весу корабля с грузом (рис. 4.7, *а*). Если по каким-либо внешним причинам, например при волнах, корабль случайно погрузится глубже на величину x (рис. 4.7, *б*), то подъемная сила увеличится и корабль будет выталкиваться к поверхности. Избыточная сила F_x, действующая на погруженный корабль, будет равна весу воды в объеме, заштрихованном на рис. 4.7, *б*. Обозначая плотность воды через ρ, получаем:

$$F_x = -g\rho Sx, \qquad (51.16)$$

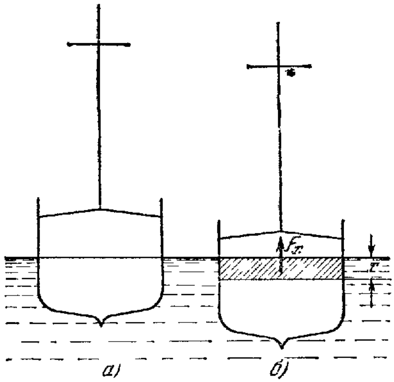

Рис. 4.7.

где S — площадь горизонтального сечения корабля на уровне воды. Сравнивая (51.16) и (51.5), видим, что на погруженный корабль действует квазиупругая сила с коэффициентом $k = g\rho S$, и, следовательно, он будет совершать вертикальные гармонические колебания по закону (50.4) с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{g\rho S}}, \qquad (51.17)$$

где m — масса корабля. Для грузового судна водоизмещением 10 000 т и площадью горизонтального сечения на уровне ватерлинии $S = 1000$ м^2 период вертикальных колебаний составит $T \approx 6$ с.

§ 52. Энергия гармонических колебаний

При гармоническом колебательном движении кинетическая энергия колеблющейся материальной точки непрерывно меняется. Меняется и потенциальная энергия взаимодействия между точкой и окружающими телами, приводящего к появлению квазиупругих сил.

Это есть энергия не самой материальной точки (например, это — энергия деформированной пружины или энергия взаимодействия маятник — Земля). Однако для нас это обстоятельство не существенно. Мы можем не интересоваться природой возникновения сил взаимодействия, зная, что сила квазиупруга, и зная коэффициент k. Как сила, так и потенциальная энергия при этом определяются положением колеблющейся точки m, т. е. ее координатой x.

Поэтому мы будем в дальнейшем как кинетическую, так и потенциальную энергию относить к самой колеблющейся материальной точке m.

Полная энергия механического движения есть сумма кинетической и потенциальной энергий. Согласно (50.7) кинетическая энергия гармонически колеблющейся точки массы m равна

$$E_{\text{кин}}=\frac{mv^2}{2}=\frac{m\omega^2A^2}{2}\sin^2\omega t=\frac{m\omega^2A^2}{2}\cos^2\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right). \qquad (52.1)$$

Пользуясь известным тригонометрическим равенством

$$\cos^2\varphi=\frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi),$$

перепишем выражение для кинетической энергии в таком виде:

$$E_{\text{кин}}=\frac{m\omega^2A^2}{4}\left[1+\cos 2\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\right]=\frac{m\omega^2A^2}{4}[1+\cos(2\omega t+\pi)]. \qquad (52.2)$$

Таким образом, $E_{\text{кин}}$ меняется со временем также по гармоническому закону, но по сравнению с координатой x — с удвоенной частотой. Кроме того, значение $E_{\text{кин}}$ колеблется не около нуля, но около $\frac{m\omega^2A^2}{4}$, меняясь от нуля до $\frac{m\omega^2A^2}{2}$, как это показано на рис. 4.8. Физически удвоение частоты колебания $E_{\text{кин}}$ по сравнению с x объясняется просто. Кинетическая энергия дважды за период обращается в нуль в точках, где $v=0$, — крайних точках движения. Максимального значения $E_{\text{кин}}$ достигает также два раза за период при прохождении точки $x=0$, где скорость v максимальна. В силу того, что в (52.1) скорость входит во второй степени, знак ее не существен, т. е. $E_{\text{кин}}$ принимает последовательно при движении от $-A$ к A те же значения, что и при движении от A к $-A$.

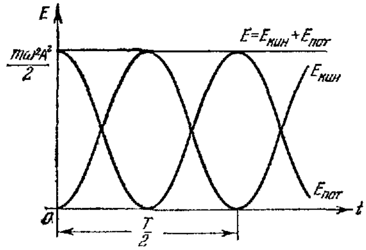

Рис. 4.8.

При вычислении потенциальной энергии квазиупругих сил условимся отсчитывать ее от положения равновесия, т. е. положим, что при $x=0$ $E_{\text{пот}}=0$. Тогда потенциальная энергия в точке x будет численно равна работе квазиупругой силы, совершенной при перемещении из положения равновесия в данную точку и взятой с обратным знаком:

$$E_{\text{пот}}=-\int_0^x F_{\text{кв-упр}}\,dx=\int_0^x kx\,dx=\frac{kx^2}{2}.$$

Подставляя вместо x его значение по уравнению (50.3), получим окончательно:

$$E_{\text{пот}}=\frac{kA^2\cos^2\omega t}{2}=\frac{m\omega^2A^2}{2}\cos^2\omega t=\frac{m\omega^2A^2}{4}[1+\cos 2\omega t]. \qquad (52.3)$$

Следовательно, потенциальная энергия $E_{пот}$ меняется с частотой 2ω и в тех же пределах, что и $E_{кин}$, но со сдвигом фазы относительно $E_{кин}$ на π. График изменения $E_{пот}$ со временем приведен на том же рис. 4.8.

Найдем теперь полную энергию E материальной точки m, совершающей гармоническое колебательное движение с частотой ω и амплитудой A (напомним, что мы условились $E_{пот}$ также относить к точке m):

$$E = E_{кин} + E_{пот} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}[\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t] = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \qquad (52.4)$$

так как по известному тригонометрическому соотношению сумма квадратов синуса и косинуса одного и того же угла всегда равна единице.

Таким образом, полная энергия гармонически колеблющейся точки есть величина постоянная и пропорциональная квадрату амплитуды колебаний A^2 (см. рис. 4.8). В процессе движения происходит непрерывный переход кинетической энергии в потенциальную и обратно, но сумма их остается при этом постоянной. Когда точка проходит через положение равновесия $x = 0$, потенциальная энергия обращается в нуль, а кинетическая максимальна и равна полной. Когда же колеблющаяся точка доходит до одного из своих крайних положений $x = \pm A$, то $v = 0$, кинетическая энергия обращается в нуль, а потенциальная максимальна и равна полной.

§ 53. Сложение гармонических колебаний

Пусть на материальную точку действует несколько различных упругих или квазиупругих сил. Каждая из этих сил заставляет точку совершать гармоническое колебательное движение. При одновременном воздействии этих сил точка будет одновременно участвовать во всех этих движениях. С такими примерами сложения гармонических колебаний мы встретимся ниже, в гл. XIV, при рассмотрении суперпозиции и интерференции волн.

Различные звуковые волны, одновременно воспринимаемые нашим ухом, заставляют барабанную перепонку принимать участие сразу в нескольких гармонических колебаниях. Электромагнитные волны, приходящие одновременно от ряда радиостанций, возбуждают в приемном контуре электрические колебания различных частот. Аналогичным образом складываются и различные синусоидальные переменные токи, подходящие по нескольким проводам к точке разветвления цепи, например при соединении потребителей трехфазного переменного тока на «звезду».

При сложении двух гармонических колебаний одного направления получается колебательное движение, вообще говоря, более сложное. Рассмотрим несколько примеров.