямой, то центральная сила исчезает. Кривизна кривой определяется ее радиусом (кривизны), который может принимать значения от 0 до ∞. Такова суть математической модели автора.

Пусть тело L движется (рис. 4.3.5) по кривой NLM под действием центральной силы, направленной в (из) точку C, называемую центром сил. LC, lC — лучи (радиусы), LQ — касательная, $lP \| LC$, P — точка пересечения Cl и LQ, HL — высота, с которой должно упасть тяжелое, весом p, тело для того, чтобы в точке L у него была скорость v_L, равная скорости движения тела по траектории NLM под действием центральной силы f, $v_{LQ} = \text{const}$, $v_L \sim t_{HL} = t$, $HL \sim t^2$. Считая, что f действует аналогично p, можно записать соотношение $\frac{f}{p} = \frac{s}{HL}$, где s — путь, пройденный телом под действием центральной силы. Если τ — малое время, необходимое для прохождения Pl или PL, то $Pl \sim \tau^2$, $PL \sim \tau$ и $\frac{Pl}{s} = \frac{PL^2}{LQ^2}$ или $s = Pl\frac{LQ^2}{PL^2}$.

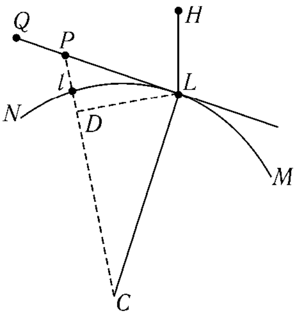

Рис. 4.3.5

Подставив это выражение в соотношение сил, получим

$$f = p\frac{Pl \cdot LQ^2}{HL \cdot PL^2}.$$

Но по закону Галилея $HL = \frac{a}{2}t^2$, $v_{LQ} = at$, $LQ = v_{LQ} \cdot t = at^2$ и $LQ = 2HL$. Тогда[1]

$$f = p\frac{Pl \cdot 4 \cdot HL}{PL^2}.$$

Далее автор предлагает еще несколько вариантов рассуждений, позволяющих получить тот же самый результат для величины центробежной силы тела, двигающегося по произвольной (не только по

[1]Промежуточные выкладки и обозначения отличаются от предложенных Вариньоном.

круговой или эллиптической траектории, как у Гюйгенса или Ньютона) траектории. В частности, вводя понятие соприкасающегося в точке L круга радиуса r и обозначая Ll символом ds, HL — h, LD — dx, Вариньон получает дифференциальное выражение для центробежной силы:

$$f = \frac{2ph\,ds}{r\,dx}.$$

Эту формулу автор применяет для различных кривых (логарифмической спирали, спирали Ферма, спирали Архимеда, эллипса, круга, гиперболы, параболы, произвольных конических сечений), в том числе в случае кривой MLN с несколькими фокусами[1].

Вариньон получил шесть различных выражений для центробежной силы, определяемой весом, параметром h и траекторией движения. Все эти формулы очень громоздки, что связано со сложными выражениями для радиуса кривизны[2] r, получаемыми во втором из названных мемуаров 1706 г. В нем исследователь приводит общий метод нахождения шести различных формул для радиуса кривизны произвольной гладкой кривой, используя, как и в первой работе, геометрические построения и доказательства для конечных и бесконечно малых величин.

В работе 1710 г., «Об обратных центральных силах» [313], Вариньон впервые четко формулирует две основные задачи динамики: «Возможны два вопроса, касающиеся центральных сил: первый — это найти силы, под действием которых описывается данная траектория, и второй — наоборот — по известным силам найти кривые, проходимые под действием этих сил. Первый из этих двух вопросов будет здесь называться *вопросом о прямых центральных силах*, а второй — *об обратных центральных силах*» [313, с. 533].

Для сравнения отметим, что в переписке Я. Бернулли и Германна, приведенной в том же сборнике «Мемуаров», мы видим, что Бернулли приводит два решения второй задачи и одно первой, Германн — только одно второй. Вариньон же получил общие формулы, дающие решение обеих проблем.

Идея использования в задачах механики синтеза исчисления бесконечно малых и геометрии получила развитие в публикациях Вариньона 1707–1711 гг., посвященных теории движения тел с учетом сопро-

---

[1] Кривые, изученные немецким математиком Э. В. фон Чирнхаузом.

[2] Касательный луч, радиус — по терминологии Вариньона.

тивления среды, динамике околоземного движения, баллистической задаче. Всем циклом работ автор пытается дать решение баллистической задачи в постановке Ньютона и в развитие статьи, опубликованной в январском номере «Journal de Trévaux» за 1706 г. В публикации 1707 г. «О движениях, совершающихся в среде, сопротивляющейся некоторым образом» [310] приводится общая постановка задачи о движении в произвольной среде (воздух, вода). Вариньон отмечает, что среда сопротивляется ее «разделению и проникновению движущегося тела, или, что одно и то же, тело встречается с некоторыми препятствиями при перемещении его частей». Необходимо определить степень убывания скорости в каждый момент времени. Для решения этой задачи необходимо знать скорость падения тела без учета сопротивления и величину силы сопротивления. Вариньон считает заданными произвольные (!) кривые (как функции времени) скоростей и сопротивлений, с помощью которых он определяет две другие — потерянной и оставшейся скоростей. Интегрирование последней кривой и приводит к решению задачи.

В работах 1708–1709 гг. [311], как и в предыдущей, движение тела, брошенного под углом к горизонту, рассматривается как *суперпозиция двух движений*: вертикального падения под действием силы тяжести и движения под углом к горизонту, как следствие заданной начальной скорости. В отличие от первых работ, где не учитывалось сопротивление среды свободному падению тела, в статье «Кривая движения тела в воздухе в предположении сопротивления, зависящего от скорости» [311], Вариньон рассматривает самый общий случай.

Траекторию, описываемую телом, брошенным под углом к горизонту, автор называет «кривой бросания» (courbe de projection). Прямую, проходящую через направление начальной скорости, — «линией бросания». Суть проблемы такова: «Найти кривую бросания тела в воздухе, линия бросания которой образует некоторый угол с вертикалью, в предположении сопротивления среды зависящим от скорости, вызываемой сопротивлением в каждый момент времени, и при выполнении предыдущей гипотезы[1] о проходимых телом под действием тяжести путях» [311].

Решение проблемы состоит в следующем. Пусть AC — не вертикальная линия бросания (рис. 4.3.6); AF, перпендикулярная AC, — ве-

[1]Следуя Галилею и Россиоли, Вариньон считает, что несмотря на сопротивление среды, проходимые при вертикальном падении тела пути относятся как квадраты времен.

личина начальной скорости; вертикаль ABO — «диаметр» в точке A параболы APO, описываемой телом с постоянной (начальной) скоростью под действием тяжести; ордината BP параллельна касательной AC к траектории APO; TP параллельно AB; TV параллельно AF; V — точка пересечения TV и прямой FV, параллельной AC; ARC — логарифмическая кривая, асимптотой которой является FVC; RG параллельна FVC; AGH — четверть угла, $AG = AH$; HL параллельно AO и пересекает BP в точке l. После весьма сложного геометрического доказательства, ссылаясь на свои предыдущие работы, автор утверждает, что кривая ALO и будет искомой кривой.

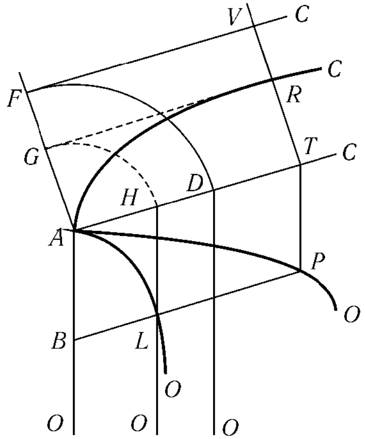

Рис. 4.3.6

В следствиях доказательства указывается, что траектория ALO всегда будет внутри параболы APO, с которой она пересекается только в точке A; вертикаль DO будет асимптотой кривой бросания AL; для получения аналитического вида кривой AL вводятся обозначения: $y = BL$, $x = AB$, $a = Af$; $t = AT$; $u = RV$, p — параметр параболы. Показывается, что выражения

$$y = a - u, \quad dy = -du, \quad \frac{dy}{a-y} = \frac{-\,du}{u}, \quad x = \frac{t^2}{p},$$

$$t = \sqrt{px}, \quad dt = \frac{p\,dx}{2\sqrt{px}}, \quad \frac{dt}{a} = \frac{p\,dx}{2a\sqrt{px}},$$

$\frac{-du}{u} = \frac{dt}{a}$ (уравнение логарифмической кривой ABC) приводят к равенству $\frac{dy}{a-y} = \frac{p\,dx}{2a\sqrt{px}}$, являющемуся дифференциальным уравнением искомой кривой. Интегрируя полученное уравнение, автор получает частное решение $\sqrt{px} = -\ln(a-y)$, определяющее баллистическую кривую в косоугольных координатах. Зависимость сопротивления среды от скорости определяется логарифмической (по гипотезе автора) кривой ARC, где u — скорость тела с учетом сопротивления, а v — скорость падения тела под действием тяжести без учета сопротивления среды. Считая, что $\frac{dt}{a} = \frac{dv - du}{\xi}$; $du = dt$; a и ξ — const, автор находит выражение для скорости $v = \frac{t^2 + 2at}{2a}$ и «ускоряющей силы»[1] $f = \frac{dv}{dt} = \frac{a+t}{a}$.

Используя далее обозначения Ньютона для дифференциалов (точка вместо d), Вариньон проводит сравнение движений с учетом и без учета сопротивления среды, отвечая тем самым на вопросы, поставленные в «Journal de Trevoux», предположительно, профессором математики из Каора (Cahors) Дюрраном.

Большой интерес для общей теории движения тел представляют работы Вариньона, посвященные общим законам ускоренного движения. Первая из таких работ опубликована в «Мемуарах» за 1693 г. С тех пор он неоднократно (1700, 1706, 1707, 1719) обращался к проблеме, признанным основоположником которой считался Галилей. Обращение Вариньона к проблемам его великого предшественника с позиций нового математического анализа было вполне закономерно.

Во времена Галилея и Декарта *равномерное, ускоренное* и *замедленное* движения рассматривались как самостоятельные. В работе 1707 г. «О произвольных переменных движениях, сравнимых между собой с равномерными» [309], Вариньон впервые убедительно доказывает, что это разновидности одного движения, которое им называется переменным. Он формирует новую физико-математическую идеологию — математическую теорию движения. Галилей показал, что при падении тела, его скорость пропорциональна времени, а пройденный

---

[1] Величину f Вариньон называет «тяжестью», но определяет равенством $f = \frac{dv}{dt}$, то есть фактически речь идет об ускорении или «ускоряющей силе» по Ньютону.

путь — его квадрату. Обобщая этот результат, Вариньон утверждает, что в общем случае путь и скорость, пользуясь терминологией Лейбница, являются функциями (function, affection) времени:

$$s = s(t), \quad v = v(t).$$

Исходя из классического философского закона о том, что все происходящее определяется причинами («Les effects sont toujours proportionels aux causes»), скорость называется причиной пройденного пути, что в современных обозначениях можно записать как $s = s(v)$. При постоянной скорости пройденный путь будет тем больше, чем больше скорость. При переменной скорости путь будет определяться интегралом от скорости — интегралом от ординат кривой $v = v(t)$, абсциссами которой является время[1]. Для сравнения пройденных телом путей для одной и той же функции $v(t)$ необходимо сравнивать времена движения. При разных функциях $v(t)$ пройденные пути будут различны. Если $v = \text{const}$, то есть кривая $v(t)$ является прямой, то, говоря современным языком, и закон движения $s = s(t)$ будет изображаться в координатах $\{s, t\}$ прямой линией. В общем случае, нахождение закона движения $s = s(t)$ связано с интегрированием кривой скоростей $v(t)$. И Вариньон на примерах показывает, что чем сложнее вид кривой $v(t)$, тем труднее ее проинтегрировать.

Связь между ускоренным и замедленным движениями Вариньон демонстрирует очень наглядно: если на каком-то интервале времени движение было ускоренным, то это же движение, рассматриваемое в «обратном времени», будет замедленным. Переход от *прямого* к *обратному* времени выразится сменой знака алгебраического выражения для скорости или ускорения. Это означает, что достаточно изучать только законы ускоренного движения. Реальная скорость тела в каждый момент складывается из постоянной начальной скорости и скорости, приобретаемой в процессе ускорения (замедления), например, под действием тяжести тела. Решения, получающиеся математическими методами, в силу их общности могут не иметь физического смысла. Анализируя свои общие формулы переменного движения, Вариньон в конкретных примерах получает и выражение Галилея для равномерно ускоренного движения. Таковы основные положения кинематической теории движения Вариньона.

---

[1]Кривые $s = s(t)$, $v = v(t)$ имеют наглядное изображение в декартовой системе координат.

Эти воззрения использовались им в уже цитированной работе 1707 г., посвященной влиянию сопротивления среды, и в публикации 1719 г. «Сравнение скоростей тел произвольной тяжести, опускающихся или поднимающихся в пустоте по прямым или произвольным кривым линиям» [316]. Здесь, как указывает автор, используется результат, ранее сформулированный Ньютоном («Начала», книга 1, предложение 4, секция 8), И. Бернулли («Мемуары», 1710) и Германном («Форономия», книга 1, предложение 19), каждый из которых по-своему, доказал, что *два тела равной массы и тяжести, пропорциональной массе, на одинаковых расстояниях от центра тяжести, падая или поднимаясь в пустоте по произвольной траектории (прямой или кривой), имеют равные скорости.* Сами по себе выводы, сделанные Вариньоном по итогам этой работы, представляют, в основном, только историческое значение. Однако метод их получения был нов и перспективен. Этим методом была *теорема об изменении кинетической энергии* (в современной терминологии).

Опираясь на результат своей работы 1707 г. [309], Вариньон доказывает теорему, математическое содержание которой сводится к следующему. Если f — сила в направлении движения, m — масса, u — скорость тела, то из $f = \dfrac{\pm\, m\, du}{dt}$, $u = \dfrac{\pm\, dx}{dt}$ следует $\pm dx = u\, dt$, $f\, dx = m u\, du$ или

$$\int f\, dx = \pm\frac{mu^2}{2} + q,$$

где знаки $\pm$ определяют направление движения (падение или подъем), а q — константа, определяемая по начальным данным (положению и скорости). Рассматривая различные варианты начальных данных (движение из начала координат с нулевой скоростью, с заданной скоростью, аналогично из произвольной точки), движение в вертикальной плоскости, движение по наклонной плоскости, движение не только в поле центральных, но и параллельных сил, автор получает все возможные случаи соотношения *начальных, текущих* и *конечных* скоростей, особо отмечая, что из его теоремы следуют и соответствующие результаты Галилея.

Аналитическое выражение для силы $f = f(x)$, по предположению автора, должно задаваться заранее. Как уже отмечалось, эти выражения он получил в более ранних работах, посвященных теории центральных сил. В поле параллельных сил сила тяжести постоянна. Для графической иллюстрации задачи о вертикальном падении (подъеме) тела в центральном поле сил Вариньон приводит рисунок (рис. 4.3.7).

Здесь P — центр сил; A — начальная точка падения; DFM — кривая сил, ордината FB которой по величине равна f; AB — x; Bb — dx; $\int f\,dx$ — площадь $BFfb$.

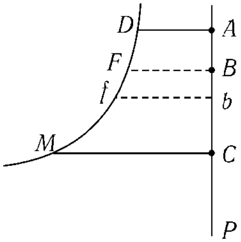

Рис. 4.3.7

Таким образом, в арсенале механики Вариньона мы видим понятия силы, как направленного отрезка; сил центральных и параллельных; массы; скорости, направленной по касательной к траектории в сторону движения и равной производной от пройденного пути как функции времени; ускорения, как величины изменения скорости, как производной от величины скорости; траектории, как геометрической кривой, определяющей положение тела (точки) в разные моменты времени. Он пользовался (не называя их) понятиями количества движения и лейбницевой «живой силы» для записи основных дифференциальных уравнений механики в виде, говоря современным языком, второго закона Ньютона или теоремы об изменении кинетической энергии. Именно в творчестве Вариньона в механике произошел переход от чисто геометрических методов Галилея, Декарта, Гюйгенса к аналитическим приемам дифференциального и интегрального исчисления.

Современный взгляд на механику, как на универсальную физико-математическую теорию произвольных движений тел, сформировался на основе использования одних и тех же понятий (положение, скорость, сила, ...), принципов, законов для описания различных явлений, решения физических и технических задач разного содержания. Процесс универсализации методов, ранее применяемых для исследования равновесия весов, рычагов, блоков, для изучения явления удара, падения земных тел, движения небесных тел — это и есть путь создания теоретической механики. Это последовательная модернизация, обобщение, уточнение, конкретизация методов применительно к бурно расширяющемуся кругу жизненно важных для человечества задач. От падения тела в пустоте — к движению тел с учетом сопротивления среды, от абсолютно упругого (неупругого) удара — к реальному удару тел, от задачи 2-х тел — к задаче n тел, задачам летательных аппаратов.

Путь универсализации методов, обобщения известных задач был главной чертой творчества Вариньона[1]. Но если его предшественники (Стевин, Галилей, Кеплер, Декарт) и современники (Гюйгенс, Ньютон, Лейбниц) искали универсальный принцип в мире философских идей, то он больше тяготел к универсализации математического аппарата механики. Особенно к адаптации идей математического анализа и дифференциальных уравнений. Основные идеи геометрической статики, принцип возможных перемещений[2], теорема об изменении количества движения, теорема об изменении кинетической энергии составляли основу механико-математических работ Вариньона. Это был пролог аналитической механики Эйлера–Даламбера–Лагранжа.

Анализируя результаты многолетнего творчества Вариньона, можно отметить явную тягу этого математика к прикладным задачам той эпохи. Даже его чисто математические работы 1699, 1706 гг. были ориентированы на развитие математического аппарата механики. Первый этап деятельности Вариньона (ориентировочно 1683–1692 гг.), связанный с освоением классической геометрии и механики предшественников, был «статическим». Изданием своего «Проекта» Вариньон не только подвел итог многовекового развития статики–механики, но и заложил основы для дальнейшего совершенствования ее математического аппарата (векторные свойства сил и движений, правило параллелограмма, теорема Вариньона) в трудах Д. Бернулли, Эйлера, Монжа, Л. Карно, Боссю, Лагранжа, Пуансо. Переписка Вариньона с Лейбницем и И. Бернулли, знакомство с трудами Ньютона и «Анализом бесконечно малых для исследования кривых линий» Лопиталя [203], полемика с Роллем[3] сделали Вариньона активным проводником идей нового математического анализа в механических приложениях.

Второй этап его деятельности (условно 1693–1719 гг.) связан с разработкой теории центральных сил, дифференциально-геометрического метода построения дифференциальных уравнений движения тел (точнее — точек) и их интегрирования. В качестве прямоугольных осей координат часто использовались касательная и нормаль. Возможно, именно это и навело Д. Бернулли и Эйлера на мысль записать дифференциальные уравнения[4] движения точки аналогичным образом.

[1]В своих исторических работах это отмечали Ж. Э. Монтюкла и Ш. Боссю.

[2]Здесь и далее современные названия.

[3]До 1706 г. активно критиковал исчисление бесконечно малых.

[4]Д. Бернулли — в 1726 г., Эйлер — в 1736 г.

Заключительный, третий, этап творчества Вариньона (1719–1722) составляет подготовка к публикации «Новой механики» [319], «Введения в анализ бесконечно малых» [317], «Элементов математики» [320], «Трактата о движении и измерении текущих вод» [318] — трудов итогового характера, обобщающих не только научные достижения, но и богатый преподавательский опыт исследователя.

В истории механики период XVII–начала XVIII в. стал эпохой перехода от механики отдельных явлений конкретных тел (механика начального периода) к механике произвольных движений любых тел (теоретическая, аналитическая механика). Это был этап смены методологии, универсализации научных доктрин. И Пьер Вариньон был одним из первых представителей новой эпохи.

4.4. Публикации по механике конца XVII – начала XVIII века

Творчество Вариньона, давшее мощный импульс дальнейшему развитию механики, опиралось на работы его предшественников и современников, также находившихся под влиянием идей Галилея, Декарта, Гюйгенса, Лейбница и Ньютона.

4.4.1. Имя маркиза де Лопиталя — автора одной из первых[1] книг по математическому анализу «Анализ бесконечно малых» [203], изданной в Париже в 1696 г., известно благодаря «правилу Лопиталя», автором которого И. Бернулли считал самого себя. Выходец из знатного рода[2], сын генерал-лейтенанта королевской армии, Лопиталь получил хорошее образование и рано проявил любовь к математике. По причине сильной близорукости Лопиталь вынужден был оставить военную службу в чине капитана кавалерии и, таким образом, получил возможность посвятить себя любимому делу. В 1691 г. Мальбранш познакомил Лопиталя с приехавшим в Париж И. Бернулли. Благодаря этому знакомству Лопиталь получил первое представление о работах Лейбница и Я. Бернулли по дифференциальному исчислению. В возрасте 32 лет Лопиталь был избран (1693) академиком Парижской академии наук.

[1]Bernard Nieuwentyt (1654–1718) был автором книг «Analysis infinitorum» (1695), «Considerationes cecundce circa differentiolis principia» (1696).

[2]Полное имя — Guillaume-Francois-Antoine de l'Hopital, chevalier, marquis de Sainte-Mesme, comte d'Entremont, seigneur d'Ouques, de Chaise, de Brean.