Ньютона. («Рассуждения о законе притяжения», [153]). Заканчивается том 1745 г. дискуссией между Клеро и Бюффоном по теории всемирного тяготения и теории движения Луны, в которой каждый из авторов настаивает на своем мнении. Но независимо от мнений, эта последовательность утверждений, возражений, математических выкладок и разъяснений привлекла к публикациям Клеро, Даламбера и Бюффона пристальное внимание многих европейских ученых и способствовала бурному развитию небесной механики, триумфально продолженному Лапласом.

Подводя итоги вклада Клеро в развитие механики первой половины XVIII в., можно сделать вывод о том, что он был одним из главных «проводников» идей ньютонианской механики во Франции, одним из первых создателей теории дифференциальных уравнений для задач классической и небесной механики, предвестником динамических взглядов и методов Даламбера.

## 5.6. «Динамика» Ж. Л. Даламбера

Жан Лерон Даламбер, как и Клеро, был одним из наиболее выдающихся ученых XVIII в. Работы по математике, классической и небесной механике, гидродинамике, философии, истории, литературе, участие в издании «Энциклопедии» принесли ему мировую известность.

Биография знаменитого ученого начиналась весьма драматично. В возрасте грудного ребенка он был оставлен родителями[1] на ступенях церкви Сан-Жан-Лерон монастыря Нотр-Дам в Париже. Подобравшие младенца стекольщик Руссо и его жена и стали его приемными родителями. С четырех до десяти лет Жан Лерон воспитывался в пансионате, с тринадцати лет учился в коллеже Мазарини, где получил хорошее гуманитарное образование и фамилию Даламбер (d'Alembert). В 1735 г. он становится магистром искусств, в 1739 г. — адвокатом. Интерес к математике, по-видимому, был «велением времени», и математическое образование он получал самостоятельно. В 1741 г. он избран адъюнктом (астрономом), а в 1746 г. — ассоциированным (геометром) членом Академии наук, в 1754 г. — членом Французской академии,

[1] Мать — К. де Тансен, хозяйка одного из популярных парижских салонов, отец — шевалье Детуш (Destouches), комиссар артиллерии. Отец, а после его смерти, дед оказывали своему сыну и внуку материальную помощь. После смерти деда Даламбер получал ренту в 1200 ливров.


Жан Лерон Даламбер

в 1756 г. — сверхштатным[1] пансионером Парижской академии наук, в 60-е годы — членом всех известных европейских академий[2], в 1772 г. — постоянным Секретарем Французской академии.

Научное наследие Даламбера чрезвычайно обширно и многогранно. Даже его вклад в развитие классической механики, в силу его важности для дальнейшего развития теории, требует длительного и пристального изучения. Однако это уже выходит за рамки данной работы. В этом параграфе мы ограничимся лишь краткой характеристикой содержания и основных идей «Динамики» Даламбера. Издание «Трактата по динамике» [29, 116] стало одним из важнейших событий истории механики XVIII в., серьезной попыткой переосмысления основных понятий и принципов науки о равновесии и движении тел, заложенных в «Началах» Ньютона, «Форономии» Германа, «Новой механике» Вариньона, «Рассуждении о законах передачи движения» И. Бернулли, «Механике» Эйлера.

Основная цель трактата ясна из его полного названия: «Трактат по динамике, в котором законы равновесия и движения тел сведены к их наименьшему количеству и доказаны новым способом, и где дается общий Принцип для определения движения нескольких тел, взаимодействующих между собой некоторым образом» [29]. Книга состоит из введения и двух частей: I. «Общие законы движения и равновесия тел»; II. «Общий принцип для нахождения движения нескольких тел, произвольным образом действующих друг на друга, а также некоторые применения этого принципа».

Во введении Даламбер уточняет место механики в системе математических наук и говорит о необходимости положить в ее основу наименьший набор ясных, общепринятых принципов, позволяющих эффективно решать любые задачи равновесия и движения тел. «Движение и его общие свойства — таков первый и главный объект механики» [29, с. 17]. «Принцип равновесия вместе с принципом силы инерции и принципом сложения движений позволяет находить решение всех задач, относящихся к движению одного тела ...» [29, с. 23].

Переходя к содержательной стороне принципов, автор впервые стремится дать их определение без понятия силы. Не дать свое определение силы, как это делали его предшественники, а избавиться от нее.

---

[1] Место штатного пансионера он получил только в 1765 г., заняв после смерти Клеро его место.

[2] Петербургской — с 1764 г.

«Я полностью изгоняю[1] присущие движущемуся телу силы, как понятия неясные и метафизические, способные лишь распространить мрак над ясной самой по себе наукой» [29, с. 24]. Это намерение Даламбера представляется вполне естественным, так как физическое и даже философское содержание понятия силы, его математические интерпретации в работах его великих предшественников были очень различными. Это силы тяжести, движущие силы, силы постоянные и переменные, импульсы, аналоги момента, работы, центробежные, центростремительные, живые и мертвые, ускоряющие, инерции, сопротивления среды, притяжения и отталкивания, ударные и упругие, мгновенные, виртуальные,... Даламбер подчеркивает, что реально существуют только тела, их движения и взаимодействия. Он считает, что о причине движения можно судить по чисто кинематическим характеристикам движения, поэтому и принципы механики должны выражать геометрические свойства движения.

В этом Даламбер не слишком последователен. С одной стороны, он пишет: «Очевидно, что достаточно одного применения геометрии и анализа, чтобы без помощи каких бы то ни было иных принципов, найти общие свойства движения ...» [29, с. 19]. С другой стороны, рассуждает: «Но каким образом получается, что движение тела подчиняется именно тому или иному закону в частности? Одна геометрия ничего не может сказать по этому поводу. Это и есть то, что можно рассматривать как первую задачу, относящуюся непосредственно к механике. Прежде всего совершенно очевидно, что никакое тело не может сообщить движение самому себе. Оно может быть выведено из состояния покоя только в результате действия какой-либо внешней причины» [29, с. 19–20]. Однако некоторая непоследовательность авторской мысли, как об этом свидетельствует дальнейшее содержание книги, вовсе не свидетельствует о непонимании автором существа дела. Избавиться от силы как меры взаимодействия тел ему не удастся.

Говоря «о силе движущихся тел», что в современной терминологии эквивалентно мере движения тел, Даламбер подводит итог длительной, начатой еще Лейбницем, дискуссии о ее математическом выражении. «Когда говорят о силе движущихся тел, то или с произносимым словом вовсе не связывают никакой ясной цели, или под ним понимают свойства движущихся тел преодолевать встречаемые ими препятствия

[1] Любопытная деталь. «Изгоняя» понятие силы, Даламбер называет свою механику «Динамикой», что, по терминологии Лейбница, было синонимом теории сил.

или сопротивляться этим препятствиям» [29, с. 25]. Он показывает, что в зависимости от постановки задачи, мера движения может быть как $m\vec{v}$, так и $mv^2$, а «затронутый вопрос представляет собой не более, как совершенно бесплодный метафизический спор или спор о словах, недостойный внимания философов» [29, с. 27].

Первая часть книги начинается с определения непроницаемости, тела, места тела в пространстве, движения, времени, равномерного, ускоренного и замедленного движений, силы (точнее свойства) инерции, силы или движущей причины. Далее приводится доказательство первого принципа — *принципа силы инерции*. Этот принцип формулируется в виде двух законов:

«Тело, находящееся в покое, будет неизменно пребывать в покое, пока какая-нибудь внешняя причина не выведет его из этого состояния» [29, с. 38].

«Тело, приведенное однажды какой-либо причиной в движение, должно неизменно пребывать в состоянии равномерного прямолинейного движения, пока на него не подействует какая-нибудь новая причина, отличная от той, которая привела его в движение» [29, с. 39].

Далее вводятся понятия «направления» тела, совпадающее с современным направлением скорости, само понятие скорости и ускоряющей силы. И физическое понятие скорости, и ее математическое выражение, в виде производной $u = \dfrac{de}{dt}$ ($e$ — путь), повторяют взгляды Эйлера и вполне современны. Ускоряющей силой $\varphi$ называется величина, пропорциональная приращению скорости $du$ и удовлетворяющая уравнениям

$$\varphi\, dt^2 = \pm d^2 e, \quad \varphi\, dt = \pm du, \quad \varphi\, de = \pm u\, du, \qquad (*)$$

которые ранее приводились Вариньоном (параграф 4.3). Под движущей причиной понимается «произведение движущейся массы на элемент ее скорости».

Второй основополагающий принцип механики — *принцип сложения движений* — формулируется в виде теоремы: «Если на тело или на точку $A$ действуют одновременно две какие-либо силы так, что под действием одной из них тело за известный промежуток времени прошло бы равномерно путь от $A$ до $B$, а под действием другой оно за тот же промежуток времени прошло бы равномерно путь от $A$ до $C$, причем на $AB$ и $AC$ можно построить параллелограмм $ABCD$, то я утверждаю, что тело $A$ пройдет равномерно диагональ $AD$ за то же время, за какое оно прошло бы расстояния $AB$ или $AC$» [29, с. 68–69].

Третий основной принцип — *принцип равновесия.* Этот принцип Даламбер ясно формулирует только для задачи о равновесии тела, ссылаясь на то, что «...все законы передачи движения от одного тела к другому сводятся к законам равновесия...» [29, с. 30]. Суть принципа составляет теорема: «Если два тела, обладающих скоростями, обратно пропорциональными их массам, имеют противоположные направления, так что одно тело не может двигаться, не сдвигая с места другое тело, то между этими телами будет иметь место равновесие» [29, с. 83].

Напомнив понятие количества движения, автор приводит иную формулировку этой теоремы: «...если два тела имеют равные и прямо противоположные количества движения, то они уравновешивают друг друга» [29, с. 87]. Доказательство теоремы приводится для четырех случаев соотношения масс и скоростей на физическом уровне строгости. При этом Даламбер не скрывает аналогичности своего принципа равновесия принципу виртуальных скоростей, которым ученые пользовались со времен создания теории равновесия рычага, а позднее Декарт, Гюйгенс, Вариньон, Лейбниц, И. Бернулли. Эта аналогия связана с расширенным пониманием скорости не только как свойства состоявшегося движения, но и как свойства возможного, виртуального «движения» покоящихся тел, то есть как «виртуальной скорости».

Рассматривая условия равновесия прямого или ломаного рычага, Даламбер распространяет эти условия на случай произвольной пространственной системы сил и впервые записывает их, практически в современном виде, то есть как систему шести уравнений равенства нулю сумм проекций всех сил и проекций их моментов на оси координат:

$$\int G = 0, \quad \int F\zeta - \Pi\mu = 0,$$
$$\int F = 0, \quad \int G\xi - \Pi\nu = 0,$$
$$\int \Pi = 0, \quad \int F\theta - G\chi = 0,$$

Здесь $G$, $F$, $\Pi$ — взаимно перпендикулярные проекции сил; знаком $\int$ Даламбер обозначает нынешний знак $\sum$; $\zeta$, $\mu$, $\xi$, $\theta$, $\chi$, $\nu$ — расстояния от точек приложения сил до соответствующих плоскостей. При этом отмечается, что для равновесия под действием сил $G$, $F$, $\Pi$ тела с закрепленной (неподвижной) точкой достаточно трех правых уравнений.

Вторая часть «Динамики» посвящена изложению общего принципа и его применению для решения конкретных задач удара тел и движения систем тел, связанных стержнями или нитями. Приведем этот принцип в авторском изложении.

«**Определение.** Скорость тела с учетом ее направления я буду в дальнейшем называть *движением* этого тела. Под *количеством движения* я буду понимать, как обычно, произведение массы на скорость.

**Общая задача.** Дана система тел, расположенных друг относительно друга произвольным образом. Каждому из этих тел передается некоторое движение, которое оно, однако, не может воспринять вследствие действия прочих тел. Найти движение каждого из данных тел.

**Решение.** Пусть система состоит из тел $A$, $B$, $C$ и так далее, и предположим, что им передаются движения $a$, $b$, $c$ и так далее, которые, вследствие взаимного действия тел, последние изменяют в $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и так далее. Ясно, что передаваемое телу $A$ движение $a$ можно рассматривать как составленное из воспринятого им движения $\boldsymbol{a}$ и из некоторого другого движения $\alpha$. Точно так же и движение $b$, $c$ и так далее можно рассматривать как составленные из движений $\mathbf{b}$ и $\beta$, $\mathbf{c}$ и $\chi$ и так далее. Следовательно, движение действующих друг на друга тел $A$, $B$, $C$ и так далее будет точно такое же, как если бы вместо импульсов $a$, $b$, $c$ и так далее им передавались сразу по два импульса: $\mathbf{a}$ и $\alpha$, $\mathbf{b}$ и $\beta$, $\mathbf{c}$ и $\chi$ и так далее. Но, по предположению, тела $A$, $B$, $C$ и т. д. сами по себе восприняли движения $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и так далее. Отсюда следует, что движения $\alpha$, $\beta$, $\chi$ и т. д. должны быть таковы, чтобы нисколько не нарушались движения и так далее; другими словами, если бы тела получили только движения $\alpha$, $\beta$, $\chi$ и так далее, то эти движения взаимно уничтожались бы, и тела остались бы в покое.

Отсюда вытекает следующее правило для нахождения движения нескольких тел, действующих друг на друга. Нужно движения $a$, $b$, $c$ и так далее, передаваемые этим телам, разложить каждое на два движения: $\mathbf{a}$ и $\alpha$, $\mathbf{b}$ и $\beta$, $\mathbf{c}$ и $\chi$ и так далее, причем эти последние движения должны быть таковы, что если телам будут переданы лишь движения $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и так далее, то тела могут сохранить эти движения, не мешая друг другу; если же телам будут переданы лишь движения $\alpha$, $\beta$, $\chi$ и так далее, то тела будут оставаться в покое.

Ясно, что **a**, **b**, **c** и так далее и будут теми движениями, которые могут быть восприняты телами вследствие их взаимного действия друг на друга. Что и требовалось найти» [29, с. 108–109].

Попытаемся перевести рассуждения Даламбера на язык современных понятий. Пусть $\{A_k\}$ — система $n$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ точек, на движение которых наложены связи

$$\left|\overline{r}_i - \overline{r}_j\right| \leqslant l_{ij},$$

где $\overline{r}_k$ — радиус-вектор точки $A_k$, $l_{ij}$ — заданные константы $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. Автор утверждает, что скорости $\overline{v}_k = \dot{\overline{r}}_k$ точек системы могут быть представлены в виде суммы

$$\overline{v}_k = \overline{v}'_k + \overline{v}''_k$$

скоростей $\overline{v}'_k$, реально осуществимых, допускаемых связями, и скоростей $\overline{v}''_k$, гасящихся наложенными связями. В изложении своего принципа Даламбер фактически указывает только то, что необходимо найти. Сам же принцип, как метод построения уравнений, явно не сформулирован. Остается предполагать, что описываемый автором принцип сводится к условиям равновесия системы точек (тел), двигающихся со скоростями $\overline{v}''_k$.

Далее Даламбер использует сформулированную им идею разложения скоростей для исследования свойств движения центра тяжести (или центра масс, как его называл Д. Бернулли в «Трактате о приливах и отливах», 1740 г.) и решения конкретных задач. Здесь приводится вполне современное определение равнодействующей системы сил[1], указывается способ определения реакции связи («закрепленной точки»), скорости движения центра тяжести системы точек (тел)

$$\overline{v}_c = \frac{\sum m_k \overline{v}_k}{M}$$

(в современных обозначениях), показывается, что состояние (движения или покоя) системы тел «не меняется от взаимного действия этих тел друг на друга» (иначе говоря, равнодействующая внутренних сил равна нулю).

[1] «Если несколько сил действуют совместно, то силу, равную и прямо пропорциональную той, которая может их уравновесить, я буду называть *равнодействующей этих сил*» [29, с. 111].

Проиллюстрируем идею Даламбера на задаче о колебаниях маятника. «Найти скорость стержня $CR$, закрепленного в точке $C$ (рис. 5.6.1) и нагруженного произвольным количеством тел $A$, $B$, $R$, предполагая, что если бы этим телам не препятствовал указанный стержень, они в равные промежутки времени описывали бы бесконечно малые линии $AO$, $BQ$, $RT$, перпендикулярные к стержню.

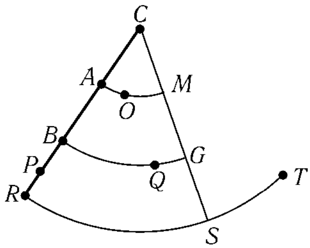


Рис. 5.6.1

Решение сводится к следующему. Если бы тела $A$, $B$, $R$ были свободными (не связанными общим стержнем), то за некоторое время они прошли бы пути $RT$, $BQ$, $AO$. Но стержень вносит свои коррективы в движение тел: если тело $R$ будет в $S$, то тела $A$ и $B$ должны быть в точках $M$ и $G$ соответственно. Помня, что скорости пропорциональны перемещениям, будем считать, что скорости $RT$, $BQ$ и $AO$ состоят из скоростей $RS$, $BG$, $AM$ и «потерянных» скоростей $ST$, $-QG$, $-OM$. Обозначим $AO = a$, $BQ = b$, $RT = c$; $CA = r$, $CB = \tau$, $CR = \rho$, $RS = z$; $A$, $B$ и $R$ — массы соответствующих тел. Тогда условие «равновесия»[1] рычага при сообщенных ему «потерянных» скоростях будут иметь вид:

$$A \cdot MO \cdot r + B \cdot GQ \cdot \tau = R \cdot ST \cdot \rho,$$

или после геометрических преобразований $MO$ и $GQ$ —

$$R(c - z)\rho = Ar\Big(\frac{zr}{\rho} - a\Big) + B\tau\Big(\frac{z\tau}{\rho} - b\Big),$$

откуда

$$z = \frac{Aar\rho + Bb\tau\rho + Rc\rho^2}{Ar^2 + B\tau^2 + R\rho^2}.$$

Обозначая движущие силы тел $A$, $B$, $R$ буквами $F$, $f$, $\varphi$ и считая, что соответствующие ускоряющие силы[2] пропорциональны скоростям или перемещениям $a$, $b$, $c$, после подстановки в последнее равенство

[1] В соответствии с примечанием Безу, силами здесь следует считать величины $A \cdot MO$, $B \cdot GQ$, $R \cdot ST$.

[2] В современной терминологии — ускорения.

вместо $a \sim \dfrac{F}{A}$, $b \sim \dfrac{f}{B}$, $c \sim \dfrac{\varphi}{R}$ получим выражение для ускоряющей силы тела $R$:

$$\frac{Fr + f\tau + \varphi\rho}{Ar^2 + B\tau^2 + R\rho^2} \cdot \rho.$$

Подставляя полученное выражение в последние из равенств $(*)$, приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{Fr + f\tau + \varphi\rho}{Ar^2 + B\tau^2 + R\rho^2} \cdot \rho \cdot dz = u\,du,$$

связывающему элемент дуги $dz$ и скорость $u$ тела $R$.

Из приведенного примера ясно, что своей идеей разделения движений Даламбер пользуется только для определения выражения ускоряющей силы. А само построение дифференциального уравнения движения осуществляется на основе *закона ускоряющих сил*, выражаемого равенствами $(*)$.

Рассматривая решение задачи о колебаниях маятника, автор показывает, как можно получить аналогичное дифференциальное уравнение для случая колебаний в среде, сопротивляющейся пропорционально произвольной степени $u^n$ скорости движения. Здесь же он сравнивает свой принцип с методами, ранее предложенными Д. Бернулли и Эйлером, которые он считает теоретически недостаточно обоснованными.

Завершается «Динамика» доказательством принципа сохранения живых сил на основе даламберовой идеи разделения движений и решением некоторых задач удара упругих тел и движения жидкости.

Первое знакомство с идеей Даламбера, положенной им в основу и следующей книги — «Трактата о равновесии и движении жидкостей, ...» [117] — можно продолжить, обратившись к авторской статье «Динамика» в «Энциклопедии»: «Положим, что нескольким телам передаются какие-то движения, которые у них не могут удержаться вследствие их взаимодействия и которые они вынуждены заменить другими. Известно, что всякое движение можно рассматривать как сложное движение, состоящее из двух движений по выбору. Поэтому мы можем первоначальное движение каждого тела рассматривать как сложное движение, составленное из двух движений, из которых одно мы возьмем такое, какое данное тело воспринимает вследствие действия на него других тел. Но если бы каждое тело получило бы это последнее движение вместо своего первоначального, которое ему было передано, то все тела могли бы сохранить это самое движение без всяких изменений: это как раз те движения, которые тела воспринимают сами по себе. Вследствие этого другие составляющие движения должны быть таковы, что они нисколько не будут нарушать первых составляющих движений. Другими словами, вторые движения должны быть таковы, что если бы только их сообщить всем телам и ничего больше, то система осталась бы в покое.

Отсюда следует, что для того, чтобы найти движение нескольких тел, действующих друг на друга, нужно разложить полученные телами движения, то есть движения, с которыми тела стремятся двигаться, на два других движения. Эти составляющие движения должны быть подобраны таким образом, что у каждого тела одно из этих составляющих движений должно уничтожиться, а другое должно быть таким и так направленным, чтобы действие окружающих тел не могло ничего в нем изменить. Отсюда легко видеть, что все *законы движения тел* могут быть сведены к *законам равновесия*. В самом деле, для решения любой задачи динамики нужно только разложить движение каждого тела на два движения. Зная одно из этих составляющих движений, мы сможем найти другое... Указанные условия всегда дадут все уравнения. Нет такой задачи динамики, которую нельзя было бы решить этим приемом или, по крайней мере, привести ее к уравнению, — а это есть все, что можно требовать от динамики.

Мне кажется, что данное правило в самом деле приводит все задачи, относящиеся к движению тел, к более простой задаче равновесия. Кроме того, этот принцип не опирается ни на какой вредный или неясный метафизический принцип[1]. Он рассматривает в движении лишь то, что в нем в действительности имеется, то есть пройденный путь и затраченное на это время. Он не пользуется ни действиями, ни силами, — одним словом, никаким из тех вторичных начал, которые, может быть, сами по себе и хороши и могут быть иногда полезными для сокращения и облегчения решения, но которые никогда не будут началами первичными, поскольку метафизика этих начал никогда не станет ясной» [29, с. 334–335].

В этом Даламбер был прав. Метафизичность основных законов механики лишает их наглядности, а значит, и ясности. Однако и пред-

[1]К числу таких принципов Даламбер относил и второй закон Ньютона.

лагаемый им принцип только создает эффект полной ясности. Если же попытаться сравнить этот принцип, как метод решения задач, с законами сохранения количества движения, живых сил, законом ускоряющих сил, то он менее «технологичен», он применим только для несвободных движений тел. Но в этом же и его достоинство — впервые делается попытка построения теории движения системы связанных тел. Благодаря Даламберу объектом внимания механиков становится не только свободное тело, но и система тел.

Своей «Механикой» Эйлер стремился расшифровать, разъяснить, упростить, развить, обобщить основные понятия и законы механики, созданной его предшественниками. В первую очередь — Ньютоном. «Динамика» Даламбера — это попытка радикальной перестройки основ механики, стремление к физической ясности ее понятий[1], предельной универсальности, всеобщности, наглядности и эффективности ее основополагающих принципов. Традиционный принцип виртуальных скоростей (перемещений) был прекрасным образцом основ теории равновесия тел. Поэтому идея его модернизации для нужд теории движения тел представляется вполне естественной. Но потребовалась не столько модернизация математического содержания принципа, сколько пересмотр физического понятия равновесия, покоя. Идея возможности уравновешивания, «уничтожения» некоторых динамических характеристик двигающегося тела в каждый момент времени связями (другими телами) оказалась очень перспективной. Именно эту идею положил Лагранж в основу своего общего уравнения динамики, опубликованного в 1788 г.

[1]В приложениях к работе приводится перевод главы «Механика» из «Очерка основ философии» Даламбера, где уточняются многие его определения и взгляды на механику.