

были посвящены его работы, опубликованные в Париже в 1741 г. («Рассуждение о силах, движущих тела» [239], «Письмо мадам Дюшателье по вопросу о живых силах» [240]).

Многолетняя дискуссия о физической природе и математическом выражении сил, участниками которой были практически все механики XVII – начала XVIII вв., была чрезвычайно актуальной и важной для истории механики. Это был процесс рафинирования понятия *силы*, без которого невозможно современное построение *теории движения и равновесия тел*.

5.2. Вклад П. Л. М. де Мопертюи

Пьер-Луи Моро де Мопертюи родился в городке Сен-Мало на атлантическом побережье Франции 17 июля 1698 г. Его образование началось с частных уроков, а в 1714 г. он переезжает в Париж и поступает в коллеж La Marche, где математику преподавал ученик Вариньона — академик Гисне. Через два года Мопертюи покидает коллеж и уезжает в Голландию. В 1718 г. он поступает на военную службу, вскоре получает звание лейтенанта, но в 1723 г. выходит в отставку и становится ассистентом академика-геометра Ф. Николя. В 1725 г. он избирается¹ в Парижскую академию наук, через три года едет в Лондон и становится членом Лондонского Королевского общества. Из Англии он переезжает в Швейцарию, где вместе с Клеро и Кенигом слушает в Базельском университете лекции И. Бернулли по интегральному исчислению. Вернувшись в Париж, в 1731 г. он становится академиком² Академии наук.

Первые публикации³ Мопертюи были сугубо математическими, но большинство работ 1732–1734 гг. посвящены развитию и популяризации во Франции идей Ньютона, в частности, его *теории гравитации*. Одним из итогов научной активности Мопертюи становится назначение его руководителем лапландской (север Швеции) экспедиции⁴ (июль 1736 – май 1737 г.) по определению длины градуса меридиана. Публикация в 1738 г. результатов экспедиции значительно повысила

¹Ассоциированный ассистент (adjoint-associé).

²Associé-pensionnaire.

³1726–1732 гг.

⁴В ее состав входили Клеро, Камю и другие.

авторитет Мопертюи в научных кругах, у него устанавливаются дружеские отношения с Вольтером, маркизой Дюшателе и ее окружением, его приглашает¹ прусский король Фридрих, в 1743 г. он избирается членом Французской академии.

Первая публикация Мопертюи о принципе наименьшего действия относится к 1744 г. Именно в этот год он принимает предложение Фридриха Великого занять пост президента Берлинской академии наук и переезжает в Берлин. Это было официальное признание высоких научных заслуг Мопертюи — автора нескольких известных книг и большого количества статей по математике, механике², физике, астрономии, биологии и прикладным проблемам. Публикации по принципу наименьшего действия — это не только новый этап в творчестве Мопертюи, поиск фундаментальных принципов мироздания, но и важнейшее событие в истории классической механики. Начавшаяся после публикации принципа дискуссия, активными участниками которой стали Кениг, Эйлер, Даламбер, Дарси, Куртиврон, Вольтер, Лагранж, Л. Карно и другие видные ученые XVIII–XIX вв., привела к уточнению многих ранее введенных понятий, философскому осмыслению роли механики и ее принципов в системе наук, формированию нового математического аппарата механики, получившей после Лагранжа название *аналитической*.

Работа 1744 г. была доложена Парижской академии наук и называлась «Согласование различных законов природы, которые до сих пор казались несовместимыми» [14, 249, 252]. Ссылаясь на публикации Ферма, Декарта и Лейбница, Мопертюи показывает аналогичность законов движения светового луча и твердых тел и формулирует их общий принцип. На примере движения луча света в разных средах он показывает, что движение по кратчайшему пути и движение за кратчайшее время не совпадают. Это наводит его на мысль провозгласить свой принцип, конкретизирующий принцип Ферма: «Природа во всех своих явлениях действует всегда простейшим образом» [252, Т. 4, с. 12]. Суть этого принципа — «выбираемый путь таков, что для него количество действия является наименьшим» [252, Т. 4, с. 17].

¹Их встреча состоялась в 1740 г.

²В качестве иллюстрации, в приложении к данной работе приводится перевод статьи «Арифметическая баллистика» [247]. В этом же томе «Мемуаров» опубликованы его статьи, посвященные опытам над скорпионами и исследованию полярного сияния.

Что же следует понимать под количеством действия? «Для перемещения тела из одной точки в другую необходимо некоторое действие: оно зависит от скорости тела и от пройденного пути, но ни от скорости, ни от пути, взятых отдельно. Количество действия, таким образом, тем больше, чем больше скорость и чем длиннее пройденный путь; оно пропорционально сумме пройденных путей, умноженных на скорости их прохождения» [252, Т. 4, с. 17]. Здесь автор делает сноску, где утверждается, что при рассмотрении одного тела его масса может не учитываться.

Свой принцип Мопертюи демонстрирует на примере прохождения луча света через границу CD (рис. 5.2.1) двух сред. Если m — скорость луча в верхней среде, n — в нижней, то количество действия должно быть наименьшим. Переписывая действие в виде $m\sqrt{AC^2 + CR^2} + n\sqrt{BD^2 + DR^2}$, дифференцируя (AC и BD — константы) и приравнявая результат нулю, получаем равенство

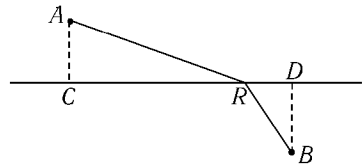


Рис. 5.2.1

$$\frac{mCRdCR}{\sqrt{AC^2 + CR^2}} + \frac{nDRdDR}{\sqrt{BD^2 + DR^2}} = 0,$$

из которого при $CD = \text{const}$, то есть $dCR = -dDR$, следует известный закон преломления света:

$$\frac{CR}{AR} : \frac{DR}{BR} = \frac{n}{m}.$$

В этом Мопертюи видит надежное подтверждение провозглашенного им принципа, следствием которого является принцип Ферма. Вторым подтверждением этого принципа является разумность Высшего Существа. «Механика слепа, и нужно следовать замыслам наиболее ясного и свободного Разума; и если бы наш рассудок был достаточно обширен, он бы видел причины физических явлений, либо рассчитывая свойства тел, либо изучая то, что они имеют наиболее существенного для их осуществления» [252, Т. 4, с. 21].

Завершается мемуар выдержкой из работы Эйлера, проясняющей разницу между действием по Лейбницу и действием по Мопертюи, а значит, и между их принципами. Эйлер показывает, что принцип

«простейшего пути», полученный Лейбницем как следствие той же дискуссии между Декартом и Ферма, является частным случаем принципа Мопертюи, когда сопротивление среды пропорционально скорости движения тела.

Но к сущности законов движения тел Мопертюи приходит через осознание «Законов покоя». Именно так назывался его доклад 20.02.1740 г. в Парижской академии наук [252, Т. 4, с. 45–64]. Доклад был посвящен попытке обобщения, ранее установленного экспериментально, условия равновесия системы тел — принципа наимизшего положения ее центра тяжести. Но как найти функцию, экстремальное значение которой и будет соответствовать этому условию? Мопертюи рассматривает систему трех центральных сил, придает точкам их приложения возможные перемещения и записывает условие равновесия системы тел в виде равенства¹

$$\sum_{k=1}^n m_k f_k dr_k = 0,$$

(m_k , f_k , dr_k — массы, величины сил, перемещения тел), которое считается несомненным. Сама идея формулировки экстремального принципа равновесия системы тел, по своей сути связанная с принципом наименьшего количества действия, была интересной и перспективной. Но ее математическая реализация, предложенная Мопертюи, была недостаточно убедительной. Это подтверждает и приведенный им пример равновесия рычага. В полной мере эта идея была осуществлена Лагранжем в «Аналитической механике» [53, Т. 1, отдел 3, § V].

От идеи записи принципов построения научной теории на основе очевидных или экспериментально установленных причинно-следственных связей между явлениями, а в математическом выражении — между соответствующими понятиями, Мопертюи предлагает перейти к принципам, выражающим некоторую оптимальность, разумность явлений природы. От ни физически, ни метафизически необъяснимых причинно-следственных взаимосвязей между явлениями (понятиями) он предлагает перейти к принципам, отражающим новый, более глубокий уровень проникновения в тайны природы, из которых причинно-следственные законы получаются простыми математически-

¹Использованы современные обозначения.

ми преобразованиями¹. Разумность же природных явлений является следствием разумности Творца. Такова философская, теологическая подоплека метафизического принципа, сформулированного Мопертюи 15 апреля 1744 г. в Парижской Академии наук и опубликованного в «Мемуарах» за тот же год. Подробное изложение принципа и его приложение к задаче удара было доложено в Берлинской академии наук в 1746 г. и опубликовано в трудах этой академии в 1748 г. под заголовком «Законы движения и покоя, выведенные из метафизического принципа» [250]. Фрагмент этой статьи, разъясняющий механикоматематическое содержание принципа, приведен в «Трудах Мопертюи» [252, Т. 4, с. 31–42].

Мопертюи определяет инерцию как силу, необходимую для сохранения состояния (покоя или движения) тел, пропорциональную количеству содержащейся в них материи. «Непроницаемость тел и их инерция приводят к необходимости установления некоторых законов для согласования этих двух свойств, в каждый момент противоположных одно другому в Природе» [252, Т. 4, с. 31].

Далее формулируется задача о прямом центральном ударе «совершенно твердых» и «совершенно упругих» шаров, в которой по известным скоростям шаров до удара необходимо найти их скорости после удара. «Совершенно твердые тела таковы, что их части неразделимы и несгибаемы и, следовательно, их формы неизменны». «Совершенно упругие» тела (по Мопертюи) ныне называются абсолютно упругими. По предположению автора, твердые тела после удара должны двигаться с общей (одинаковой) скоростью, что же касается упругих тел, то у них одинаковой должна быть относительная скорость до и после удара. Следует обратить внимание на то, что рассматриваемые Мопертюи тела достаточно нереальны, поэтому полученные им далее законы представляют только теоретический интерес.

«Общий принцип» состоит в следующем: «Когда в Природе происходит некоторое изменение, количество действия, необходимое для этого изменения, является наименьшим из возможных. Количество действия есть произведение массы тел на их скорость и на проходимый ими путь» [252, Т. 4, с. 36].

Рассматривая удар двигающихся в одну сторону друг за другом со скоростями a и b ($a > b$) твердых шаров A и B , Мопертюи считает,

¹Аналогичную идею можно увидеть в «Динамике» Даламбера.

что тело A , двигаясь до удара со скоростью a , пройдет путь, пропорциональный a ; двигаясь после удара со скоростью x , оно пройдет путь, пропорциональный x . Таким образом, изменение скорости $(a - x)$ и пути $(a - x)$ тела A , которые можно представить как перемещения тела A «нематериальной плоскостью» назад со скоростью $a - x$ на расстояние $a - x$ и есть те изменения тела A , о которых идет речь в Общем принципе. Аналогичные изменения для тела B будут $x - b$ и $x - b$, количеством действия для тел A и B будет сумма

$$A(a - x)^2 + B(x - b)^2,$$

величина которой должна быть минимальной. Дифференцируя по x и приравнявая результат нулю, Мопертюи получает

$$x = \frac{Aa + Bb}{A + B}.$$

Для случая встречного движения тел

$$x = \frac{Aa - Bb}{A + B}.$$

Рассматривая удар двух упругих тел (шаров), скорости которых после удара автор обозначает α и β (для A и B соответственно), он вновь получает сумму изменений количеств действия тел

$$A(a - \alpha)^2 + B(b - \beta)^2,$$

из условия минимальности которой получаются выражения для последующих скоростей α и β , как в случае движения шаров в одну сторону, так и в случае встречного движения. Попутно рассматриваются и ситуации, когда одно из тел неподвижно до удара или когда оно является непреодолимым препятствием, то есть когда оно неподвижно не только до, но и после удара.

Статическую задачу о равновесии двух, лежащих на рычаге тел A и B , Мопертюи формулирует нетрадиционным образом: найти точку¹ Z между телами, относительно которой они покоятся. Если считать, что расстояние между телами (мысленный рычаг) равно s , то нарушение равновесия тел приведет к их повороту вокруг точки Z ,

¹ z — расстояние от тела A до «точки равновесия» Z .

то есть к перемещению по дугам радиуса z (для тела A) и $c - z$ (для тела B). Скорости этих малых перемещений будут также пропорциональны радиусам, и количество действия тел A и B будет представлено суммой

$$Az^2 + B(c - z)^2,$$

условие минимальности которой и дает искомое выражение

$$z = \frac{Bc}{A + B}.$$

Мопертюи демонстрирует свой принцип наименьшего количества действия, как некогда Декарт и Гюйгенс — закон сохранения количества движения, на примере задачи об ударе тел. Для подтверждения справедливости своего принципа он показывает, что как количество движения, так и «живые силы» тел до и после удара сохраняются, то есть эти законы сохранения являются следствием его принципа. Для случая равновесия тел принцип Мопертюи идейно примыкает к принципу виртуальных скоростей И. Бернулли. Но еще более убедительным подтверждением справедливости нового принципа оказалась, вышедшая в конце того же 1744 г., статья¹ Эйлера «Об определении движения брошенных тел в несопротивляющейся среде методом максимумов и минимумов» [14].

Пользуясь современными обозначениями (m — масса, v — скорость, ds — элемент дуги траектории), суть принципа, сформулированного и используемого Эйлером для решения задач о падении тел, сводится к следующему: «... я утверждаю, что линия, описываемая телом, будет такова, что среди всех других линий, содержащихся между теми же пределами, у нее будет минимум $\int mv ds$ или, так как m постоянна, $\int v ds$ » [14, с. 31].

Эйлер иллюстрирует свой принцип, к которому, в отличие от Мопертюи, он пришел не из теологических соображений, а в итоге обобщения результатов решения изопериметрических задач механики, на конкретных примерах движения точки в поле параллельных и центральных сил. Он отмечает, что выражение принципа, полученное из

¹Статья была откликом на вопрос Д. Бернулли о возможности решения задачи центральных сил методом изопериметров. Она была опубликована как приложение к книге Эйлера «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи...».

количества движения, можно трансформировать к виду, следующему из понятия «живых сил». Действительно, заменяя ds выражением $v dt$, получим

$$\int v ds = \int v^2 dt,$$

«так что для кривой, описываемой брошенным телом, сумма всех живых сил, находящихся в теле в отдельные моменты времени, будет наименьшей. Таким образом, ни те, кто полагает, что силы следует оценивать по самим скоростям, ни те, кто — по квадратам скоростей, не найдут здесь ничего неприемлемого» [14, с. 31–32]. Так Эйлер откликается на спор о мерах движения.

По-видимому, Мопертюи и Эйлер пришли к принципу¹ каждый своим путем. В форме Мопертюи он применим для конечных изменений скорости, в форме Эйлера он охватывает непрерывные движения. Принимая во внимание необычность принципа, его универсальность и научный авторитет его создателей, легко предположить, что он быстро привлек внимание ученых. Начавшаяся в 1750 г. дискуссия², в которой активно участвовали Эйлер, Даламбер, Вольтер, Лагранж и другие, затянулась на несколько десятилетий. Для механики, для развития вариационных методов она оказалась чрезвычайно плодотворной. Она позволила выработать новый взгляд на физическую сущность законов природы, придала импульс развитию нового математического аппарата — вариационного исчисления и сформировала новый путь построения классической механики в работах Лагранжа, Гамильтона, Якоби, Гаусса. Эта траектория развития механики имела своим истоком законы и принципы Галилея, Декарта, Гюйгенса, Ньютона, Лейбница, Эйлера, Мопертюи, и ее математическая реализация была адекватна формированию в XVIII–XIX вв. новых разделов математики.

Однако в судьбе самого Мопертюи эта дискуссия сыграла трагическую роль. Эйлер в своих последующих выступлениях по поводу принципа наименьшего действия неизменно подчеркивал идейный приоритет Мопертюи и отмечал его выдающиеся заслуги³. Выступления же Кенига, Вольтера, Дарси и некоторых других современников носили

¹Эйлер не дал своему принципу особого названия.

²Началом послужило выступление против Мопертюи и его принципа профессора Гаагского университета Самуэля Кенига, утверждавшего, что Мопертюи воспользовался принципом, ранее открытым Мальбраншем, Гравесандом, Лейбницем и Вольфом.

³Статья Эйлера [14, с. 56–108].

вызывающий и оскорбительный характер. Это отразилось на состоянии здоровья Мопертюи. В 1756 г. он переехал из Берлина во Францию, и состояние его здоровья стало улучшаться. В сентябре 1758 г. он решил навестить Базель, но дорога оказалась слишком тяжелой, болезнь обострилась, «... и он там скончался¹ в окружении семейства Бернулли, которое до конца продемонстрировало ему свою самую нежную привязанность и благодарную преданность» [260, с. 309].

5.3. Пьер Буге и теория управления кораблем

Как и Мопертюи, Пьер Буге (10.02.1698–15.08.1758) родился в Бретани. Его отец Жан Буге — королевский профессор гидрографии в портовом городке Кроассик — считался одним из известнейших гидрографов того времени, был прекрасным математиком, автором «Полного трактата по навигации» («*Traité complet de navigation*»), позднее переработанного и дополненного его сыном.

Первыми словами, произнесенными юным Пьером, были математические термины, его первыми игрушками были астрономические и гидрографические приборы отца, его талант формировался в атмосфере научных изысканий. «Он был хорошим математиком еще до того, как расстался с детством» [260, с. 62]. Это быстро обнаружилось в иезуитском коллеже города Ванне, где он получал образование. Когда Пьер учился в пятом классе, один из его учителей, обнаружив обширность математических познаний ученика, брал у него уроки математики. А через два года тринадцатилетний Пьер осмелился не согласиться с одним из выводов его профессора математики, который воспринял это как оскорбление его профессионального достоинства. Буге принял вызов и публично доказал свою правоту. Это обстоятельство вынудило профессора покинуть коллеж.

Отец умер в 1713 г. еще до того, как Пьер окончил коллеж, оставив своим двум сыновьям очень скромное состояние. Это обстоятельство побудило Буге добиваться разрешения занять место его отца. По поручению министра пятнадцатилетний претендент был экзаменован королевским профессором гидрографии Обертом, который удостоил экзаменуемого наивысших похвал. Так, несмотря на то, что большинство учеников были старше Буге, он получил должность профессора в Кроассик и начал свои научные разработки.

¹Это произошло 27 июля 1759 г. в возрасте 61 года.